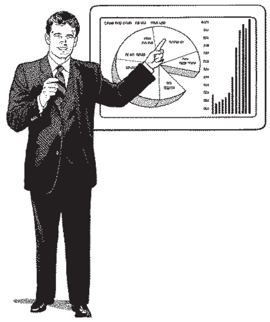

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Э. М. АКСЕНЬ

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРЯМЫХ ЗАТРАТ

В статье представлена методика моделирования коэффициентов прямых затрат с помощью аппарата стохастических дифференциальных уравнений. Предложены способы оценки параметров моделей, получения прогнозных значений указанных коэффициентов, а также использования метода Монте-Карло для нахождения вероятностных характеристик валового выпуска продукции и других показателей.

Ключевые слова: коэффициент прямых затрат; моделирование; валовой выпуск; стохастическое дифференциальное уравнение; случайный процесс.

УДК 330.44

Для прогнозирования валового выпуска продукции и других показателей при использовании моделей межотраслевого баланса [1, *371—391*] ключевую роль играют используемые значения коэффициентов прямых затрат [1, *375—376*]. Эти значения рассчитываются с помощью балансовых таблиц, значения одних и тех же коэффициентов как правило разные для разных лет и заранее точно не известны. Поэтому естественно считать, что эти коэффициенты случайны и представляют собой матричный случайный процесс. В настоящей статье представлена методика моделирования коэффициентов прямых затрат с помощью аппарата стохастических дифференциальных уравнений, предложены способы оценки параметров моделей, получения прогнозных значений указанных коэффициентов, а также использования метода Монте-Карло для нахождения вероятностных характеристик валового выпуска продукции и других показателей.

Методика моделирования. Обозначим через n общее количество отраслей рассматриваемой экономической системы, а через $a_{ij}(t)$ — коэффициент прямых затрат продукции i-й отрасли при производстве продукции j-й отрасли в момент времени t, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Коэффициенты прямых затрат обладают следующими свойствами. Во-первых, они не отрицательны. Во-вторых, суммы коэффициентов каждого столбца обычно не превосходят единицу (т. е. $\sum_{l=1}^{n} a_{ij}(t) < 1$). Объясняется это тем, что валовая добавленная стоимость как

Эрнест Маврициевич АКСЕНЬ (eaksen@mail.ru)*, доктор экономических наук, профессор кафедры математических методов в экономике Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).*

правило положительна. Некоторые коэффициенты прямых затрат $a_{ij}(t)$ всегда равны нулю, поскольку продукция первой из соответствующих двух отраслей никогда (непосредственно) не используется в производственном процессе второй отрасли. Обозначим через I_j множество номеров отраслей, продукция которых (непосредственно) используется при производстве продукции j-й отрасли, т. е. для которых $a_{ij}(t) > 0$. (Очевидно, что $I_j \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.) Количество элементов множества I_j обозначим через n_j. (Очевидно, что $n_j \leq n$.) Обозначим через $a_{\bullet j}(t)$ вектор, состоящий из коэффициентов $a_{ij}(t)$, $i \in I_j$ (т. е. из положительных элементов j-го столбца матрицы коэффициентов прямых затрат). Заметим, что вектор $a_{\bullet j}(t)$ состоит из n_j компонент, т. е. $a_{\bullet j}(t) \in R^{n_j}$. В соответствии с изложенным будем считать, что при любом $j = \overline{1, n}$ $a_{\bullet j}(t) \in \Omega_j$,

где $$\Omega_j = \left\{ x = \left(x_1, \ldots, x_{n_j}\right) \in R^{n_j} \,\middle|\, x_l > 0,\ l = \overline{1, n_j},\ \sum_{l=1}^{n_j} x_l < 1 \right\}. \tag{1}$$

Для моделирования динамики коэффициентов $a_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ мы предлагаем использовать случайные процессы $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$, принимающие любые вещественные значения и описывающиеся стохастическими дифференциальными уравнениями [2, *201—211*]. При этом случайные процессы $a_{ij}(t)$, $i \in I_j$ и $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ связываются между собой при помощи гомеоморфизмов между множествами Ω_j и R^{n_j}, $j = \overline{1, n}$ (см. ниже).

Пусть f_j — дважды непрерывно-дифференцируемый гомеоморфизм множества R^{n_j} на множество Ω_j (т. е. заданная на R^{n_j} векторная функция, множество значений которой совпадает с множеством Ω_j и для которой существует дважды непрерывно дифференцируемая обратная функция f^{-1}).

