


Учреждение образования “Белорусский государственный экономический университет”

УТВЕРЖДАЮ

Ректор учреждения образования  
“Белорусский государственный  
экономический университет”

 А.В. Егоров  
“ 22 ” 10 2021 г.  
Регистрационный № УД 4969-21/уч.

## ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности  
1-31 03 06 «Экономическая кибернетика (по направлениям)»

**Составители:**

Ю.Л. Ратушева, доцент кафедры математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

Л.В. Фильчук, ассистент кафедры математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет»

**Рецензенты:**

Е.А. Баркова, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент;

А.В. Конюх, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

**Рекомендована к утверждению**

Кафедрой математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол № 1 от 31.08.2021 г.);

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет»

(протокол № 3 от 20.10.21)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Линейная алгебра» направлена на изучение таких понятий, как линейные пространства, линейные операторы, которые имеют прямую связь с дисциплинами, изучаемыми на специальности «Экономическая кибернетика». Одними из главных понятий данного курса являются понятие вектора как элемента векторного пространства, а также понятие линейного оператора, которое тесно связано с понятием оператора в языках программирования. Понятия линейных (векторных), евклидовых и унитарных пространств являются обобщающими для понятий двумерного и трехмерного пространства, изучаемого в школьном курсе геометрии и аналитической геометрии.

Материал учебной дисциплины является базовым для всех учебных дисциплин, использующих математические методы: «Численные методы», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ», «Эконометрика» и др.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- понятия линейного пространства, линейного оператора,
- понятия собственных значений и собственных векторов матриц;
- методы нахождения решений многомерных систем линейных уравнений и методы представления этих решений в векторной форме;
- квадратичные формы и их основные свойства;
- понятия евклидова пространства, унитарного пространства, скалярного произведения в этих пространствах;

**уметь:**

- решать основные задачи теории линейных, евклидовых и унитарных пространств;
- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- применять методы линейной алгебры при решении задач специальности;

**владеть:**

- аппаратом линейной алгебры;
- навыками решения систем линейных уравнений;
- навыками использования матричных методов для решения задач линейной алгебры.

Всего часов по учебной дисциплине - всего часов 240, из них всего часов аудиторных - 136, в том числе 68 часов – лекции, 68 часов – практические занятия.

Формы текущей аттестации – зачет, экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### **Тема 1. Линейные пространства**

Роль истории белорусской государственности и государственной идеологии Республики Беларусь в формировании профессиональных компетенций специалиста в области экономики.

Определение и примеры линейных пространств. Свойства линейных пространств.

Понятие вектора в  $n$ -мерном пространстве. Операции с векторами в  $n$ -мерном пространстве. Скалярное произведение векторов. Базис и ранг системы векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Ортогонализация Грама-Шмидта системы векторов.

Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Универсальный пример конечномерного линейного пространства.

### **Тема 2. Системы линейных уравнений в многомерных пространствах**

Неопределенные СЛУ, свободные и базисные неизвестные. Системы однородных линейных уравнений, фундаментальная система решений. Общее решение однородной и неоднородной СЛУ.

### **Тема 3. Линейные операторы**

Определение и свойства линейного оператора. Матрица линейного оператора. Вычисление координат образа вектора. Изменение матрицы оператора при изменении базиса. Определитель линейного оператора. Операции над линейными операторами. Невырожденные линейные операторы. Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств.

### **Тема 4. Собственные значения и собственные векторы**

Собственные значения и собственные векторы квадратных матриц. Свойства собственных значений. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду. Ортогональные и симметричные матрицы. Алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений. Модель международной торговли.

Жорданова нормальная форма квадратной матрицы. Приведение квадратных матриц к жордановой нормальной форме.

Собственные векторы линейного оператора, собственные значения, характеристическое уравнение. Правила нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

### **Тема 5. Неотрицательные матрицы**

Разложимые матрицы. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц. Теорема Фробениуса. Число и вектор Фробениуса. Про-

дуктивность неотрицательных матриц. Связь продуктивности с числом Фробениуса. Модель бездефицитной торговли.

### **Тема 6. Квадратичные формы**

Билинейные формы. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса. Симметричные билинейные формы.

Квадратичная форма и ее матричная запись. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Эквивалентные квадратичные формы.

### **Тема 7. Евклидовы и унитарные пространства**

Определение и свойства евклидова пространства. Скалярное произведение. Вещественные и унитарные пространства. Неравенство Коши-Буняковского.

Нормы матриц и векторов, взаимосвязь матричных и векторных норм. Нормированные пространства. Существование ортогонального базиса. Матрица Грама и ее свойства. Разложение пространства в прямую сумму подпространств.

### **Тема 8. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах**

Ортогональные, унитарные, эрмитовы и симметричные матрицы. Сопряженный линейный оператор и его матрица. Самосопряженные линейные операторы. Изометрия. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора. Приводимость эрмитовых и симметричных матриц к диагональному виду. Квадратичные формы в евклидовом пространстве.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»  
ДЛЯ ДНЕВНОЙ ФОРМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Номер темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов										Иное	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов			УСР				
						Лек- ции	ПЗ (СЗ)	7		8	9		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10				
1	Линейные пространства	6	6										
2	Системы линейных уравнений в многомерных пространствах	10	10										
3	Линейные операторы	10	10										
4	Собственные значения и собственные векторы	10	10										
5	Неотрицательные матрицы	8	8										
6	Квадратичные формы	8	8										
7	Евклидовы и унитарные пространства	8	8										
8	Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах	8	8										
	<b>Всего часов</b>	<b>68</b>	<b>68</b>										<b>экзамен</b>

## **ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

В овладении знаниями учебной дисциплины важным этапом является самостоятельная работа студентов. Рекомендуется бюджет времени для самостоятельной работы в среднем 2-2,5 часа на 2-х часовое аудиторное занятие.

