

*А.И. Субботенко, ассистент, Е.В. Рогалевиц, УО «БГЭУ», (г. Минск)*

## СЦЕНАРНЫЙ АНАЛИЗ СЕЛЬХОЗПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ САХАРНОЙ СВЕКЛЫ

Программой развития сахарной промышленности на 2005-2010 годы определены основные задачи по сельхозпроизводителями по увеличению валового сбора сахарной свеклы в 2009 году до 4 млн. тонн., против 1,5 млн. тонн в 2000 году, посевные площади составят 92,3 тыс. га. В 2008 году валовой сбор сахарной свеклы в Белоруссии в хозяйствах всех категорий составил 4,03 млн. т. (на 11,1 % больше уровня 2007 года), урожайность – 439 ц/га ( в 2007 году – 387ц/ га). Внесено минеральных удобрений 425 тонн на 1 га пахотных земель, что на 3 тонны больше по сравнению с 2007 годом.

Проведем анализ зависимости урожайности сахарной свеклы от валового сбора и внесенных удобрений и построим прогноз на 2009 год. Для этого используем сценарный анализ, который популярен по двум взаимообуславливающим факторам. Во-первых, в экономике как на практическом так и на теоретическом уровне была создана объективная необходимость использования системного подхода при исследовании экономических объектов, одним из важнейших этапов которого является моделирование. Во-вторых, ускорение темпов прохождения экономических процессов в мировом хозяйстве, их усложнение и глобализация значительно усложняют прогнозирование, что в свою очередь усиливает неопределенность будущих результатов деятельности.

Задача – определить, как будет изменяться урожайность в зависимости от изменения объема валового сбора свеклы, уровня внесенных минеральных удобрений и внесенных органических удобрений. Необходимо построить три однофакторные модели, чтобы убедиться, действительно ли выбранные факторы влияют на урожайность. Проведем регрессионный анализ. Суть регрессионного анализа – анализировать зависимость между статистическими данными. Построение регрессии означает не только нахождение какой-либо связи между данными, но и наиболее точной связи между ними. Сценарный анализ, подразумевая под собой метод прогнозирования, как раз нуждается в таких моделях, так как, зная вид зависимости между анализируемыми данными, можно выяснить, что произойдет с объектом моделирования при некотором варьировании параметров. В зависимости от ситуации необходимо знать, что случится с объектом при критическом изменении каких-либо влияющих на него параметров и как поведет себя изучаемый объект при различных сценариях развития событий.

Обозначим через  $Y$  урожайность,  $X$ - фактор, влияющий на  $Y$ , то есть валовый сбор, количество минеральных и органических удобрений. Следует определить вид влияния  $X$  на  $Y$ , в предположении, что он является линейным. Другими словами необходимо определить известные коэффициенты  $a$  и  $b$  в линейном регрессионном уравнении

$$Y = a \cdot X + b$$

Чтобы определить вид связи, необходимо воспользоваться набором статистических данных параметров  $Y$  и  $X$ . Такой набор представляет пары  $\{X_i, Y_i\}$ , которые являют собой эмпирически определенные значения параметров  $X$  и  $Y$  и называется статистической выборкой. Пусть статистическая выборка состоит из  $n$  таких пар:  $\overline{i = 1, n}$ . Необходимо заметить, что  $n$  должно превосходить 1, так как в противном случае, определить коэффициенты  $a$  и  $b$  невозможно. При  $n=2$  линия регрессии всегда пройдет через точки:  $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2)$ . В общем же случае выборка состоит более чем из 2 пар, поэтому необходимо определить коэффициенты  $a$  и  $b$  такие, чтобы линия регрессии наиболее точно отражает статистические данные.

Для нахождения этих коэффициентов воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК). Пусть разность между экспериментальным значением характеристики объекта  $Y_i$  и гипотетическим значением  $Y$  при  $X_i$  равно  $\delta_i$ :

$$\delta_i = Y_i - Y = Y_i - (a * X_i + b)$$

$$\text{Рассмотрим функцию } F(a, b) = \sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - a * X_i - b)^2$$

МНК минимизирует сумму квадратов отклонений истинных значений от оценочных, тем самым достигается оптимальная оценка:

$$F(a, b) \rightarrow \min$$

Для нахождения минимума целевой функции  $F$ , заданной как сумма квадратов отклонений, необходимо составить систему уравнений, в которых к нулю приравнены частные производные по искомым коэффициентам. В данном случае система будет состоять из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Разрешив систему, получим оптимальные коэффициенты  $a$  и  $b$ . Они определяют уравнение кривой и тем самым дают возможность построить линию регрессии:

$$Y = a * X + b$$

Однако сразу же может возникнуть вопрос, как определить точность построений. Очевидно, что привести линию с минимальной ошибкой можно всегда, так как ошибка неотрицательная величина. В лучшем случае все значения выборки будут лежать на прямой, что означает нулевую ошибку. Но будет ли построенная прямая достаточно точно описывать зависимость между данными, если ошибка ненулевая. Возможно, существует другой вид кривой, который более точно описывает статистические данные.

