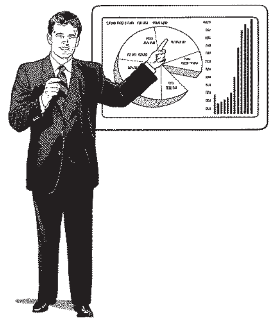

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Г. О. ЧИТАЯ, А. Н. ДИСЬКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРНОЙ ДИНАМИКИ ЗАМКНУТОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В статье структурная динамика экономики анализируется в соответствии с простейшей динамической моделью «затраты — выпуск», представляющей собой однородную систему дифференциальных уравнений. Основное внимание уделено исследованию свойств параметров общего аналитического решения системы с целью получения экономически интерпретируемых результатов. Расчеты проведены для четырехсекторной экономики путем генерирования методами имитационного моделирования технологической матрицы прямых затрат и матрицы коэффициентов приростной капиталоемкости секторальных выпусков.

Ключевые слова: структурная динамика; межотраслевой баланс; аналитическое решение; собственные числа; собственные векторы.

УДК 519.862.3

Введение. Цель проведенного исследования — дать формализованное описание динамики изменения структуры экономики на основе простейшей динамической модели межотраслевого баланса В. В. Леонтьева с постоянными коэффициентами прямых материальных и капитальных затрат. Рассматривается замкнутая макроэкономическая система, в которой весь ВВП используется на расширенное воспроизводство путем постоянного роста производственного накопления при отсутствии потребления. Математическая запись модели соответствует линейной однородной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Поставлена и решена задача генерирования отвечающих формальным математическим требованиям матриц коэффициентов прямых материальных и капитальных затрат для четырехсекторной экономики. Это позволяет получить экономически четко интерпретируемое общее аналитическое решение системы дифференциальных уравнений.

Гигла Отарович ЧИТАЯ (chitaya_g@bseu.by), *доктор экономических наук, доцент, зав. кафедрой математических методов в экономике Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь);*

Анжелика Николаевна ДИСЬКО (anzhelika-@mail.ru), *ассистент кафедры математических методов в экономике Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).*

Динамическая модель замкнутой экономической системы. Один из возможных подходов к моделированию секторальной структуры экономики состоит в использовании динамической модели межотраслевого баланса. Простейший вариант предложен В.В. Леонтьевым и представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами [1, с. *123*]

$$X(t) = A \cdot X(t) + F \cdot X'(t) + C(t), \tag{1}$$

где $X(t) = (X_j(t))$ — вектор-столбец секторальных выпусков в момент времени t $(t \in [0;T]; (j = 1, 2, \ldots, n)$; $A = (a_{ij})$ — матрица коэффициентов прямых материальных затрат; $F = (f_{ij})$ — матрица коэффициентов капиталоемкости приростов секторальных выпусков; $X'(t) = (X_j'(t))$ — вектор-столбец абсолютных приростов секторальных выпусков (вектор-столбец производных $X_j'(t)$); $C(t) = (C_j(t))$ — вектор-столбец потребления продукции секторов экономики.

Неоднородную систему дифференциальных уравнений (1) при соблюдении выполнения базового матричного уравнения В. В. Леонтьева в простейшем динамическом представлении $X(t) = A X(t) + Y(t)$ можно преобразовать в иную модификацию с учетом предположения о том, что функции $X_j(t)$ и $Y_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0;T]$ и матрица коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$ продуктивна. Здесь $Y(t) = (Y_j(t))$ — вектор-столбец конечного спроса на продукцию секторов экономики.

Действительно, из базового балансового уравнения и непрерывности функции $X_j(t)$ и $Y_j(t)$ следует:

$$X(t) = (E - A)^{-1} Y(t), \tag{2}$$

$$X'(t) = (E - A)^{-1} Y'(t). \tag{3}$$

Подстановкой формул (2) и (3) в (1) получим модифицированную версию исходной модели (1)

$$Y(t) = F(E - A)^{-1} \cdot Y'(t) + C(t). \tag{4}$$

Для решения системы (4) необходимо соблюдение ряда требований. Матрица A должна быть продуктивной и/или неразложимой, матрица F — невырожденной, тогда $(E - A)^{-1} > (E + A)$, $F(E - A)^{-1}$ (поэлементно). Решения системы (4) при $Y'(t) \geq 0$ в силу неотрицательности матриц $(E - A)^{-1}$ и $F(E - A)^{-1}$ гарантируют, что $Y(t) \geq 0$, $X(t) \geq 0$, $X'(t) \geq 0$.

