АДДИТИВНО-МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ИНДЕКСНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ КРИВОЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

М.М. Новиков, профессор кафедры статистики
УО «БГЭУ», докт.экон. наук, профессор

Аннотация. *Осуществлен научный поиск аналитических возможностей полной факторной декомпозиции результативного показателя-функции на основе метода изолированного влияния. Решение сформулированной задачи найдено, базируясь на теории предельно малых приращений и криволинейного взаимодействия показателей-факторов индексных моделей, что достигается посредством моделирования динамики годовых показателей с привлечением данных квартальной (месячной) периодичности.*

Вследствие увеличения количества наблюдений в течение двух последовательных временных периодов достигается также единство аналитических выводов с применением методов индексного и регрессионного моделирования и анализа экономической динамики.

Abstrakt. *Carried out scientific research of the analytical capabilities of a full factorial decomposition of the effective index functions based on the method of isolated influences. The solution of formulated problem was found, based on the theory of the very small increments and curvilinear interaction indicators factor index models, which is achieved by modeling the dynamics of annual indicators involving data quarterly (monthly) frequency.*

Due to the increased number of observations during two consecutive time frames is also achieved unity of analytical insights applying methods of index and regression modeling's and analysis of economic dynamics.

Введение. В теории и практике статистики известны два альтернативных метода индексного моделирования динамики сложных экономических явлений, представленных произведением факторных сомножителей: 1) изолированное изучение влияния факторов и 2) построение системы взаимосвязанных индексов с применением последовательно-цепного метода. Этим методам присущ следующий ряд особенностей.

Во-первых, если исходить из принципа изолированного влияния, то в этой схеме полное приращение сложного явления по данным показателей годовой периодичности не равно сумме факторных приростов функции. Абсолютная величина этого расхождения представлена так называемым не разложенным остатком, образующимся в результате совместного влияния факторов.

Во-вторых, применение схемы последовательно-цепного моделирования хоть и позволяет без остатка разложить абсолютный прирост функции между факторами, однако приводит к двум альтернативным и неравнозначным вариантам последовательности индексирования факторов. В конечном счете, это выражается в том, что размеры факторных приращений могут оказаться различными в зависимости от выбранного порядка или варианта последовательности индексирования.

Между тем в каждом из двух методов разложения однозначное объяснение имеет только один факторный прирост, а именно тот, который получен по способу изолированного влияния. По этой причине со всей очевидностью можно заключить о необходимости научного поиска возможностей полной факторной декомпозиции результативного показателя с ориентировкой на метод изолированного влияния. В этой связи в качестве целевой функции или критерия решения сформулированной задачи следует принять поиск таких условий, при которых прирост результативного показателя без остатка разлагался бы по факторам индексной модели с применением метода изолированного влияния или на его методологической основе.

Основная часть. Авторское исследование подтверждает возможность построения такой системы аналитических вычислений. Поиск решения сформулированной задачи лежит в плоскости теории предельно малых приращений и криволинейного взаимодействия показателей-факторов индексных моделей.

Для разъяснения вопроса обратимся к простейшей модели динамики объема производства продукции Z в зависимости от изменения а) фонда отработанного времени X и б) уровня производительности труда – y. Пусть мы будем располагать данными об объеме производства продукции, отработанном времени (в чел.-днях) и дневной производительности труда рабочих за два смежных года с квартальной разбивкой. Учитывая, что $x_i \cdot y_i = z_i$ (*i* = *1*, *2*, *3*, *4* – порядковый номер квартала) объем производства продукции в системе координат *XOY* каждый раз будет определяться площадью прямоугольника со сторонами x_i, y_i. Тогда траектория движения квартальных объемов производства продукции во времени будет проходить через точки a_i, лежащие на пересечении координат x_i, y_i. Траектория движения квартальных объемов производства, таким образом, будет описываться движением начальной точки $a_{1/0}$ (точки пересечения координат $x_{1/0}$, $y_{1/0}$ за первый квартал базисного года) расширяющегося пространства в системе координат *XOY*.

