

ной методике. Возможно решение и такой задачи, как поиск по минимуму потерь продукции наиболее рационального размещения сельскохозяйственных культур на одном поле.

#### Литература

1. Временные методические указания по учету влияния водного режима мелиорированных торфяников на урожай сельскохозяйственных культур. Мн., 1976.
2. Методика экономического обоснования увлажнительных мероприятий сельскохозяйственных культур на мелиорированных землях. Мн., 1992.
3. Указания. Регулирование водно-воздушного режима почвы на осушительно-увлажнительных системах при выращивании сельскохозяйственных культур по интенсивным технологиям РД 33 БССР 2.87. Минмелионодхоз БССР. Мн., 1987.

**И.А. БОКУН, А.Ф. БОГДАН**

### *РАВНОВЕСНАЯ ЦЕНА – ПАРАМЕТР КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ РЫНКА*

В экономике, как в биологии и технических дисциплинах, могут быть использованы математические модели, позволяющие прогнозировать некоторые параметры. К таким параметрам можно отнести в условиях рыночной экономики равновесную цену, которая во времени носит, как будет показано, колебательный характер.

Рыночный спрос и рыночное предложение, как известно, взаимосвязаны. Хотя интересы продавцов и покупателей на рынке прямо противоположны, тем не менее устанавливается некая равновесная цена, удовлетворяющая обе стороны. Она показывает, что только при таком соотношении цены и объема реализуемой продукции продавцы и покупатели хотят продавать и покупать одинаковое количество данного товара и по одинаковой цене. При дефиците товара равновесная цена увеличивается, а при излишке товара уменьшается. Дефицит товара наблюдается при увеличении спроса (рис. 1) или уменьшении предложения (рис. 2), излишки при уменьшении спроса (рис. 3) или увеличении предложения (рис. 4), т.е. равновесная цена постоянно изменяется во времени.

Спрос формируется только на основе потребностей людей, которые, предположим, достаточно велики. Предложение формируется только благодаря спросу. Величина спроса и предложения есть целое число и, следовательно, может изменяться только скачками, но чтобы иметь возможность применить методы дифференциального исчисления, будем рассматривать их как непрерывные функции времени. Обозначим величину спроса через  $D$ , предложения –  $S$ . Предположим, что если бы предложения на рынке не было, то величина спроса непрерывно увеличивалась бы, причем скорость увеличения была бы пропорциональной числу имеющихся потребностей на данный товар или услугу.

Тогда можно записать:

$$\frac{dD}{dt} = \epsilon_1 D, \quad (1)$$

причем  $\epsilon_1 > 0$ . Этот коэффициент увеличения  $\epsilon_1$  зависит от цен товаров или услуг, доходов потребителей, ожиданий, вкусов.

Если бы на рынке присутствовало только одно предложение, то оно постепенно уменьшалось, поэтому для предложения можно записать:

$$\frac{dS}{dt} = \varepsilon_2 S. \quad (2)$$

Предположим, что на рынке есть и спрос, и предложение одновременно, тогда коэффициент увеличения спроса будет тем меньше, чем больше предложение.

Сделаем простейшее предположение, что коэффициент  $\varepsilon_1$  уменьшается на величину, пропорциональную  $S$ ; аналогичным образом предположим, что коэффициент уменьшения  $\varepsilon_2$  в силу спроса изменяется на величину, пропорциональную  $D$ . При этих предположениях получается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dD}{dt} = D(\varepsilon_1 - \gamma_1 S), \quad (3)$$

$$\frac{dS}{dt} = S(\varepsilon_2 - \gamma_2 D), \quad (4)$$

причем  $\varepsilon_1, \gamma_1, \varepsilon_2, \gamma_2$  больше нуля. Умножая первое уравнение на  $\gamma_2$ , второе на  $\gamma_1$  и складывая, получим

$$\gamma_2 \frac{dD}{dt} + \gamma_1 \frac{dS}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 D - \varepsilon_2 \gamma_1 S.$$

Умножая же первое на  $\varepsilon_2 / D$ , второе на  $\varepsilon_1 / S$  и складывая, получаем

$$\varepsilon_2 \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} + \varepsilon_1 \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 D - \varepsilon_2 \gamma_1 S.$$

Следовательно,

$$\gamma_2 \frac{dD}{dt} + \gamma_1 \frac{dS}{dt} - \varepsilon_2 \frac{d(\ln D)}{dt} - \varepsilon_1 \frac{d(\ln S)}{dt} = 0.$$

Как показано в работе [1], последнее уравнение непосредственно интегрируется, и имеется однозначный интеграл:

$$\gamma_2 D + \gamma_1 S - \varepsilon_2 \ln D - \varepsilon_1 \ln S = \text{const}. \quad (5)$$

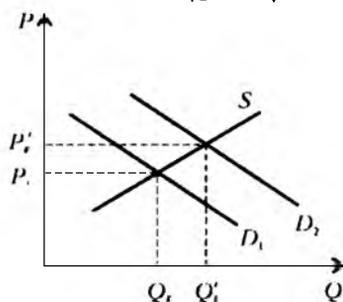


Рис. 1. Увеличение спроса

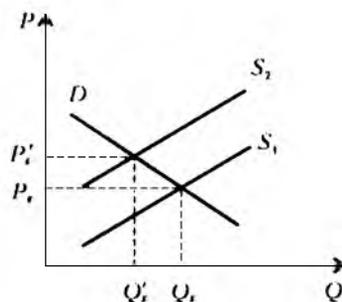


Рис. 2. Уменьшение предложения

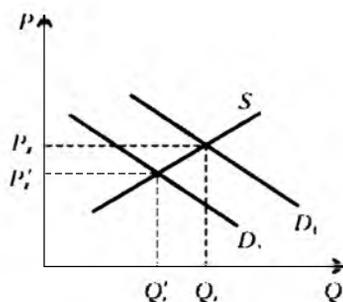


Рис. 3. Уменьшение спроса

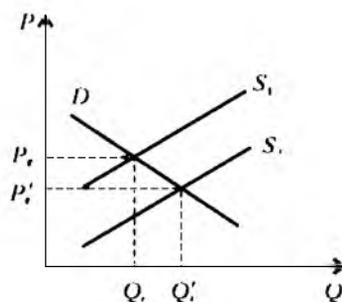


Рис. 4. Увеличение предложения

Этот интеграл можно записать в таком виде:

$$F(D, S) = \exp(\gamma_2 D) \exp(\gamma_1 S) D^{\varepsilon_2} S^{\varepsilon_1} = \text{const.}$$

Нетрудно убедиться, что выражение  $\iint \frac{dD \cdot dS}{D \cdot S}$  будет интегральным инвариантом.

На основании этого заключаем, что рассматриваемая система (рынок) является консервативной [1].

Если приравнять производные уравнений (3), (4) нулю, то получим равновесное решение:

$$D_0 = \varepsilon_2 / \gamma_2, \quad (6)$$

$$S_0 = \varepsilon_1 / \gamma_1. \quad (7)$$

Уравнения (3) и (4) удобно нормализовать по отношению к равновесным значениям путем введения новых переменных  $d$  и  $s$  [2]:

$$d = D / D_0 \text{ и } s = S / S_0. \quad (8)$$

Подстановка выражений (8) в уравнения (3) и (4) позволяет получить нормализованные уравнения:

$$\frac{ds}{dt} = -\varepsilon_2 s(1 - d), \quad (9)$$

$$\frac{dd}{dt} = -\varepsilon_1 d(1 - s). \quad (10)$$

Введем малые отклонения системы от равновесного состояния, приняв

$$s = 1 + \lambda f_1(t), \quad (11)$$

$$d = 1 + \lambda f_2(t), \quad (12)$$

где  $\lambda \ll 1$ . После подстановки соотношений (11) и (12) в уравнения (9) и (10) имеем

$$\dot{f}_1 = \varepsilon_2 f_2; \quad (13)$$

$$\dot{f}_2 = \varepsilon_1 f_1. \quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14) получим уравнение относительно одной из переменных ( $f_1$  или  $f_2$ ), например:

$$\ddot{f}_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 f_1 = 0.$$

Решение уравнения имеет вид

$$f_1 = \alpha \cos \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t + \beta \sin \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} t,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные.

Таким образом, малое возбуждение приводит к незатухающим синусоидальным колебаниям около положения равновесия. Это решение является устойчивым, так как амплитуда отклонений не увеличивается и не уменьшается со временем (рис. 5).

Изменение спроса и предложения по синусоидальному закону вызывает изменение величины равновесной цены также по синусоидальному закону, значение которой можно прогнозировать с определенной долей вероятности. Для данного случая характерна модель прогнозирования с линейно-аддитивным трендом. Показатель с таким видом тренда имеет среднее значение, которое увеличивается (или убывает) приблизительно на одинаковую величину с каждым моментом времени.

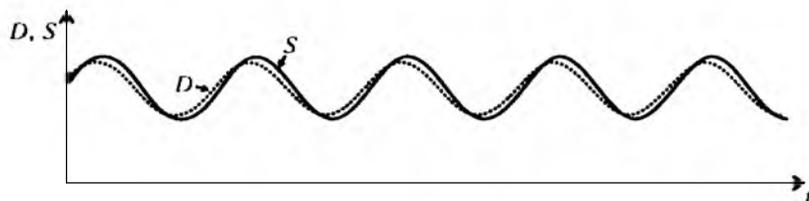


Рис. 5. Зависимость изменения спроса и предложения от времени

Для такого типа трендов число прогнозных моделей наиболее велико. Стационарный фактор рассчитывается на основании уравнения

$$U_t = U_{t-1} + b_{t-1} + (1 - \xi)^2 l_t,$$

где  $l_t = d_t - f_t$ .

Фактор роста вычисляется по формуле

$$b_t = b_{t-1} + (1 - \xi)^2 l_t.$$

Прогноз на  $\tau$  моментов времени вперед находится как

$$f_{t+\tau} = U_t + b_t \tau,$$

где в качестве  $\xi$  рекомендуется брать  $\xi = 0,8$ .

Таким образом, было показано, что рынок представляет собой консервативную колебательную систему, для которой применимы, хоть и в приближении, уравнения математической модели.

#### Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М., 1981.
2. Пэнтл Р. Методы системного анализа окружающей среды. М., 1979.

## ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Научно-практический журнал "ВЕСНИК Беларускага дзяржаўнага эканамічнага ўніверсітэта", выпускаемый в БГЭУ с 1994 г., с 1999 г. выходит 6 раз в год.

Журнал можно приобрести в магазине "Книги" Белорусского государственного экономического университета, в магазине "Академкнига", а также по подписке.

**ПОДПИСКА ПРОИЗВОДИТСЯ  
ВО ВСЕХ ОТДЕЛЕНИЯХ СВЯЗИ**

**ИНДЕКС ЖУРНАЛА 74838**

Почтовый адрес редакции: 220070, г. Минск,  
пр. Партизанский, 24,  
корп. 6, комн. 16.

Телефон редакции: 230-72-65