Для дальнейших рассуждений, пусть $F = \overline{(f_{ij})}$, опустим аргумент t и запишем упрощенный вариант (4), принимая во внимание экономическую целесообразность проведения аналитических расчетов по динамической модели замкнутой производственной системы

$$Y = \overline{F} \cdot Y'. \tag{5}$$

Элементы матрицы $\overline{F}$ находят собственное экономическое объяснение. В частности, $\overline{f_{ij}}$ показывают полные капитальные затраты i-го сектора экономики в расчете на единичный прирост выпуска продукции в секторе j.

Решение системы (5) характеризует технологические возможности экономического роста при заданных матрицах A и F, когда все ресурсы ВВП направляются на расширенное воспроизводство с нулевым потреблением (в (4) $C(t) = 0$).

Формулу (5) можно переписать в виде линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Действительно, с учетом предъявляемых требований к матрицам A и F существует матрица $\left(\overline{F}\right)^{-1} \equiv \tilde{F}$ и (5) примет следующий вид:

$$Y^{/} = \tilde{F} \cdot Y. \qquad (6)$$

Вместе с тем элементы матрицы $\tilde{F}$ есть результат обращения матрицы $\overline{F}$ и не имеют экономическую интерпретацию. В связи с этим в дальнейшем правомерно рассматривать подходы к нахождению общего аналитического решения системы (5) и следующие из него экономические выводы.

Общее аналитическое решение и свойства параметров. В соответствии с работой [1, с. *124—125*] общее решение системы (5) имеет следующий аналитический вид:

$$\overline{Y}(t) = \sum_{l=1}^{n} d_l \cdot K_l \cdot e^{\lambda_l \cdot t}. \qquad (7)$$

Параметры аналитического решения λ_l , K_l и d_l получаются в следующей последовательности:

λ_l — корни характеристического уравнения n-го порядка,

$$\det\left[E - \lambda \cdot \overline{F}\right] = 0 \;; \qquad (8)$$

K_l — соответствующие λ_l собственные векторы матрицы $\overline{F}$;

d_l — постоянные, определяемые из системы уравнений.

$$\sum_{l=1}^{n} d_l \cdot K_l = Y(0), \qquad (9)$$

где, $Y(0) = \left(Y_j(0)\right)$ — вектор-столбец конечного спроса на продукцию секторов экономики в начальный момент времени.

Экономически содержательное объяснение аналитического решения (7) требует установления полезных для анализа свойств его параметров:

1) в общем случае решение (7) содержит несколько отличных от нуля параметров d_l , поэтому единственная траектория системы (5), выходящая из начальной точки $Y(0)$, представляет собой комбинацию экспонент, растущих с различными темпами;

2) среди характеристических корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ уравнения (8) могут оказаться комплексные числа, а также положительные, больше единицы, числа;

3) компоненты векторов K_l могут содержать числа с разнонаправленными арифметическими знаками;

4) принимая во внимание содержание пунктов 1—3, при возрастании аргумента t среди численных значений $\overline{Y}(t)$ могут оказаться и отрицательные, что не поддается экономической интерпретации.

Для устранения проблем экономически доступной интерпретируемости аналитического решения (7) системы (5) правомерно воспользоваться следствиями теоремы Перрона, которая справедлива для матриц класса $\overline{F}$. Кроме того, следует обеспечить формирование матрицы коэффициентов прямых материальных затрат A с соблюдением не только условия продуктивности, но и ее неразложимости. Для гипотетического примера двухсекторной экономики, когда матрица A второго порядка, то ее построение не представляет особой трудности. Для матриц третьего и больших порядков генерирование матрицы сопряжено со строгим соблюдением неразложимости матрицы. Как в научной, так и учебной литературе, посвященной моделированию структурной динамики экономики, генерирование подобных матриц не содержится.

Для матрицы $\overline{F}$ математически нестрогое формулирование следствий теоремы Перрона можно представить в определенной последовательности [2, с. *352—370*].

Среди собственных значений $s_1,\ s_2,\ldots,s_n$ матрицы $\overline{F}$ присутствует такое $\overline{s}$, которое больше всех остальных. $\overline{s}$ называется корнем Фробениуса — Перрона.