Траектория движения квартального объема производства в факторной системе координат рассекает его годовой прирост между факторами. При этом на долю фактора x приходится та часть пространства, которая ограничена траекторией и ее проекцией на ось X-ов, а на долю фактора *у* – траекторией и ее проекцией на ось *Y*-ов. Данное положение нетрудно доказать аналитически. Так, со всей очевидностью общий прирост объема произведенной продукции за год можно представить как сумму годовых приростов за каждый квартал, т.е.

$$\sum z_{i/1} - \sum z_{i/0} = (z_{1/1} - z_{1/0}) + (z_{2/1} - z_{2/0}) + (z_{3/1} - z_{3/0}) + (z_{4/1} - z_{4/0}), \qquad (1)$$

где $z_{i/0}$, $z_{i/1}$ – объем производства продукции за *i-й* квартал соответственно в базисном и отчетном периодах.

В свою очередь, объем годового прироста продукции за каждый из кварталов в отдельности мы вправе рассматривать как сумму цепных абсолютных приростов, т.е. приростовых значений анализируемого показателя за каждый последующий квартал по сравнению с предыдущим.

Так, для I квартала:

$$z_{1/1} - z_{1/0} = (z_{2/0} - z_{1/0}) + (z_{3/0} - z_{2/0}) + (z_{4/0} - z_{3/0}) + (z_{1/1} - z_{4/0}); \qquad (2)$$

для II квартала:

$$z_{2/1} - z_{2/0} = (z_{3/0} - z_{2/0}) + (z_{4/0} - z_{3/0}) + (z_{1/1} - z_{4/0}) + (z_{2/1} - z_{1/1}); \qquad (3)$$

для III квартала:

$$z_{3/1} - z_{3/0} = (z_{4/0} - z_{3/0}) + (z_{1/1} - z_{4/0}) + (z_{2/1} - z_{1/1}) + (z_{3/1} - z_{2/1}); \qquad (4)$$

для IY квартала:

$$z_{4/1} - z_{4/0} = (z_{1/1} - z_{4/0}) + (z_{2/1} - z_{1/1}) + (z_{3/1} - z_{2/1}) + (z_{4/1} - z_{3/1}). \qquad (5)$$

В результате подстановки в формулу (1) формул (2-5) и приведения подобных членов получаем аналитический алгоритм (6):

$$\sum_i z_{i/1} - \sum_i z_{i/0} = 1\cdot(z_{2/0} - z_{1/0}) + 2(z_{2/0} - z_{1/0}) + 3(z_{4/0} - z_{3/0}) + \\ + 4(z_{1/1} - z_{4/0}) + 3(z_{2/1} - z_{1/1}) + 2(z_{3/1} - z_{2/1}) + 1\cdot(z_{4/1} - z_{3/1}), \tag{6}$$

характеризующую закономерность формирования прироста годового объема производства в зависимости от изменения квартальных уровней показателей.

Квартальные показатели производства продукции в свою очередь состоят из месячных, месячные – из подекадных, дневных и т.д. В общем, годовой объем производства и его прирост можно представить как сумму объемов продукции и соответственно приростов объемов производства за *n* равных последовательных промежутков годового фонда времени. Это позволяет формулу (6) представить в общем виде, а именно:

$$\sum_i z_{i/1} - \sum_i z_{i/0} = 1\cdot(z_{2/0} - z_{1/0}) + 2(z_{3/0} - z_{2/0}) + ... + n(z_{1/1} - z_{n/0}) + \\ + (n-1)(z_{2/1} - z_{1/1}) + ... + 2(z_{n-1/1} - z_{n-2/1}) + 1\cdot(z_{n/1} - z_{n-1/1}). \tag{7}$$

Каждый из цепных приростов: $z_{2/0} - z_{1/0}$, $z_{3/0} - z_{2/0}$ и т.д., может быть разложен по факторам: а) изменения отработанного времени Δz_x и б) повышения уровня производительности труда – Δz_y. Так,

$$z_{2/0} - z_{1/0} = \Delta z_{x_{2/0}} + \Delta z_{y_{2/0}}; \tag{8}$$

$$z_{3/0} - z_{2/0} = \Delta z_{x_{3/0}} + \Delta z_{y_{3/0}} \tag{9}$$

и т.д. Отсюда вытекает, что факторные годовые и общие годовые приростовые показатели имеют единую природу формирования. Тем самым, после подстановки факторных приростовых значений (8) и (9) в (7) годовой прирост с учетом пофакторного разложения выразится алгоритмами (10) и (11), характеризующими прирост годового объема производства за счет:

а) увеличения отработанного времени

$$\Delta z_x = \Delta z_{x_{2/0}} + 2\Delta z_{x_{3/0}} + ... + n\Delta z_{x_{1/1}} + ... + 2\Delta z_{x_{(n-1)/1}} + \Delta z_{x_{n/1}}; \tag{10}$$

б) повышения уровня производительности труда

$$\Delta z_y = \Delta z_{y_{2/0}} + 2\Delta z_{y_{3/0}} + ... + n\Delta z_{y_{1/1}} + ... + 2\Delta z_{y_{(n-1)/1}} + \Delta z_{y_{n/1}}. \tag{11}$$

При неограниченном возрастании *n* в соответствии с алгоритмами (10) и (11) формируются условия полного разложения объема производства между факторами на основе способа изолированного влияния. Особенность формирования этих условий отчетливо проявляется уже на стадии перехода значений *n* от 1 к *n*=4 т.е. при поквартальной разбивке годового объема производства. Уже в этом случае траектория движения объема производства продукции в факторной системе координат строится по восьми точкам их пересечения. Тем самым квартальная разбивка позволяет получить довольно плавную линию пролегания траектории. Убедимся в этом на примере показателей, представленных в таблице 1.

Как видно из данных годовых показателей, общий прирост объема производства продукции за год составил 15 (186–171) млрд р. В соответствии с двумя альтернативными схемами последовательно-цепного индексирования имеем следующие результаты аналитического разложения.

Таблица 1 – Квартальные показатели объема выпуска, отработанного времени и производительности труда предприятия за два смежных года*

Период	Объем выпуска в сопоставимых ценах, млрд р.	Отработанное время, тыс. чел-дней	Уровень производительности труда, млн р./ чел-день
Базисный год:			
1 квартал	40	5,0	8,0000
2 квартал	42	5,1	8,2353
3 квартал	43	5,2	8,2692
4 квартал	46	5,3	8,6792
За базисный год	**171**	**20,6**	**8,30097**
Отчетный год:			
1 квартал	47	5,4	8,7037
2 квартал	48	5,5	8,7273
3 квартал	46	5,6	8,2145
4 квартал	45	5,7	7,8947
За отчетный год	**186**	**22,2**	**8,37838**

* Примечание. Данные условные.

По первой схеме: а) увеличением фонда отработанного времени на 1,6 (22,2-20,6) тыс. отработанных чел-дней при базисном уровне производительности труда объясняется прирост объема выпуска на 13,2815 (1,6 * 8,30097) млрд р.; б) вследствие повышения уровня производительности труда прирост объема выпуска составил 1,7185 (8,37838–8,30097) млрд р.

По альтернативной схеме разложения имеем другие факторные приросты. За счет увеличения отработанного времени прирост объема выпуска составил 13,4054 (1,6*8,37838) млрд р., а вследствие повышения уровня производительности труда – 1,5946 [(8,37838–8,30097)*20,6] млрд р.

Как видно, обе схемы последовательно цепного индексирования позволяют без остатка разложить общий прирост по факторам индексной декомпозиции динамики объема выпуска. В то же время обнаруживается погрешность в аналитических вычислениях. Она формируется расхождениями полученных результатов аналитического разложения, в размере –0,1239 (13,2815–13,4054) млрд р. по фактору отработанного времени и такую же по абсолютной величине расхождения, но с обратным знаком, по фактору производительности труда (1,7185–1,5946=0,1239).

Факторная декомпозиция годового прироста объема выпуска по методу изолированного влияния, выполненная по исходным данным показателей годовой периодичности, дает только один результат аналитического разложения, однако при этом образуется так называемый неразложенный остаток. Так, прирост объема выпуска, обусловленный увеличением отработанного времени, составит 13,2815 (1,6 * 8,30097) млрд р. Вследствие повышения уровня производительности труда объем выпуска увеличился на 1,5946 [(8,37838 – 8,30097) *20,6] млрд р. Сумма по двум факторным приростам составляет 14,8761 млрд р. при неразложенном остатке 0,1239 млрд р. Обратим внимание на совпадение оценок неразложенного остатка и погрешности разложения общего прироста выпуска по альтернативным схемам последовательно цепного индексирования.

