МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УО «Белорусский государственный экономический университет»

Т.И. Гавриш, Л.Н.Гайшун

Р Я Д Ы

Учебно-методическое пособие
для студентов 1-го курса
дневной и заочной форм обучения

МИНСК 2013

Литература

1) Высшая математика. Общий курс / Под ред. С. А. Самаля. Мн.: Вышэйш. шк., 2000
2) Высшая математика. Общий курс / Под ред. А. И. Яблонского. Мн.: Вышэйш. шк., 1993
3) Гусак А. А. Задачи и упражнения по высшей математике. Мн.: Вышэйш. шк., 1998. ч. 2.
4) Гайшун Л.Н., Денисенко Н.В., Марков А.В. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: в 2 ч. / Минск: БГЭУ, 2009. – Ч.2.
5) Сборник индивидуальных заданий по высшей / Под ред. А. П. Рябушко. Мн.: Вышэйш. шк., 1991. ч. 2.
6) А.И. Астровский, М.П. Дымков Высшая математика. Учебное пособие (часть 2). Минск: БГЭУ, 2011.

Часть I. Числовые ряды

§ 1. Основные понятия

Определение 1. Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n,\dots}$

Тогда формально составленная сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n,\dots} \qquad (1.1)$$

называется числовым рядом; слагаемые $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n,\dots}$ называются членами ряда; a_n – общим членом ряда.

Вообще говоря, ряд (1.1) задан, если известен его общий член $a_n = f(n)$, т.е. известно правило, по которому каждому номеру n $(n = 1,2,3, \dots)$ ставится в соответствие определённый член ряда.

Пример 1. Написать первые пять членов ряда, если общий член задан формулой:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3)\cdot 5^{n-1}}$$

Решение.

Если $n = 1,$ то $a_1 = \dfrac{(-1)^0}{(2+3)\cdot 5^0} = \dfrac{1}{5};$

если $n = 2,$ то $a_2 = \dfrac{(-1)^{2-1}}{(2*2+3)\cdot 5^{2-1}} = -\dfrac{1}{7\cdot 5};$

если $n = 3,$ то $a_3 = \dfrac{(-1)^{3-1}}{(2\cdot 3+3)\cdot 5^{3-1}} = \dfrac{1}{9\cdot 5^2};$

если $n = 4,$ то $a_4 = \dfrac{(-1)^{4-1}}{(2\cdot 4+3)\cdot 5^{4-1}} = -\dfrac{1}{11\cdot 5^3};$

если $n = 5,$ то $a_5 = \dfrac{(-1)^{5-1}}{(2\cdot 5+3)\cdot 5^{5-1}} = \dfrac{1}{13\cdot 5^4}.$

Таким образом, данный ряд можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3)\cdot 5^{n-1}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7\cdot 5} + \frac{1}{9\cdot 5^2} - \frac{1}{11\cdot 5^3} + \frac{1}{13\cdot 5^4} + \cdots$$

Пример 2. Найти формулу общего члена ряда

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \cdots$$

Решение. Очевидно, что числитель каждой дроби — число чётное, а знаменатель — степень числа 3. Тогда

$$a_n = \frac{2^n}{3^n}.$$

Определение 2. Суммы вида

$S_1 = a_1;\ S_2 = a_1 + a_2;\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \ldots$ называются частичными суммами ряда.

Определение 3. Сумма конечного числа n первых членов ряда (1.1) называется n-ой частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то его называют суммой ряда (1.1) и говорят, что ряд сходится. Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (1.1) расходится и суммы не имеет.

Пример 3. Рассмотрим ряд, составленных из членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом a $(a \neq 0)$,

$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^n - 1$ (1.3), который называется геометрическим рядом.

Решение. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}\ (a \neq 0; q \neq 1).$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-q}\,(1-q^n) = \frac{a}{1-q}.$$

Получим конечный предел, значит, ряд (1.3) сходится и его сумма равна

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

2) Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует. Таким образом, ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (1.3) примет вид $a + a + a + \cdots$. Тогда $S_n = n \cdot a$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Значит, ряд (1.3) при $q = 1$ расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (1.3) примет вид $a - a + a + \cdots$. В этом случае

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ при } n - \text{четном}, \\ a \text{ при } n - \text{нечетном}. \end{cases}$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ предела не имеет, значит ряд расходится.