Для $\overline{s}$ выполняются условия

$$\min_j \sum_{i=1}^{n} \overline{f_{ij}} \le \overline{s} \le \max_j \sum_{i=1}^{n} \overline{f_{ij}}. \qquad (10)$$

Собственному числу $\overline{s}$ отвечает единственный собственный вектор $\overline{K}=(\overline{K}_1,\ \overline{K}_2,\ldots,\overline{K}_n)$, все координаты которого строго положительны, принадлежат интервалу [0; 1] и удовлетворяют условию

$$\overline{K}_1+\overline{K}_2+\ldots+\overline{K}_n=1. \qquad (11)$$

Между характеристическими корнями $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_n$ уравнения (8) и собственными значениями $s_1,\ s_2,\ldots,s_n$ матрицы $\overline{F}$ имеет взаимообратное отношение, согласно которому $\lambda_l=1/s_l\ \left(l=\overline{1,n}\right)$. При этом как характеристическим корням, так и собственным значениям отвечают одни и те же собственные векторы $K_l\ \left(l=\overline{1,n}\right)$. Следовательно, $\overline{\lambda}=1/\overline{s}$ соответствует вектор $\overline{K}$.

В экономической научной литературе условие (11) выступает формальным способом количественного представления структуры системы, когда ее элементы составляют суть долевого распределения в едином целом. Подобная схема формализации не отвечает подлинной структуре системы, но не ограничиваясь строгостью суждений, справедливо констатировать, что речь идет об «экономической структуре». В соответствии с общим аналитическим решением (7) системы (5) слагаемое $\overline{d}\ \overline{K}\ e^{\overline{\lambda} t}$ при изменении временного аргумента t будет отражать траекторию роста конечного спроса на продукцию секторов экономики с учетом изменения секторальной структуры ВВП. Другими словами, в разложении $\overline{Y}(t)$ для каждого заданного $\overline{Y}(0)=\left(Y_j(0)\right)$ будут возникать траектории изменения ВВП, в каждой из которых структурную динамику при изменении t определяет слагаемое $\overline{d}\ \overline{K}\ e^{\overline{\lambda} t}$, когда все $(n-1)$ характеристические корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$ отрицательны и $\overline{\lambda}\in(0;1)$.

Значение $\overline{\lambda}$ в межотраслевой динамической модели находит объяснение технологического темпа прироста ВВП, а вектор $\overline{K}=(\overline{K}_1,\ \overline{K}_2,\ldots,\overline{K}_n)$ — секторальной структуры ВВП.

Генерирование матриц A **и** F. Задачей данного подраздела исследования является реализация гипотетического подхода к построению матриц для условной четырехсекторной экономики с заданным вектором конечного спроса на продукцию секторов $Y(0)$. Ключевое значение имеет достижение неразложимости технологической матрицы прямых материальных затрат и невырожденности матрицы F.

Как следует из [3, с. *70—71*], неразложимой является матрица, если каждая отрасль хотя бы косвенно потребляет продукцию всех остальных отраслей. В противном случае, если хотя бы одна отрасль даже косвенно не использует продукцию всех отраслей (изолированная отрасль), тогда технологическая матрица не станет неразложимой. Согласно [4, с. *252—260*] справедливо указать на достаточные условия неразложимости технологической матрицы:

если вне главной диагонали матрицы нет нулей, то она неразложима;

если хотя бы одна из $(n-1)$ подматриц размера $(n-p)\times p$, $p=\overline{1;n-1}$ стоящих в левом нижнем углу технологической матрицы размера $n\times n$, является нулевой, то технологическая матрица не является неразложимой, а соответствующее подмножество отраслей $R=\{1,2,\ldots,p\}$ является изолированным.

Генерирование приведенных ниже матриц A и F осуществлено с соблюдением их неразложимости и невырожденности соответственно [5, с. *399—400*]:

$$A=\begin{pmatrix}0{,}21 & 0{,}04 & 0{,}4 & 0\\ 0{,}21 & 0{,}32 & 0 & 0{,}04\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}13 & 0{,}1\\ 0{,}01 & 0{,}26 & 0{,}01 & 0{,}2\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}93 & 0{,}72 & 0{,}82\\ 0{,}89 & 0{,}5 & 0{,}78 & 0{,}73\\ 0{,}56 & 0{,}82 & 0{,}5 & 0{,}73\\ 0{,}79 & 0{,}56 & 0{,}85 & 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы F равен $(-0{,}029)$, она является невырожденной. Подтверждается неразложимость матрицы A на основе коэффициентов косвенных затрат, которые больше нуля. Так, если элементы матрицы A $a_{14}=0$; $a_{23}=0$; $a_{31}=0$, то коэффициенты косвенных затрат первого порядка приобретают значения $a_{14}^{(1)}=0{,}0416$; $a_{23}^{(1)}=0{,}0844$; $a_{31}^{(1)}=0{,}043$.