В дополнение к полученным результатам выполним аналитическое разложение годового прироста выпуска в оценке по методу изолированного влияния по исходным данным показателей квартальной периодичности, что соответствует аналитическим алгоритмам (10) и (11) при n=4. Так, по исходным данным квартальных показателей прирост годового объема производства за счет увеличения отработанного времени составит:

$$\Delta z_x = 1\cdot\Delta x_{2/0}\cdot y_{1/0} + 2\Delta x_{3/0}\cdot y_{2/0} + 3\Delta x_{4/0}\cdot y_{3/0} + 4\Delta x_{1/1}\cdot y_{4/0} + 3\Delta x_{2/1}\cdot y_{1/1} +$$
$$+ 2\Delta x_{3/1} y_{2/1} + 1\cdot\Delta x_{2/1}\cdot y_{1/1} = 1\cdot 0{,}1\cdot 8{,}0 + 2\cdot 0{,}1\cdot 8{,}2354 + 3\cdot 0{,}1\cdot 8{,}2692 + 4\cdot 0{,}1\cdot 8{,}6792 +$$
$$+ 3\cdot 0{,}1\cdot 8{,}7037 + 2\cdot 0{,}1\cdot 8{,}7273 + 1\cdot 0{,}1\cdot 8{,}2145 = 13{,}57754\textit{млрд.р.}$$

и вследствие повышения уровня производительности труда:

$$\Delta z_y = 1\cdot\Delta y_{2/0}\cdot x_{1/0} + 2\Delta y_{3/0}\cdot x_{2/0} + 3\Delta y_{4/0}\cdot x_{3/0} + 4\Delta y_{1/1}\cdot x_{4/0} + 3\Delta y_{2/1}\cdot x_{1/1} +$$
$$+ 2\Delta y_{3/1}\cdot x_{2/1} + 1\cdot\Delta y_{2/1}\cdot x_{1/1} = 1\cdot(8{,}2352 - 8{,}0)\cdot 5 + 2\cdot(8{,}2692 - 8{,}2353)\cdot 5{,}1 +$$
$$+ 3\cdot(8{,}6792 - 8{,}2692)\cdot 5{,}2 + 4\cdot(8{,}7037 - 8{,}6792)\cdot 5{,}3 + 3\cdot(8{,}7273 - 8{,}7037)\cdot 5{,}4 +$$
$$2\cdot(8{,}2145 - 8{,}7273)\cdot 5{,}5 + 1\cdot(7{,}8947 - 8{,}2145)\cdot 5{,}6 = 1{,}38832\textit{млрд.р.}$$

Как видим, двумя факторными составляющими Δz_x и Δz_y в сумме обеспечен прирост выпуска в размере 14,96586 (13,57754+1,38832) млрд р. при неразложенном остатке 0,03414 (15,0–14,96586) млрд р. При этом неразложенный остаток уменьшился с 0,1239 до 0,03414, то есть в 3,6 раза.

Следует ожидать, что с возрастанием n, например, при анализе годовой динамики с использованием исходных данных месячной периодичности неразложенный остаток практически исчезнет. В этом можно убедиться экспериментально, хотя в подобных экспериментах нет строгой необходимости. На малых отрезках приростовых значений координат отрезок траектории объема производства в факторной системе координат может рассматриваться как отрезок прямой, а линейная траектория – как равнодействующая линейного изменения двух векторов. Равнодействующая же двух линейных векторов, являясь диагональю параллелограмма, делит его площадь пополам. В сущности это означает, что на малых значениях приростов эффект совместного влияния делится между ними поровну. Это позволяет построить систему аналитических алгоритмов оценки годовых факторных приростов по принципу изолированного влияния, не прибегая к большим значениям n.

На основе изложенного, при n=4 получены следующие опытно выверенные аналитические алгоритмы оценки факторных изменений:

а) прироста (уменьшения) объема продукции в отчетном году за счет отработанного времени:

$$\Delta z_x = (x_{2/0} - x_{1/0})(\frac{y_{2/0} + y_{1/0}}{2}) + 2(x_{3/0} - x_{2/0})(\frac{y_{3/0} + y_{2/0}}{2}) + 3(x_{4/0} - x_{3/0})(\frac{y_{4/0} + y_{3/0}}{2}) +$$
$$4\cdot(x_{1/1} - x_{4/0})\cdot(\frac{y_{1/1} + y_{4/0}}{2}) + 3\cdot(x_{2/1} - x_{1/1})\cdot(\frac{y_{2/1} + y_{1/1}}{2}) + 2\cdot(x_{3/1} - x_{2/1})\cdot(\frac{y_{3/1} + y_{2/1}}{2}) +$$

$$+(x_{2/1}-x_{1/1})\cdot(\frac{y_{2/1}+y_{1/1}}{2});$$

б) прироста объема продукции в отчетном году вследствие повышения уровня производительности труда:

$$\Delta z_{y}=(y_{2/0}-y_{1/0})(\frac{x_{2/0}+x_{1/0}}{2})+2(y_{3/0}-y_{2/0})(\frac{x_{3/0}+x_{2/0}}{2})+3(y_{4/0}-y_{3/0})(\frac{x_{4/0}+x_{3/0}}{2})+$$

$$4(y_{1/1}-y_{4/0})(\frac{x_{1/1}+x_{4/0}}{2})+3\cdot(y_{2/1}-y_{1/1})(\frac{x_{2/1}+x_{1/1}}{2})+2(y_{3/1}-y_{2/1})(\frac{x_{3/1}+x_{2/1}}{2})+ \quad (13)$$

$$+(y_{2/1}-y_{1/1})(\frac{x_{2/1}+x_{1/1}}{2}).$$

Подстановка данных таблицы 1 в формулы (12) и (13) позволила получить следующие результаты оценки факторных приращений. Вследствие увеличения отработанного времени получен прирост объема выпуска в размере $\Delta z_x =$ 13,6 млрд р. Прирост объема выпуска, обусловленный повышением уровня производительности труда Δz_y, составил 1,4 млрд р. При этом убеждаемся, что общий прирост выпуска без остатка разложен по факторным составляющим, так как 13,6+1,4=15,0. В сущности, аналитические вычисления по формулам (12) и (13) не обязательны, так как округление ранее полученных оценок $\Delta z_x = 13{,}577$ и $\Delta z_y = 1{,}388$ дает тот же результат.

Аналитические вычисления удобно представить в табличной форме по образцу разработки таблицы 2.

Таблица 2–Аналитическая оценка влияния квартальных показателей отработанного времени и производительности труда на динамику годового объема выпуска

Период	Кратность пробега годовой динамики	Выпуск в сопоставимых ценах во временном периоде (*t-1*), млрд р.	Цепные темпы прирос-та трабо-танного времени, %	Цепные темпы прироста производительности труда, %	Годовые приростовые значения выпуска за счет отработанного времени *(гр.1*гр.2*гр.3/ /100)*	Годовые приростовые значения выпуска за счет производительности труда *(гр.1*гр.2*гр.4 / /100)*	Общий годовой прирост *(гр.5+гр.65)*
А	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Базисный год							
1 квартал	-	-	-	-	-	-	-
2 квартал	1	40	2,0000	2,9413	0,800000	1,17652	1,97652
3 квартал	2	42	1,9608	0,4116	1,647072	0,345744	1,992816
4 квартал	3	43	1,9231	4,9582	2,480799	6,396078	8,876877
Отчетный год							
1 квартал	4	46	1,8868	0,2823	3,471712	0,519432	3,991144
2 квартал	3	47	1,8519	0,2711	2,611179	0,382251	2,99343
3 квартал	2	48	1,8182	-5,8758	1,745472	-5,64077	-3,8953
4 квартал	1	46	1,7857	-3,8931	0,821422	-1,79083	-0,9694
Годовой прирост	-	-	-	-	**13,57766**	**1,388431**	**14,96609**

Источник: собственная разработка по данным таблицы 1.

В таблице 2 аналитические расчеты выполнены по методу изолированного индексирования, о чем свидетельствуют алгоритмы подсказок, помещенных в заголовках граф 5–7.

Траектория факторной декомпозиции годового прироста объема выпуска в системе координат квартальных показателей отработанного времени и производительности труда в соответствии с исходными данными таблицы 1 показана на рисунке 1. Она рассекает общую величину годового прироста выпуска на две составляющие. Приростовая величина, полученная за счет увеличения фонда отработанного времени, заключена между осью абсцыс и криволинейной линией траектории *abcdefgh*. Годовой прирост выпуска, детерминированный динамикой производительности труда, представлен площадью, лежащей выше отрезка линии траектории. При этом площадь многоугольника с координатами производительности труда 8,0-8,7 слева от отрезка линии траектории *abcdef* обладает положительными приростовыми значениями, а справа от отрезка траектории *fgh* – отрицательными.