Обозначим через $z_{\cdot j}(t)$ вектор, состоящий из $z_{ij}(t)$, $i \in I_j$. В соответствии с предлагаемой в данной статье методикой мы считаем, что коэффициенты прямых затрат $a_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ связаны со случайными процессами $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ следующим образом:

$$a_{\bullet j}(t) = f_j\left[z_{\bullet j}(t)\right],\ j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $z_{\bullet j}(t) = f_j^{-1}\left[a_{\bullet j}(t)\right]$. Обозначим через g_j обратную функцию f_j^{-1}. Таким образом,

$$z_{\bullet j}(t) = g_j\left[a_{\bullet j}(t)\right],\ j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Обозначим через $k_j(i)$ при $i \in I_j$ номер i-й отрасли среди отраслей с номерами из множества I_j. (Например, если $I_2 = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, то $k_2(6) = 4$, т. е. шестая отрасль — это четвертая отрасль среди отраслей, продукция которых непосредственно используется при производстве продукции второй отрасли.) Через f_{ij} и g_{ij} обозначим $k_j(i)$-е компоненты функций f_j и g_j. Тогда векторные равенства (2) и (3) можно записать в виде следующих систем скалярных равенств:

$$a_{ij}(t) = f_{ij}\left[z_{\bullet j}(t)\right],\ j = \overline{1, n},\ i \in I_j; \tag{4}$$

$$z_{ij}(t) = g_{ij}\left[a_{\bullet j}(t)\right],\ j = \overline{1,\ n},\ i \in I_j. \qquad (5)$$

В соответствии с изложенным будем считать, что случайные процессы $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1,\ n}$, $i \in I_j$ подчиняются следующим стохастическим дифференциальным уравнениям:

$$dz_{ij}(t) = \varphi_{ij}\left[z_{ij}(t), t\right]dt + \psi_{ij}\left[z_{ij}(t),\ t\right]dW_{ij}(t), \qquad (6)$$

где $\varphi_{ij}(z_{ij},\ t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij},\ t)$ — экзогенно заданные функции (возможно с неизвестными параметрами), $W_{ij}(t)$, $j = \overline{1,\ n}$, $i \in I_j$ — коррелированные между собой стандартные винеровские процессы [2, *181—182*].

Отметим, что желательно (как мы увидим ниже), чтобы стохастические дифференциальные уравнения (6) решались аналитически.

С помощью уравнений (6) выведем стохастические дифференциальные уравнения для коэффициентов прямых затрат. Обозначим через ρ_{ij}^{rs}, $j = \overline{1,\ n}$, $i \in I_j$, $s = \overline{1,\ n}$, $r \in I_s$ — коэффициенты корреляции приращений винеровских процессов $W_{ij}(t)$ и $W_{rs}(t)$, фигурирующих в уравнениях (6) (т. е. $\rho_{ij}^{rs} = \mathrm{corr}\left[\Delta W_{ij}(t), \Delta W_{rs}(t)\right]$, где $\Delta W_{ij}(t) = W_{ij}(t+\Delta t) - W_{ij}(t)$ и $\Delta W_{rs}(t) = W_{rs}(t+\Delta t) - W_{rs}(t)$).

Используя формулу Ито [2, *196*] для скалярных процессов $a_{ij}(t)$, в силу равенств (4) и (6) получим:

$$\begin{aligned} da_{ij}(t) = \Bigg\{ & \sum_{l\in I_j} \frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{lj}}\left[z_{\bullet j}(t)\right]\varphi_{lj}\left[z_{lj}(t), t\right] + \frac{1}{2}\sum_{l\in I_j}\sum_{k\in I_j}\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_{lj}\partial z_{kj}}\left[z_{\bullet j}(t)\right]\times \\ & \times\psi_{lj}\left[z_{lj}(t), t\right]\psi_{kj}\left[z_{kj}(t), t\right]\rho_{lj}^{kj}\Bigg\}dt + \sum_{l\in I_j}\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{lj}}\left[z_{\bullet j}(t)\right]\psi_{lj}\left[z_{lj}(t), t\right]dW_{lj}(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

при любых $j = \overline{1,\ n}$ и $i \in I_j$.

Подставив формулы (3) и (5) в равенства (7), будем иметь:

$$\begin{aligned} da_{ij}(t) = \Bigg\{ & \sum_{l\in I_j}\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{lj}}\left(g_j\left[a_{\bullet j}(t)\right]\right)\varphi_{lj}\left(g_{lj}\left[a_{\bullet j}(t)\right], t\right) + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{l\in I_j}\sum_{k\in I_j}\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial z_{lj}\partial z_{kj}}\left(g_j\left[a_{\bullet j}(t)\right]\right)\psi_{lj}\left(g_{lj}\left[a_{\bullet j}(t)\right], t\right)\psi_{kj}\left(g_{kj}\left[a_{\bullet j}(t)\right], t\right)\rho_{lj}^{kj}\Bigg\}dt + \\ & + \sum_{l\in I_j}\frac{\partial f_{ij}}{\partial z_{lj}}\left(g_j\left[a_{\bullet j}(t)\right]\right)\psi_{lj}\left(g_{lj}\left[a_{\bullet j}(t)\right], t\right)dW_{lj}(t), \qquad j = \overline{1, n},\ \ i \in I_j. \end{aligned} \qquad (8)$$

При каждом отдельно взятом $j = \overline{1,\ n}$ равенства (8) представляют собой систему из n_j уравнений относительно случайных процессов $a_{ij}(t)$, $i \in I_j$.