Для определения меры адекватности статистических данных самой существует коэффициент детерминации, обозначаемый как  $R^2$ .

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - Y)^2}$$

где  $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$  - среднее значение по выборке из  $Y_i$ ;

$\hat{Y}_i = a * X_i + b$  -- расчетное значение величины  $Y$  для  $X_i$ ;

$Y_i$  - значение  $Y$  в  $i$ -м эксперименте.

Фактически этот коэффициент является мерой адекватности статистических данных самой модели. Определим коэффициент детерминации ( $R^2$ ). Значение коэффициента детерминации находится в промежутке  $[0,1]$ , чем значение коэффициента детерминации больше, тем выше степень адекватности уравнения регрессии. В результате вычислений получим:

**Таблица 1 – Коэффициенты линейной регрессии и коэффициент детерминации по однофакторным моделям**

Зависимость урожайности (Y) от X:	Коэффициенты регрессии		$R^2$
	$a$	$b$	
Валового сбора сахарной свеклы	<b>0,07</b>	<b>144,93</b>	<b>0,810</b>
Внесено минеральных удобрений	<b>1,04</b>	<b>-75,16</b>	<b>0,199</b>
Внесено органических удобрений	<b>-14,84</b>	<b>1033,54</b>	<b>0,506</b>

Экономический смысл коэффициента  $a$  заключается в том, например, если валовой сбор сахарной свеклы увеличится на 1 тыс. тонн, урожайность увеличится на **0,07** ц/га при прочих равных. Коэффициент детерминации равный **0,810** характеризует долю изменения (вариации) урожайности в зависимости от изменения валового сбора сахарной свеклы. Анализируя все полученные коэффициенты детерминации, можно сделать вывод о том, что в большей степени урожайность объясняется валовым сбором сахарной свеклы и количеством внесенных органических удобрений. Внесение минеральных удобрений в меньшей степени влияет на урожайность(коэффициент детерминации равен **0,199**), поэтому этот фактор исключаем из дальнейшего анализа.

Следующий этап анализа состоит в агрегировании полученных однофакторных моделей в двухфакторную регрессионную модель. Построим модель зависимости урожайности от валового сбора сахарной свеклы и внесенных органических удобрений. Необходимо выбрать базовую модель, у которой  $R^2$  наибольший, то есть **0,810**, поэтому базовой моделью является модель урожайности в зависимости от валового сбора. Аналогично одномерному случаю адекватность построенной модели определяется коэффициентом детерминации  $R^2$ :

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Но в отличие от одномерного случая, в многомерном случае коэффициент детерминации корректируют, учитывая несколько степеней свободы:

$$R_{кор}^2 = 1 - \frac{k-1}{k-(n+1)} * (1-R^2) \quad , \text{ где}$$

$R^2$  -- нескорректированный коэффициент детерминации,  
 $k$ —объем статистической выборки: количество элементов в ней,  
 $n$ - количество независимых переменных в уравнении регрессии.

Удобно использовать матричную форму записи этого метода.  
 Введем некоторые новые обозначения:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ K \\ Y_k \end{bmatrix}, \|X\| = \begin{bmatrix} X_1^1 L X_{n+1}^1 \\ K K K \\ X_k^1 K X_{n+1}^k \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ K \\ b \end{bmatrix}$$

Теперь весь набор статистических данных можно объединить в одно векторное уравнение:

$$\bar{Y} = \|X\| * \bar{B}$$

Для нахождения коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial B} = 0,$$

где  $F = (\bar{Y} - \|X\|\bar{B})^t (\bar{Y} - \|X\|\bar{B})$   
 после упрощения получим:

$$\bar{B} = (\bar{X}^t \bar{X})^{-1} \bar{X}^t \bar{Y}.$$

Таким образом, мы вычислили вектор оптимальных неизвестных коэффициентов  $\bar{B}$ , необходимых для построения уравнения регрессии.

**Таблица 2 – Коэффициенты линейной регрессии и коэффициент детерминации по двухфакторной модели**

Коэффициенты модели	$a_1$	$a_2$	$b$	$R^2$
Урожайность, Y	0,09	8,44	-323,81	0,845

Таким образом, уравнение регрессии двухфакторной модели примет вид:

$$Y = 0,09X_1 + 8,44X_2 - 323,81,$$

где  $X_1$  - валовой сбор сахарной свеклы, тыс. тонн.

$X_2$  - количество внесенных органических удобрений, млн. тонн.