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}35 & 0{,}3 & 0{,}62 & 0{,}09\\ 0{,}42 & 1{,}59 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,}43 & 1{,}2 & 0{,}17\\ 0{,}16 & 0{,}53 & 0{,}09 & 1{,}29\end{pmatrix},\quad \overline{F}=F(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}28 & 2{,}37 & 1{,}43 & 1{,}32\\ 1{,}61 & 1{,}78 & 1{,}65 & 1{,}21\\ 1{,}27 & 2{,}07 & 1{,}17 & 1{,}16\\ 1{,}48 & 1{,}75 & 1{,}67 & 0{,}92\end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы $\overline{F}$ составили:

$$s_1=-0{,}599;\ s_2=-0{,}18;\ s_3=-0{,}133;\ s_4=6{,}064.$$

$s_4=\overline{s}$ — корень Фробениуса — Перрона.

Ряд чисел, который соответствует суммам элементов столбцов матрицы $\overline{F}$ выглядит следующим образом: (5,64 7,97 5,92 4,61) и $4{,}61\le(s_4=\overline{s}=6{,}064)\le 7{,}97$.

Так как $\lambda_l=1/S_l$ $(l=\overline{1,4})$, $\lambda_1=-1{,}669$; $\lambda_2=-5{,}556$; $\lambda_3=-7{,}519$; $\lambda_4=0{,}165$; $\lambda_4=\overline{\lambda}$, собственным значениям $S_1,\ S_2,S_3\ S_4=\overline{S}$ матрицы $\overline{F}$ и характеристическим корням $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\lambda_4=\overline{\lambda}$ уравнения (8) соответствуют собственные векторы:

$$K_1=\begin{pmatrix}-1{,}03\\ 0{,}71\\ -0{,}74\\ 1\end{pmatrix},\ K_2=\begin{pmatrix}-0{,}2\\ -0{,}39\\ -0{,}07\\ 1\end{pmatrix},K_3=\begin{pmatrix}-0{,}66\\ -0{,}37\\ 0{,}35\\ 1\end{pmatrix},K_4=\overline{K}=\begin{pmatrix}0{,}265\\ 0{,}258\\ 0{,}236\\ 0{,}241\end{pmatrix}.$$

Предположим вектор-столбец конечного спроса на продукцию секторов экономики в начальный момент времени имеет вид

$$Y(0)=\begin{pmatrix}156\\ 192\\ 148\\ 201\end{pmatrix},$$

.

тогда постоянные $d_l,\ l=\overline{1,4}$ из системы уравнений (9) будут равны: $d_1=23{,}32$; $d_2=5{,}55$; $d_3=4{,}63$; $d_4=695{,}03$.

Общее аналитическое решение (7) для четырехсекторной гипотетической замкнутой производственно-экономической системы приобретает следующий вид:

$$\bar{Y}(t) = 23,32 \cdot \begin{pmatrix} -1,03 \\ 0,71 \\ -0,74 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-1,669t} + 5,55 \cdot \begin{pmatrix} -0,2 \\ -0,39 \\ -0,07 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-5,566t} + 4,63 \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -0,66 \\ -0,37 \\ 0,35 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-7,519t} + 695,03 \cdot \begin{pmatrix} 0,265 \\ 0,258 \\ 0,236 \\ 0,241 \end{pmatrix} \cdot e^{0,165t}.$$

В соответствии с полученным решением замкнутая гипотетическая экономика в долгосрочной перспективе будет устойчиво расти вдоль магистральной траектории с постоянным ежегодным темпом прироста ВВП 16,5 %, а секторальная структура будет стремиться к вектору $\bar{K}$. Другими словами, теоретически, с устремлением t к бесконечности все векторы-столбцы в разложении $\bar{Y}(t)$ в виде слагаемых, кроме четвертого слагаемого, станут нулевыми.

Заключение. Проведенное исследование динамики изменения структуры экономики позволило сформулировать ряд выводов.

Представлено формализованное описание структуры экономики в соответствии с простейшей даннической моделью межотраслевого баланса В. В. Леонтьева с постоянными коэффициентами технологических затрат и капиталоемкости приростов секторальных выпусков. Показано, что модифицированная схема структурного анализа Леонтьева становится операциональной, т. е. подлежащей численной реализации, если она сводится к замкнутой системе, в которой весь прирост ВВП направляется на производственное накопление и потребление равно нулю. Математическая модель подобной системы сводится к однородной системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Для объяснения содержания общего аналитического решения системы дифференциальных уравнений, описывающего замкнутую производственную систему, сконцентрировано внимание на выявлении экономически интерпретируемых свойствах параметров решения. В частности, основываясь на следствиях теоремы Перрона, раскрывающей содержание алгоритма алгебраических преобразований определенного класса матриц, показано, что устойчиво развивающаяся экономика в динамике стремится к постоянному темпу роста и фиксированной структуре ВВП.