Пример. В качестве примера, иллюстрирующего предлагаемую методику моделирования динамики коэффициентов прямых затрат, рассмотрим случай, когда функции $\varphi_{ij}(z_{ij},\ t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij},\ t)$, фигурирующие в уравнениях (6), имеют следующий вид:

$$\varphi_{ij}(z_{ij},\ t) = \alpha_{ij} - \beta_{ij}z_{ij}, \qquad \psi_{ij}(z_{ij},\ t) = \gamma_{ij}, \qquad (9)$$

где α_{ij}, β_{ij} и γ_{ij} — некоторые константы (параметры).

В таком случае уравнения (6) принимают вид:

$$dz_{ij}(t) = \left[\alpha_{ij} - \beta_{ij} z_{ij}(t)\right] dt + \gamma_{ij} dW_{ij}(t), \qquad j = \overline{1, n},\ i \in I_j. \tag{10}$$

Отметим, что в случае, когда $\beta_{ij} > 0$, отдельно взятое уравнение (10) описывает так называемый процесс Орнштейна-Уленбека [3, *34*]. При этом α_{ij}/β_{ij} — средний уровень коэффициента $a_{ij}(t)$, β_{ij} — параметр, характеризующий скорость возврата к среднему значению, γ_{ij} — параметр волатильности. Уравнение вида (10) при $\beta_{ij} > 0$ известно в финансовой экономике также как уравнение Васичека [3, *34*] и используется для описания динамики краткосрочных доходностей облигаций.

Известно [3, *34*], что уравнения (10) имеют аналитические решения следующего вида:

$$\begin{gathered} z_{ij}(t) = z_{ij}(t_0)\exp\left[-\beta_{ij}(t - t_0)\right] + \left\{1 - \exp\left[-\beta_{ij}(t - t_0)\right]\right\}\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}} + \\ + \gamma_{ij}\int_{t_0}^{t}\exp\left[-\beta_{ij}(t - \tau)\right] dW_{ij}(\tau). \end{gathered} \tag{11}$$

Примерами функций f_{ij}, с помощью которых по формуле (4) случайные процессы $z_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ преобразуются в процессы $a_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ коэффициентов прямых затрат, являются следующие функции:

$$f_{ij}(z_{\bullet j}) = \exp\left(z_{ij}\right) \Big/ \left[1 + \sum_{l \in I_j}\exp\left(z_{lj}\right)\right], \qquad j = \overline{1, n},\ i \in I_j. \tag{12}$$

Несложно показать, что в этом случае (описанные выше) функции g_{ij} имеют вид:

$$g_{ij}(a_{\bullet j}) = \ln a_{ij} - \ln\left(1 - \sum_{l \in I_j} a_{lj}\right), \qquad j = \overline{1, n},\ i \in I_j. \tag{13}$$

С использованием формул (9), (12), (13) уравнения (8) приводятся к виду

$$\begin{gathered} da_{ij}(t) = a_{ij}(t)\left[\alpha_{ij} - \beta_{ij}\left\{\ln a_{ij}(t) - \ln\left[1 - \sum_{r \in I_j} a_{rj}(t)\right]\right\} - \right. \\ - \sum_{l \in I_j} a_{lj}(t)\left(\alpha_{lj} - \beta_{lj}\left\{\ln a_{lj}(t) - \ln\left[1 - \sum_{r \in I_j} a_{rj}(t)\right]\right\}\right) + \\ \left. + \sum_{l \in I_j}\sum_{k \in I_j} a_{lj}(t) a_{kj}(t)\gamma_{lj}\gamma_{kj}\rho_{lj}^{kj} - \frac{1}{2}\sum_{l \in I_j} a_{lj}(t)\gamma_{lj}\left(\gamma_{lj} + \gamma_{ij}\rho_{ij}^{lj}\right) + \frac{1}{2}\left[1 - a_{ij}(t)\right]\gamma_{ij}^2\right] dt - \\ - a_{ij}(t)\left\{\sum_{l \in I_j} a_{lj}(t)\gamma_{lj} dW_{lj}(t) - \left[1 - a_{ij}(t)\right]\gamma_{ij} dW_{ij}(t)\right\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \in I_j. \end{gathered} \tag{14}$$