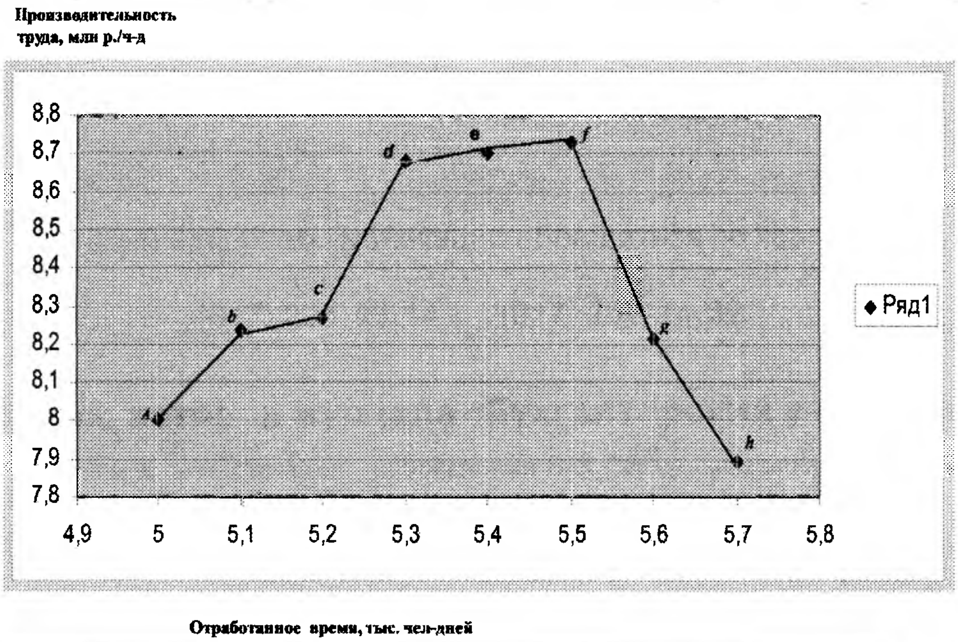

Рисунок 1- Траектория движения объема выпуска в системе координат отработанного времени и производительности труда

Заключение. Применяемый на практике индексный метод последовательно-цепного индексирования имеет два альтернативных варианта разложения общего прироста результативного показателя по составляющим факторным сомножителям. Их отличительная особенность состоит в том, что они позволяют без остатка разложить абсолютный прирост показателя-функции между факторами, однако приводит к двум альтернативным и неравнозначным вариантам оценки размеров факторных приращений. Это–во-первых.

Во-вторых, при анализе динамики годовых показателей по принципу изолированного влияния вопрос образования альтернативных значений факторных приростов не возникает, однако появляется так называемый неразложенный остаток.

В-третьих, в предлагаемой читателю статье осуществлен научный поиск аналитических возможностей полной факторной декомпозиции результативного показателя-функции на основе метода изолированного влияния. Решение сформулированной задачи найдено, базируясь на теории предельно малых приращений и криволинейного взаимодействия показателей-факторов индексных моделей. Установлено, что годовой прирост объема производства продукции без остатка разлагается по факторам а) увеличения отработанного времени и б) повышения уровня производительности труда по методу изолированного влияния на основе исходных данных показателей квартальной периодичности. При этом аналитический поиск апробирован на примере квартальных показателей за два смежных года.

Представленная в статье система аналитических расчетов ориентирована на моделирование и анализ двухфакторных мультипликативных зависимостей экономических показателей. Дальнейшее развитие метода видится в разработке специфики его применения к анализу динамики многомерных зависимостей.

Предлагаемая методология индексного моделирования и анализа, вне всякого сомнения, добавляет количества вычислительных операций. Однако в условиях автоматизированных систем управления, выполняющих миллионы операций в секунду, данная проблема по определению снимается с повестки дня. Рабочее место экономиста-исследователя, оснащенное современными информационными технологиями, создает условия больше внимания уделять качественной стороне аналитической работы. Предлагаемая методология моделирования и анализа динамики годовых показателей по исходным данным показателей меньшей периодичности направлена на успешное решение сформулированного вопроса.