Одно из слагаемых общего аналитического решения при соблюдении условий неразложимости технологической матрицы прямых материальных затрат и невырожденности матрицы приростной капиталоемкости выпусков секторов экономики позволяет формализовать структурную динамику экономики на долгосрочный период с потенциалом проведения прогностических расчетов.

В научной и учебной литературе работоспособность математической модели замкнутой системы иллюстрируется гипотетическими примерами двухсекторной экономики. В предлагаемой работе приемами имитационного моделирования сгенерированы матрицы четвертого порядка, позволившие получить экономически интерпретируемое аналитическое решение системы дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Гранберг, А. Г.* Динамические модели народного хозяйства : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Экон. кибернетика» / А. Г. Гранберг. — М. : Экономика, 1985. — 240 с.

Granberg, A. G. Dinamicheskie modeli narodnogo hozjajstva [Dynamic models of the national economy] : ucheb. posobie dlja studentov vuzov, obuchajushhihsja po spec. «Jekon. kibernetika» / A. G. Granberg. — M. : Jekonomika, 1985. — 240 p.

2. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1968. — 576 с.

Gantmaher, F. R. Teorija matric [The Theory of Matrices] / F. R. Gantmaher. — M. : Nauka, 1968. — 576 p.

3. *Масаев, С. Н.* Модель межотраслевого баланса Леонтьева как задача управления динамической системой / С. Н. Масаев // Вестн. Моск. гос. техн. ун-та им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. — 2021. — № 2 (135). — С. 66—82.

Masaev, S. N. Model' mezhotraslevogo balansa Leont'eva kak zadacha upravlenija dinamicheskoj sistemoj [Leontiev's intersectoral balance model as a task of managing a dynamic system] / S. N. Masaev // Vestn. Mosk. gos. tehn. un-ta im. N. Je. Baumana. Ser. Priborostroenie. — 2021. — N 2 (135). — P. 66—82.

4. *Ланкастер, П.* Теория матриц / П. Ланкастер. — М. : Наука, 1973. — 280 с.

Lankaster, P. Teorija matric [The Theory of Matrices] / P. Lankaster. — M. : Nauka, 1973. — 280 p.

5. *Дисько, А. Н.* Моделирование структурной динамики экономики / А. Н. Дисько, Г. О. Читая // Экономический рост Республики Беларусь: глобализация, инновационность, устойчивость : мат. XV Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 19—20 мая 2022 г. / Белорус. гос. экон. ун-т ; редкол.: А. В. Егоров [и др.]. — Минск, 2022. — С. 399—400.

Dis'ko, A. N. Modelirovanie strukturnoj dinamiki jekonomiki [Modeling the structural dynamics of the economy] / A. N. Dis'ko, G. O. Chitaja // Jekonomicheskij rost Respubliki Belarus': globalizacija, innovacionnost', ustojchivost' : mat. XV Mezhdunar. nauch.-prakt. konf., Minsk, 19—20 maja 2022 g. / Belorus. gos. jekon. un-t ; redkol.: A. V. Egorov [i dr.]. — Minsk, 2022. — P. 399—400.

GIGLA CHITAYA, ANZHALIKA DZISKO

MATHEMATICAL MODELING OF STRUCTURAL DYNAMICS OF A CLOSED ECONOMIC SYSTEM

Authors affiliation. *Gigla CHITAYA* (chitaya_g@bseu.by), *Belarus State Economic University (Minsk, Belarus); Anzhalika DZISKO* (anzhelika-@mail.ru), *Belarus State Economic University (Minsk, Belarus).*

Abstract. In the article, the structural dynamics of the economy is analyzed in accordance with the simplest dynamic input-output model, which is a homogeneous system of differential equations. The main attention is paid to the study of the properties of the parameters of the general analytical solution of the system in order to obtain economically interpretable results. Calculations were made for a four-sector economy by generating a technological matrix of direct costs and a matrix of coefficients of incremental capital intensity of sectoral outputs using simulation modeling methods.

Keywords: structural dynamics; intersectoral balance; analytical solution; eigenvalues; eigenvectors.

UDC 519.862.3

Статья поступила
в редакцию 11. 07. 2022 г.