Оценка параметров. Пусть известны значения коэффициентов $a_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$. С помощью формул (5) можно рассчитать соответствующие значения $z_{ij}(t_k)$, $k = \overline{1, N}$. Например, в случае, когда в качестве функций g_{ij} выступают функции (13), значения $z_{ij}(t_k)$ находятся по формулам

$$z_{ij}(t_k) = \ln a_{ij}(t_k) - \ln\left[1 - \sum_{l \in I_j} a_{lj}(t_k)\right], \quad k = \overline{1, N},\ j = \overline{1, n},\ i \in I_j. \tag{15}$$

Затем на основе значений $z_{ij}(t_k)$, $k = \overline{1, N}$ оцениваются параметры функций $\varphi_{ij}(z_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, t)$, а также коэффициенты корреляции ρ_{ij}^{rs} приращений винеровских процессов $W_{ij}(t)$ и $W_{rs}(t)$. Опишем методику оценивания параметров подробнее.

Пусть функции $\varphi_{ij}(z_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, t)$ зависят от вектора параметров θ_{ij}, т. е.

$$\varphi_{ij}(z_{ij}, t) = \varphi_{ij}(z_{ij}, t; \theta_{ij}), \quad \psi_{ij}(z_{ij}, t) = \psi_{ij}(z_{ij}, t; \theta_{ij}), \quad j = \overline{1, n}, \; i \in I_j. \tag{16}$$

Например, в случае, когда функции $\varphi_{ij}(z_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, t)$ заданы формулами (9), вектор θ_{ij} состоит из параметров α_{ij}, β_{ij} и γ_{ij}, т. е. $\theta_{ij} = (\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ и $\gamma_{ij})$.

Параметры θ_{ij}, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ можно оценивать с помощью условного метода максимального правдоподобия [4, *304—305*]. При этом можно использовать следующие приблизительные равенства, которые имеют место в силу равенств (6) и зависимостей (16) [2, *216—218*]:

$$\Delta z_{ij}(t_k) \approx \varphi_{ij}\left[z_{ij}(t_k), t_k; \theta_{ij}\right]\Delta t_k + \psi_{ij}\left[z_{ij}(t_k), t_k; \theta_{ij}\right]\Delta W_{ij}(t_k), \tag{17}$$

где $\Delta z_{ij}(t_k) = z_{ij}(t_{k+1}) - z_{ij}(t_k)$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\Delta W_{ij}(t_k) = W_{ij}(t_{k+1}) - W_{ij}(t_k)$, $k = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$.

С учетом того что процессы $z_{ij}(t)$ марковские [2, *211*], условная функция максимального правдоподобия [4, *304—305*] для приращений $\Delta z_{ij}(t_k)$ имеет вид

$$L\left(\theta_{ij}; \Delta z_{ij}(t_1), \ldots, \Delta z_{ij}(t_{N-1})\right) = \prod_{k=1}^{N-1} p\left[\Delta z_{ij}(t_k) \mid z(t_k)\right], \tag{18}$$

где $p\left[\Delta z_{ij}(t_k) \mid z(t_k)\right]$ — условная плотность вероятности случайной величины $\Delta z_{ij}(t_k)$ при заданном значении $z(t_k)$.

Заметим, что правые части равенств (17) при заданных значениях $z_{ij}(t_k)$ представляют собой нормально распределенные случайные величины с математическими ожиданиями, равными $\varphi_{ij}\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\Delta t_k$, и стандартными отклонениями, равными $\left|\psi_{ij}\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\right|\sqrt{\Delta t_k}$. Следовательно,

$$\begin{gathered} p\left[\Delta z_{ij}(t_k) \mid z(t_k)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left|\psi_{ij}\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\right|\sqrt{\Delta t_k}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{\left\{\Delta z_{ij}(t_k) - \varphi_{ij}\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\Delta t_k\right\}^2}{2\psi_{ij}^2\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\Delta t_k}\right], \qquad k = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \in I_j. \end{gathered} \tag{19}$$

Подставив формулы (19) в равенство (18) и прологарифмировав полученное равенство, будем иметь следующие логарифмические условные функции правдоподобия:

$$\begin{gathered} \ln L\left(\theta_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{N-1}\left[-\ln\sqrt{2\pi\Delta t_k} - \ln\left(\left|\psi_{ij}\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\right|\right) - \right. \\ \left. - \frac{\left\{\Delta z_{ij}(t_k) - \varphi_{ij}\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\Delta t_k\right\}^2}{2\psi_{ij}^2\left[z_{ij}(t_k),\ t_k;\ \theta_{ij}\right]\Delta t_k}\right], \qquad j = \overline{1, n}, \quad i \in I_j. \end{gathered} \tag{20}$$

Оценки параметров θ_{ij}, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$ получаются в результате решения задач максимизации функций (20) по переменным θ_{ij}.

