***Г.О. Читая**, д-р экон. наук, доцент*
БГЭУ (Минск)

ПОСТРОЕНИЕ МАРКОВСКОЙ МАТРИЦЫ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДА ЗАЕМЩИКОВ КОММЕРЧЕСКОГО БАНКА

В активных операциях коммерческого банка (КБ) по размещению средств заметную долю занимают кредиты. Коммерческий банк, прибегая к рекомендуемой методике, потенциальных заемщиков по признаку их надежности в возврате средств соотносит к группе риска. Как правило, количество групп риска является конечным. Для банковской практики характерно ведение так называемой кредитной истории своих клиентов. Можно признать очевидным формирование статистики распределения численности заемщиков на группы риска в дискретной динамике.

Если предположить, что количество групп риска составляет k, то конечное число элементарных исходов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ будет характеризовать возможность включения (пребывания) заемщиков в одной из групп риска, а $p_1 = P\{\xi_1\}, p_2 = P\{\xi_2\}, \ldots, p_k = P\{\xi_k\}$ представляют собой вероятности соотнесения заемщиков к соответствующим группам риска. События, отражающие соотнесение заемщиков к группам риска (по крайней мере по тем клиентам, которые ранее не обращались за кредитами), независимы друг от друга. Из независимости рассматриваемых событий следует также, что если бы нас интересовал только результат, на одном каком-то шаге t (в момент времени t), то вероятность $p_i^t = P\{\xi_i^t\}$ определяется единственным образом и никак не зависит от предыстории, т.е. от того, какие результаты были получены на предыдущих этапах временной последовательности. В такой интерпретации процесс соотнесения заемщиков к группам риска можно рассматривать как марковский случайный процесс, поскольку вероятность пребывания заемщиков в группе i на временном этапе t (p_i^t) зависит от их пребывания в той или иной группе риска в предыдущий момент времени $t-1$ и не зависит от того, как процесс развивался на ранних стадиях.

Если заемщиков квалифицировать как объект, а их принадлежность к группе риска как состояние, то рассмотрение системы «объект — его состояние в заданный момент времени t» позволяет интерпретировать величину p_{ij} как вероятность того, что объект окажется в состоянии j, если он находился в состоянии i в момент времени t. Такие зависимости последовательных случайных величин являются зависимостями марковского типа, а соответствующие последовательности представляют собой цепи Маркова. Матрицы $P^t = \left\|p_{ij}^t\right\|$, $i, j = 1{,}2, \ldots, k$, $t = 1{,}2, \ldots, T$ представляют собой матрицы переходных вероятностей. Их также называют стохастическими, так как они обладают свойством: все их элементы неотрицательны, и суммы элементов любой строки равны единице [1]. Рассматривая строку таблицы, в которой присутствуют количества заемщиков, распределенные по группам риска, ее можно преобразовать в строку с долями заемщиков из каждой группы риска в общей их численности на данном этапе времени (на шаге t). Доли будут обладать теми же свойствами, что и вероятности строки матрицы P^t. В случае использования матрицы, когда p_{ij}^t постоянны во времени, т.е. не зависят от t, соответствующая марковская цепь окажется однородной.

Представление исходных данных о количественном (в абсолютных величинах) распределении заемщиков по группам риска для каждого конечного дискретного момента времени, т.е. в виде матрицы-столбца $H^t = (h_1^t, h_2^t, \ldots, h_k^t)'$ $(t = 1,2,\ldots,T)$, при построении стохастической матрицы позволяет пересчитывать ее по мере получения новых данных в динамике по H^t. Поэтому есть основания пользоваться однородными цепями Маркова, так как временной фактор в определенном смысле может быть учтен с помощью пополняемых исходных данных и их отражением в каждой новой стохастической матрице.

В зависимости от типа марковской однородной цепи, в частности, от того, обладает ли она эргодическим свойством и не является неприводимой [2], можно решить ряд прикладных задач в рамках управления рисковыми группами заемщиков КБ:

- прогноз распределения заемщиков по группам риска через заданное число тактов времени;
- расчет среднего времени и вероятности пребывания заемщиков в заданной группе риска;
- вычисление вероятности перехода заемщиков из определенной группы i в заданное множество групп риска за фиксированное число тактов времени.

Решение перечисленных задач основано на стохастической матрице переходных вероятностей p_{ij}. В учебной литературе они считаются априори заданными, и, как правило, способы их построения не рассматриваются. На практике они в большинстве случаев оцениваются статистически, например, используя соответствующие относительные частоты [3, 4]. В общем случае проблема оценки переходных вероятностей оказывается сложной [5]. Один из возможных подходов к развитию приема, предложенного в работах [3, 4], излагается ниже в виде алгоритма.