Основными направлениями самостоятельной работы студента являются:

- первоначально подробное ознакомление с программой учебной дисциплины;
- ознакомление со списком рекомендуемой литературы по дисциплине в целом и ее разделам, наличие ее в библиотеке и других доступных источниках, изучение необходимой литературы по теме, подбор дополнительной литературы;
- изучение и расширение лекционного материала преподавателя за счет специальной литературы, консультаций;
- подготовка к практическим занятиям по специально разработанным планам с изучением основной и дополнительной литературы;
- подготовка к выполнению диагностических форм контроля (тесты, контрольные работы, устные опросы и т.п.);
- подготовка к зачету, экзамену.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная:

1. Белько, И. В. Высшая математика для экономистов. 1 семестр : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление, функции многих переменных] : экспресс-курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. - 3-е изд., стер. - Москва : Новое знание, 2007. - 139 с. - (Экспресс-курс).
2. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям / Л. Л. Березкина. - 2-е изд. - Минск : РИВШ, 2015. - 354 с. : ил.
3. Кастрица, О. А. Высшая математика для экономистов : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям / О. А. Кастрица. - 4-е изд., стер. - Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2015. - 491 с. : ил. - (Высшее образование. Бакалавриат).
4. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата : учебник для студентов, обучающихся по специальности 061800 "Математические методы в экономике" и другим экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера ; Финансовый ун-т при Правительстве Рос. Федерации. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 306, [15] с. : ил. - (Бакалавр. Академический курс) (Учебник. Практикум).
5. Рябушко, А. П. Высшая математика : теория и задачи : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям : в 5 ч. / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — 2-е изд. — Минск : Вышэйшая школа, 2017. — Ч. 1: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. — 2017. — 302, [1] с. : ил., табл.

### Дополнительная:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1980.
2. Белявский, С.С. Высшая математика: решение задач / С.С. Белявский, Н.А. Широкова – Минск: Вышэйшая школа, 2004.
3. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям / Л. Л. Березкина. - Минск : РИВШ, 2012. - 354 с.
4. Бортаковский, А. С. Линейная алгебра в примерах и задачах : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — 3-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 592 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-010586-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1045621> (дата обращения: 11.10.2021). – Режим доступа: по подписке.
5. Бортаковский, А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. — 2-е изд., стер. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 352 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). -



ISBN 978-5-16-010206-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1014764> (дата обращения: 11.10.2021). – Режим доступа: по подписке.

6. Высшая математика для экономистов : Учебник для вузов по экон. спец. / Н. Ш. Кремер [и др.] ; Под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перерб. и доп. - Москва : ЮНИТИ : Банки и биржи, 1998. - 471 с.

7. Закон Республики Беларусь «Об информации, информатизации и защите информации» от 10.11.2008 №455-3

8. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1999.

9. Конюх, А.В. Сборник задачи упражнений по высшей математике для экономических специальностей. Часть I / А.В. Конюх, Косьянчук В.В., Майоровская СВ. – Минск: БГЭУ, 2008.

10. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2012.

11. Общий курс высшей математики для экономистов / Ю.Н. Ермакова [и др.]; под.ред. Ю.Н. Ермакова. – М.: ИНФРА, 2001.

12. Орлова, И.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов / И.В. Орлова, В.В. Угрозов, Е.С. Филонова. – М.: Из-во Юрлайт, 2015.

13. Постановление Совета безопасности Республики Беларусь «О концепции информационной безопасности Республики Беларусь» от 18.03.2019 №1.

14. Рудык, Б. М. Линейная алгебра : учебное пособие / Б. М. Рудык. - Москва : ИНФРА-М, 2019. - 318 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004533-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1010102> (дата обращения: 11.10.2021). – Режим доступа: по подписке.

15. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.С. Феденко [и др.]; под.ред. А.С. Феденко. – Минск: Унверсітэцкае, 1997.


16. Солодовников, А.С. Математика в экономике: В 2 ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов. – М.: Финансы и статистика, 1998-1999.

17. Тышкевич, Р.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. – Минск.: Вышэйшая школа, 1997.

18. Шевцов, Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 544 с. - ISBN 978-5-9776-0258-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1015326> (дата обращения: 11.10.2021). – Режим доступа: по подписке.

19. Яблонский, А. И. Высшая математика : общий курс : учебник для студентов экономических специальностей вузов / под общ. ред. Самалы С. А. — 2-е изд., перераб. — Минск : Выш.шк., 2000. — 351 с. : ил.,табл.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и Номера протокола)
«Дифференциальное и интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ»	Высшей математики	Согласовано, дублирования тем нет    Жосьянчук В.В.	Утверждено. Протокол № 2 от 29.09.21.

## ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.)

Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета  
\_\_\_\_\_