Выведем формулы для оценок параметров θ_{ij} в случае, когда функции $\varphi_{ij}(z_{ij}, t, \theta_{ij})$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, t, \theta_{ij})$ заданы формулами (9). В этом случае логарифмические условные функции максимального правдоподобия (20) принимают вид

$$\ln L\left(\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij}\right)=\sum_{k=1}^{N-1}\left(-\ln\sqrt{2\pi\Delta t_k}-\ln\gamma_{ij}-\frac{\left\{\Delta z_{ij}(t_k)-\left[\alpha_{ij}-\beta_{ij}z_{ij}(t_k)\right]\Delta t_k\right\}^2}{2\gamma_{ij}^2\Delta t_k}\right). \quad (21)$$

Продифференцировав функцию (21) по параметрам α_{ij}, β_{ij} и γ_{ij} и приравняв полученные выражения к нулю, будем иметь условия первого порядка для соответствующей задачи максимизации, которые после несложных алгебраических преобразований примут следующий вид:

$$\alpha_{ij}\left(t_n-t_1\right)-\beta_{ij}\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}(t_k)\Delta t_k=\sum_{k=1}^{N-1}\Delta z_{ij}(t_k); \quad (22)$$

$$\alpha_{ij}\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}(t_k)\Delta t_k-\beta_{ij}\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}^2(t_k)\Delta t_k=\sum_{k=1}^{N-1}\Delta z_{ij}(t_k)z_{ij}(t_k); \quad (23)$$

$$\gamma_{ij}^2(N-1)-\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\left\{\Delta z_{ij}(t_k)-\left[\alpha_{ij}-\beta_{ij}z_{ij}(t_k)\right]\Delta t_k\right\}^2}{\Delta t_k}=0. \quad (24)$$

Решив систему уравнений (22), (23) относительно переменных α_{ij} и β_{ij}, получим:

$$\alpha_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}(t_k)\Delta t_k\cdot\sum_{k=1}^{N-1}\Delta z_{ij}(t_k)z_{ij}(t_k)-\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}^2(t_k)\Delta t_k\cdot\sum_{k=1}^{N-1}\Delta z_{ij}(t_k)}{\left[\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}(t_k)\Delta t_k\right]^2-\left(t_n-t_1\right)\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}^2(t_k)\Delta t_k}; \quad (25)$$

$$\beta_{ij}=\frac{\left(t_n-t_1\right)\sum_{k=1}^{N-1}\Delta z_{ij}(t_k)z_{ij}(t_k)-\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}(t_k)\Delta t_k\cdot\sum_{k=1}^{N-1}\Delta z_{ij}(t_k)}{\left[\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}(t_k)\Delta t_k\right]^2-\left(t_n-t_1\right)\sum_{k=1}^{N-1}z_{ij}^2(t_k)\Delta t_k}. \quad (26)$$

Из уравнения (24) следует, что

$$\gamma_{ij}=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\left\{\Delta z_{ij}(t_k)-\left[\alpha_{ij}-\beta_{ij}z_{ij}(t_k)\right]\Delta t_k\right\}^2}{\Delta t_k}}. \quad (27)$$

Итак, в случае, когда функции $\varphi_{ij}(z_{ij}, t, \theta_{ij})$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, t, \theta_{ij})$ заданы формулами (9), оценки параметров $\theta_{ij}=(\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij})$, $j=\overline{1, n}$, $i\in I_j$ рассчитываются по формулам (25)—(27).

После нахождения оценок параметров θ_{ij} можно оценить коэффициенты корреляции ρ_{ij}^{rs} приращений винеровских процессов $W_{ij}(t)$ и $W_{rs}(t)$ следующим образом.

Из равенств (17) следует, что

$$\frac{\Delta z_{ij}(t_k) - \varphi_{ij}\left[z_{ij}(t_k), t_k; \theta_{ij}\right]\Delta t_k}{\psi_{ij}\left[z_{ij}(t_k), t_k; \theta_{ij}\right]\sqrt{\Delta t_k}} \approx \frac{\Delta W_{ij}(t_k)}{\sqrt{\Delta t_k}}. \tag{28}$$