Представим матрицей H статистику о численности заемщиков КБ по группам риска за ряд лет:

$$H^t = \left\| h_i^t \right\|, \; i = 1,2,\ldots,k, \; t = 1,2,\ldots,T.$$

1. Вычисляем для данного t $(t = 1,2,\ldots,T)$ величину общей численности заемщиков

$$\sum_{i=1}^{k} h_i^t = R^t.$$

2. Для двух соседних моментов времени $(t, t+1)$ по $t = 1,2,\ldots,T-1$ вычисляем темп роста общей численности заемщиков

$$\frac{R^{t+1}}{R^t} = q^t \ (t = 1,2,\ldots,T-1).$$

3. Формируем новую матрицу $\left\|\gamma_i^t\right\|$ где $i = 1,2,\ldots,k,\ t = 1,2,\ldots,T-1$, элемент которой равен

$$\gamma_i^t = h_i^t \cdot q^t.$$

Вектор $\gamma^t = (\gamma_1^t, \gamma_2^t, \ldots, \gamma_k^t)$ задает распределение заемщиков в году (t+1) в предположении, что их структура не меняется.

4. Вычисляем для данного t ($t = 1,2,\ldots,T-1$)

$$h^{t+1} - \gamma^t = \Delta z^t,$$

$$h^{t+1} = (h_1^{t+1}, h_2^{t+1}, \ldots, h_k^{t+1}),\ \gamma^t = (\gamma_1^t, \gamma_2^t, \ldots, \gamma_k^t),\ \Delta z^t = (\Delta z_1^t, \Delta z_2^t, \ldots, \Delta z_k^t).$$

Вектор Δz^t характеризует отличие структуры заемщиков по группам в году (t, t+1).

5. Формируем из вектора Δz^t, для каждого $t = 1, 2, \ldots, T$, два вектора $\Delta\tilde{z}^t$ и $\Delta\hat{z}^t$, компоненты которых ($\Delta\tilde{z}_i^t$ и $\Delta\hat{z}_i^t$ $i = 1, 2, \ldots, k$) удовлетворяют условиям:

$$\Delta\tilde{z}_i = \begin{cases} \Delta z_i, \text{ если } \Delta z_i > 0, \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases},$$

$$\Delta\hat{z}_i = \begin{cases} -\Delta z_i, \text{ если } \Delta z_i < 0, \\ 0 - \text{в противном случае} \end{cases}.$$

6. Для каждого $t = 1, 2, \ldots, T$ нормируем вектор $\Delta\tilde{z}_i$:

$$\frac{\Delta\tilde{z}_i}{\sum_{i=1}^{k}\Delta\tilde{z}_i} = \lambda_i;\ \lambda^t = \lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_k^t$$

Величина λ_i^t выражает относительное увеличение численности i-й группы заемщиков в году (t+1) по сравнению с годом t.

7. Формирование i-й строки матрицы $\tilde{P}^t$ производится путем перемножения i-го элемента вектора $\Delta\hat{z}^t$ на вектор λ^t. Для каждого фиксированного i получим

$$\Delta\hat{z}_i^t \cdot \lambda_j^t = \tilde{p}_{ij}^t,\ \ (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Величина $\tilde{p}_{ij}$ характеризует распределение величины $\Delta\hat{z}_i$, на которую уменьшилась численность заемщиков в i-й группе риска.

8. Диагональные элементы матрицы $\tilde{P}^t$ представляют собой компоненты вектора H^t для $t = 1, 2, \ldots, T-1$.

Для вычисления средних значений вероятностей перехода необходимо рассчитать (T–1) подобных матриц для всех значений $t = 1, 2, \ldots, T-1$.

Сложив матрицы $\tilde{P}^t$ и затем проведя нормировку по каждой i-й строке, получим квадратную матрицу $P = \|p_{ij}\|$, имеющую свойства $0 \le p_{ij} \le 1$ и $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$, которая является стохастической.

Литература

1. *Айвазян, С.А.* Прикладная статистика и основы эконометрики: учеб. для вузов / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. — М.: ЮНИТИ, 1998.
2. *Кемени, Дж.* Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл. — М.: Наука, 1970.
3. *Зубрилин, Ю.В.* Моделирование динамики распределения доходов населения с помощью однородных цепей Маркова / Ю.В. Зубрилин // Экономика и мат. методы. — 1970. — Т. VI, № 5.
4. *Зайкин, В.С.* Применение простых цепей Маркова для прогнозирования расходов населения / В.С. Зайкин // Проблемы моделирования народного хозяйства: сб. науч. тр. — Новосибирск, 1973. — Ч. III.
5. *Ли, Ц.* Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным данным / Ц. Ли, Д. Джадж, А. Зельнер. — М.: Статистика, 1977.