Данное уравнение описывает поведение урожайности сахарной свеклы в зависимости от изменения валового сбора сахарной свеклы и количества внесенных органических удобрений. То есть с увеличением валового сбора на 1 тыс. тонн при прежнем уровне количества внесенных удобрений урожайность свеклы увеличится на 0,09 ц/га, по сравнению с ранее полученной однофакторной моделью, где при увеличении валового сбора на 1 тыс. тонн урожайность увеличится на **0,07** ц/га, данная модель в большей степени объясняет поведение зависимой переменной, так как коэффициент детерминации составляет **0,845** против **0,810** однофакторной модели (таблица 2).

Полученное уравнение регрессии двухфакторной модели будем использовать для дальнейшего анализа.

### Сценарный анализ

В соответствии с методологией сценарного анализа в данном примере рассматривается три возможных сценария уровня урожайности сахарной свеклы в 2009 году

Первый сценарий – пессимистический, при котором валовой сбор составит 4000 тыс. тонн, то есть уменьшится на 30 тыс. тонн по сравнению с 2008 годом. Второй сценарий – рабочий, количество внесенных органических составит 46 млн. тонн, что характеризует об увеличении на 3,2 млн. тонн в сопоставлении с аналогичным периодом 2008 года. Третий сценарий – оптимистический, предполагается одновременное увеличение валового сбора на 200 тыс. тонн, что составит 4200 тыс. тонн, и увеличение количества внесенных удобрений до 46 млн. тонн по сравнению с 2008 годом.

Представим данные варианты в виде таблицы.

Таблица 3 – Возможные сценарии развития сахарной отрасли в 2009 году.

Моделируемые переменные	Пессимистический		Рабочий		Оптимистический	
	2008 год	2009 год	2008 год	2009 год	2008 год	2009 год
Валовой сбор сахарной свеклы, тыс. тонн	4030	4000	4030	4030	4030	4200
Внесение органических удобрений, млн. тонн	42,8	42,8	42,8	46	42,8	46

В результате проведения сценарного анализа урожайность сахарной свеклы в 2009 году имеет три возможных уровня (таблица 4).

Таблица 4 – Уровень урожайности сахарной свеклы в зависимости от сценария в 2009 году.

Моделируемые переменные	Пессимистический		Рабочий		Оптимистический	
	2008 год	2009 год	2008 год	2009 год	2008 год	2009 год
Валовой сбор сахарной свеклы, тыс. тонн	4030	4000	4030	4030	4030	4200
Внесение органических удобрений, млн. тонн	42,8	42,8	42,8	46	42,8	46
Урожайность, ц/га	439	403,94	439	433,69	439	449,27

При пессимистическом сценарии урожайность сахарной свеклы в 2009 году составит 403,94 ц/га, что на 35 ц/га меньше по сравнению с урожайностью 2008 года. При рабочем сценарии урожайность по сравнению с аналогичным периодом снизится лишь на 5,3 ц/га. При оптимистическом сценарии, при котором идет одновременное увеличение валового сбора и увеличением внесения органических удобрений, урожайность составит 449, 27 ц/га, что на 10,27 ц/га больше в сопоставлении с 2008 годом.

Возможные сценарии представлены на рис.1.

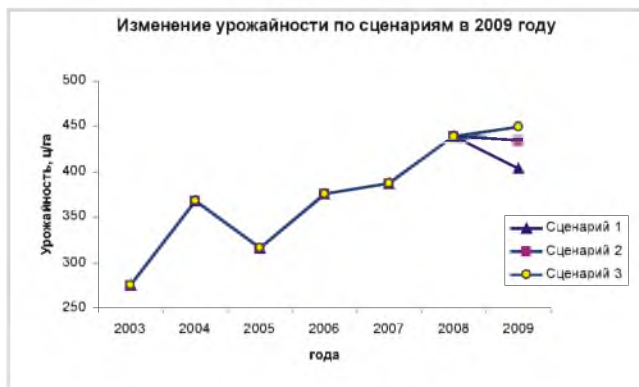


Рисунок 1 – Изменение урожайности по сценариям в 2009 году.

Так как целью сельхозпроизводителей сахарной свеклы является повышение урожайности, то можно сделать вывод о том, что наиболее желаемым является оптимистичный сценарий развития. Для реализации данного сценария на практике необходимо одновременно с увеличением количества органических удобрений увеличивать валовой сбор сахарной свеклы. Рекомендуется увеличивать валовой сбор сахарной свеклы при тех же посевных площадях. Это возможно достичь путем технического перевооружения организаций сахарной отрасли, при помощи проведения научных исследований по повышению урожайности сахарной свеклы.

В результате данного исследования обоснована структура метода сценарного анализа. На реальном примере продемонстрирована методология проведения сценарного анализа, аргументирована эффективность практического применения сценарного анализа при построении прогнозов.

## Литература

1. Количественные методы в экономических исследованиях: Учебник для вузов/ Под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 791 с.
2. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник. -5-е изд., испр. – М.: Дело, 2005. – 400 с.