Поскольку (как следует из определения стандартного винеровского процесса [2, *181—182*]) правые части равенств (28) при разных значениях индекса k независимы и одинаково распределены (с нулевым математическим ожиданием и единичным стандартным отклонением) и при этом $\rho_{ij}^{rs} = \mathrm{corr}\left[\Delta W_{ij}(t_k),\ \Delta W_{rs}(t_k)\right]$, в качестве оценки коэффициента ρ_{ij}^{rs} можно взять соответствующий выборочный коэффициент корреляции [5, *402*], т. е. следующее значение:

$$\hat{\rho}_{ij}^{rs} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1}\left[h_{ij}(t_k) - \bar{h}_{ij}\right]\left[h_{rs}(t_k) - \bar{h}_{rs}\right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N-1}\left[h_{ij}(t_k) - \bar{h}_{ij}\right]^2 \sum_{k=1}^{N-1}\left[h_{rs}(t_k) - \bar{h}_{rs}\right]^2}}, \tag{29}$$

где для краткости через $h_{ij}(t_k)$ обозначены левые части равенств (28), через $h_{rs}(t_k)$ — левые части этих же равенств при $i = r$ и $j = s$, а через $\bar{h}_{ij}$ и $\bar{h}_{rs}$ — соответствующие выборочные средние значения. (При этом для расчета значений $h_{ij}(t_k)$ следует использовать уже известные оценки параметров θ_{ij}.)

Получение прогнозных значений. С помощью уже найденных оценок параметров θ_{ij} и коэффициентов корреляции ρ_{ij}^{rs} можно получить прогнозные значения коэффициентов прямых затрат $a_{ij}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $i \in I_j$, используя уравнения (6) и формулы (4), (5). При этом в случае, когда известны аналитические решения уравнений (6), следует использовать соответствующие формулы, а в противном случае — численные методы решения [2, *216—218*].

В соответствии с предлагаемой методикой сперва заданные начальные значения $a_{ij}(t_0)$ коэффициентов прямых затрат преобразуются в начальные значения $z_{ij}(t_0)$ с помощью формул (5), затем рассчитываются прогнозные значения $z_{ij}(T)$ для будущего момента времени $T > t_0$ (с использованием датчика случайных чисел) и, в конечном счете, прогнозные значения $z_{ij}(T)$ преобразуются в прогнозные значения $a_{ij}(T)$ коэффициентов прямых затрат с помощью формул (4).

Рассмотрим пример, когда функции $\varphi_{ij}(z_{ij}, t)$ и $\psi_{ij}(z_{ij}, t)$ заданы формулами (9). В этом случае прогнозные значения $z_{ij}(T)$ определяются в соответствии с формулами (11), т. е.

$$\begin{aligned} z_{ij}(T) &= z_{ij}(t_0)\exp\left[-\beta_{ij}(T - t_0)\right] + \left\{1 - \exp\left[-\beta_{ij}(T - t_0)\right]\right\}\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}} + \\ &+ \gamma_{ij}\int_{t_0}^{T}\exp\left[-\beta_{ij}(T - t)\right]dW_{ij}(t), \qquad j = \overline{1, n}, \quad i \in I_j. \end{aligned} \tag{30}$$

Прежде всего отметим, что при использовании данной формулы для расчета значений $z_{ij}(T)$ следует использовать уже известные оценки коэффициентов α_{ij}, β_{ij} и γ_{ij} (формулы (25)—(27)). Интеграл $\int_{t_0}^{T}\exp\left[-\beta_{ij}(T - t)\right]dW_{ij}(t)$ в указанной формуле определяет нормально распределенную случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной обычному (т. е. не стохастическому) интегралу, в котором в качестве интегрируемой функции фигурирует квадрат подынтегральной функции данного стохастического интеграла [2, *153*]. Следовательно,

$$\mathrm{var}\left[\int_{t_0}^{T}\exp\left[-\beta_{ij}(T-t)\right]dW_{ij}(t)\right]=-\frac{1}{2\beta_{ij}}\left\{1-\exp\left[-2\beta_{ij}(T-t_0)\right]\right\} \tag{31}$$

Ковариация случайных величин $\int_{t_0}^{T}\exp\left[-\beta_{ij}(T-t)\right]dW_{ij}(t)$ и $\int_{t_0}^{T}\exp\left[-\beta_{rs}(T-t)\right]\times$ $\times\, dW_{rs}(t)$ равна обычному интегралу, в котором в качестве интегрируемой функции фигурирует произведение подынтегральных функций соответствующих стохастических интегралов и коэффициента корреляции ρ_{ij}^{rs} винеровских процессов [2, *154*]. Следовательно,

$$\begin{gathered}\mathrm{cov}\left[\int_{t_0}^{T}\exp\left[-\beta_{ij}(T-t)\right]dW_{ij}(t),\int_{t_0}^{T}\exp\left[-\beta_{rs}(T-t)\right]dW_{rs}(t)\right]=\\ =-\frac{\rho_{ij}^{rs}}{\beta_{ij}+\beta_{rs}}\left\{1-\exp\left[-\left(\beta_{ij}+\beta_{rs}\right)(T-t_0)\right]\right\}.\end{gathered} \tag{32}$$

В силу формул (30)–(32) случайные величины $z_{ij}(T)$, $j=\overline{1,\ n}$, $i\in I_j$ можно представить в следующем виде:

$$z_{ij}(T)=\mu_{ij}+\sigma_{ij}\xi_{ij}, \tag{33}$$

где

$$\mu_{ij}=z_{ij}(t_0)\exp\left[-\beta_{ij}(T-t_0)\right]+\left\{1-\exp\left[-\beta_{ij}(T-t_0)\right]\right\}\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}, \tag{34}$$

$$\sigma_{ij}=\gamma_{ij}\sqrt{\left\{1-\exp\left[-2\beta_{ij}(T-t_0)\right]\right\}\Big/\left(2\beta_{ij}\right)}, \tag{35}$$

а ξ_{ij}, $j=\overline{1,\ n}$, $i\in I_j$ – стандартные нормальные случайные величины (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией), причем коэффициенты корреляции ν_{ij}^{rs} случайных величин ξ_{ij} и ξ_{rs} равны:

$$\nu_{ij}^{rs}=-\frac{2\rho_{ij}^{rs}\sqrt{\beta_{ij}\beta_{rs}}}{\beta_{ij}+\beta_{rs}}\frac{1-\exp\left[-\left(\beta_{ij}+\beta_{rs}\right)(T-t_0)\right]}{\sqrt{\left\{1-\exp\left[-2\beta_{ij}(T-t_0)\right]\right\}\left\{1-\exp\left[-2\beta_{rs}(T-t_0)\right]\right\}}}. \tag{36}$$

Таким образом, прогнозные значения $z_{ij}(T)$, $j=\overline{1,\ n}$, $i\in I_j$ можно рассчитывать по формулам (33), предварительно найдя значения μ_{ij}, σ_{ij} и ν_{ij}^{rs} с помощью формул (34)–(36).

Для получения значений коррелированных между собой стандартных нормальных случайных величин ξ_{ij} следует использовать значения независимых стандартных нормальных случайных величин, генерируемых датчиками случайных чисел в математических пакетах. (Например, в пакете MatLab независимые между собой последовательности стандартных нормальных псевдослучайных чисел генерируются программой randn.)

Опишем алгоритм преобразования независимых стандартных нормальных случайных величин в коррелированные между собой стандартные нормальные случайные величины ξ_{ij}.

Пусть η_{ij}, $j=\overline{1,\ n}$, $i\in I_j$ – независимые стандартные нормальные случайные величины. Предположим, что случайные величины ξ_{ij} связаны со случайными величинами η_{ij} следующими равенствами:

$$\xi_{ij} = \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k\in I_l} c_{ij}^{kl}\eta_{kl} + \sum_{k\le i,\, k\in I_j} c_{ij}^{kj}\eta_{kj}, \qquad j=\overline{1,\,n},\ i\in I_j, \tag{37}$$

где c_{ij}^{kl} — некоторые (пока еще неизвестные) коэффициенты ($j=\overline{1,\,n}$, $i\in I_j$, $l\le j$, $k\in I_l$, $k\le i$ при $l=j$). (При этом условимся считать, что значения сумм с нулевым верхним пределом в равенстве (37) и в некоторых других нижеследующих равенствах равны нулю.)

Используя равенства (37) (с учетом независимости случайных величин η_{kl}), получим следующую систему уравнений для коэффициентов корреляции ν_{ij}^{rs} случайных величин ξ_{ij} и ξ_{rs} ($j=\overline{1,\,n}$, $i\in I_j$, $s=\overline{1,\,n}$, $r\in I_s$):

$$\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k\in I_l} c_{ij}^{kl}c_{rs}^{kl} + \sum_{k\le i,\, k\in I_j} c_{ij}^{kj}c_{rs}^{kj} = \nu_{ij}^{rs}, \text{ если } j<s \text{ либо } j=s \text{ и при этом } i\le r. \tag{38}$$

Несложно убедиться в том, что следующие рекуррентные формулы обеспечивают решение системы уравнений (38) относительно коэффициентов c_{ij}^{kl}:

$$c_{ij}^{ij} = \sqrt{1-\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k\in I_l}\left(c_{ij}^{kl}\right)^2 + \sum_{k<i,\, k\in I_j}\left(c_{ij}^{kj}\right)^2}; \tag{39}$$

$$c_{ij}^{rs} = \begin{cases} \left(\nu_{ij}^{rs} - \sum_{l=1}^{s-1}\sum_{k\in I_l} c_{ij}^{kl}c_{rs}^{kl} + \sum_{k<r,\, k\in I_s} c_{ij}^{ks}c_{rs}^{ks}\right)\Big/ c_{ij}^{ij}, \text{ если } c_{ij}^{ij}\ne 0,\\ 0, \text{ если } c_{ij}^{ij}=0 \end{cases} \tag{40}$$

для всех случаев, когда $i<r$, либо когда $i=r$ и при этом $j\le s$.

Таким образом, коррелированные случайные величины ξ_{ij} действительно можно получить в результате преобразования (37) с использованием коэффициентов c_{ij}^{kl}, рассчитанным по рекуррентным формулам (39), (40).

В соответствии с изложенным алгоритм получения последовательностей псевдослучайных чисел для коэффициентов прямых затрат $a_{ij}(T)$ состоит из следующих этапов:

1) генерация псевдослучайных чисел для независимых случайных величин η_{kl}, $l=\overline{1,\,n}$, $k\in I_l$ с помощью датчика случайных чисел, подчиняющихся стандартному нормальному распределению;

2) преобразование полученных на первом этапе псевдослучайных чисел в соответствии с формулой (37);

3) преобразование полученных на втором этапе псевдослучайных чисел в соответствии с формулой (33);

4) преобразование полученных на третьем этапе псевдослучайных чисел в соответствии с формулой (4).

На основе полученных таким образом последовательностей псевдослучайных чисел можно оценить вероятности попадания коэффициентов прямых затрат $a_{ij}(T)$ в любые интервалы, рассчитать выборочные характеристики для указанных коэффициентов, а также их можно использовать (в соответствии с методом Монте-Карло) [6, *101—122*] для построения эмпирических вероятностей и расчета выборочных характеристик для коэффициентов полных затрат [1, *377—378*] и вектора валового выпуска продукции при различных экзогенно заданных векторах конечного выпуска продукции.

Литература

1. Экономико-математические методы и модели / Н. И. Холод и др. ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. — Минск : БГЭУ, 1999. — 413 с.

Ekonomiko-matematicheskie metodyi i modeli [Economic-mathematical methods and models] / N. I. Holod i dr. ; pod obsch. red. A. V. Kuznetsova. — Minsk : BGEU, 1999. — 413 p.

2. *Пугачев, В. С.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация / В. С. Пугачев, И. Н. Синицын. — М. : Наука, 1990. — 642 с.

Pugachev, V. S. Stohasticheskie differentsialnyie sistemyi. Analiz i filtratsiya [Stochastic differential systems. Analysis and filtration] / V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyin. — M. : Nauka, 1990. — 642 p.

3. *Медведев, Г. А.* Математические основы финансовой экономики : в 2 ч. / Г. А. Медведев. — Минск : БГУ, 2003. — Ч. 2 : Определение рыночной стоимости ценных бумаг. — 293 с.

Medvedev, G. A. Matematicheskie osnovyi finansovoy ekonomiki [Mathematical foundations of financial economics] : v 2 ch. / G. A. Medvedev. — Minsk : BGU, 2003. — Ch. 2 : Opredelenie ryinochnoy stoimosti tsennyih bumag [Determination of securities' market value]. — 293 p.

4. *Магнус, Я. Р.* Эконометрика. Начальный курс / Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. Л. Пересецкий. — М. : Дело, 2004. — 576 с.

Magnus, Ya. R. Ekonometrika. Nachalnyiy kurs [Econometrics. Initial course] / Ya. R. Magnus, P. K. Katyishev, A. L. Peresetskiy. — M. : Delo, 2004. — 576 p.

5. *Айвазян, С. А.* Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. — М. : ЮНИТИ, 1998. — 1022 с.

Ayvazyan, S. A. Prikladnaya statistika i osnovyi ekonometriki [Applied statistics and essentials of econometrics] / S. A. Ayvazyan, V. S. Mhitaryan. — M. : YuNITI, 1998. — 1022 p.

6. Основы имитационного и статистического моделирования / Ю. С. Харин [и др.] — Минск : Дизайн ПРО, 1997. — 288 с.

Osnovyi imitatsionnogo i statisticheskogo modelirovaniya [Foundations of simulation and statistic modeling] / Yu. S. Harin [i dr.] — Minsk : Dizayn PRO, 1997. — 288 p.

ERNEST AKSEN

STOCHASTIC MODELING OF DIRECT INPUT COEFFICIENTS

Author affiliation. *Ernest AKSEN* (eaksen@mail.ru), *Belarusian State Economic University (Minsk, Belarus).*

Abstract. The paper presents techniques for the modeling of direct input coefficients with the help of stochastic differential equations. Ways are suggested to estimate model parameters, to obtain the forecast values of the coefficients concerned, as well as to use the Monte-Carlo method for finding probabilistic characteristics of the gross output and other indicators.

Keywords: direct input coefficient; modeling; gross output; stochastic differential equation; random process.

UDC 330.44

Статья поступила
в редакцию 15.03. 2017 г.