Пример 4. Показать, пользуясь определением, сходимость ряда и найти его сумму:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \cdots \quad (1.4)$$

Решение. Общий член ряда $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ представим в виде

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n+1} + \frac{D}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{An^3 + 2An^2 + An + Bn^2 + 2Bn + B + Cn^3 + Cn^2 + Dn^2}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^3(A+C) + n^2(2A+B+C+D) + n(A+2B) + B}{n^2(n+1)^2}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях

$n^3 \quad A + C = 0$

$n^2 \quad 2A + B + C + D = 0$

$n \quad A + 2B = 2$

$n^0 \quad B = 1.$

Решив систему, получим $A = C = 0;\ B = 1;\ D = -1.$

Тогда $a_n = \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{1}{(n+1)^2}.$

Следовательно

$$S_n = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{1 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Очевидно, что в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$, т.е. ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 5. Показать, пользуясь определением, сходимость ряда и найти его сумму:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \cdots \ (1.5).$$

Решение. Общий член ряда

$a_n = \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ представляем в виде

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{A(2n+1) + B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{n(2A+2B)+A-B}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов для определения A и B.

$$\begin{cases} 2A+2B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$$

В результате получим $A = \frac{1}{2}$; $B = -\frac{1}{2}$.

Тогда $a_n = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

Следовательно, $S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right).$$

Очевидно, в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, т.е. ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Определение 3. Если в ряде (1.1) отбросить первые n членов, то получится ряд

$$\sum_{n=n+1}^{\infty} a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots, (1.6)$$

называемый остатком ряда (1.1) после n-го члена и он обозначается r_n.

Тогда $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$

Теорема 1. Если ряд (1.1) сходится, то сходится и его остаток (1.6), и наоборот, если сходится остаток (1.6), то и сходится ряд (1.1).

Теорема 2. Для того, чтобы ряд (1.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

Следствие. Если в ряде (1.1) отбросить конечное число начальных членов, то это не повлияет на сходимость (расходимость) ряда.

Теорема 3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то сходится также ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, где С – любое действительное число, а его сумма равна CS.

Теорема 4. Два сходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots$$

можно почленно складывать и вычитать, так что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

сходятся и их суммы равны соответственно $S_1 + S_2$; $S_1 - S_2$, где S_1 и S_2 – суммы исходных рядов.

ЗАДАЧИ

I. Написать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

1. $a_n = \frac{3n+1}{2n^2-1}$.
2. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n^2}$.
3. $a_n = \frac{3^n}{n+3}$.
4. $a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
5. $a_n = \frac{4+(-1)^n}{n^2+2}$.
6. $a_n = \cos n\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}$.

II. Написать формулу общего члена ряда:

7. $\frac{2}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 3} + \frac{4}{\ln 4} + \frac{5}{\ln 5} + \cdots$.

8. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots.$

9. $1-1+1-1+1-\cdots.$

10. $\frac{2}{1}+\frac{6}{1\cdot 2}+\frac{12}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots.$

11. $-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\cdots.$

12. $\frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}-\frac{3\cdot 6}{4\cdot 10}+\frac{4\cdot 8}{7\cdot 15}-\frac{5\cdot 10}{10\cdot 20}+\cdots.$

13. $1-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 9}-\frac{1}{4\cdot 27}+\cdots.$

14. $\frac{2}{1}+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+\cdots.$

15. $\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}-\frac{1}{8\cdot 7}+\frac{1}{10\cdot 11}-\cdots.$

III. Пользуясь непосредственно определением, исследовать сходимость ряда и найти его сумму, если ряд сходится.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-3)}.$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+5)}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}.$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$

ОТВЕТЫ

7. $a_n=\frac{n+1}{\ln(n+1)}.$

8. $a_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}.$

9. $a_n=(-1)^{n-1}.$

10. $a_n=\frac{n(n+1)}{n!}.$

11. $a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}.$

12. $a_n=\frac{(-1)^{n-1}(n+1)(2n+2)}{(3n-2)\cdot 5n}.$

13. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^{n-1}}$.

14. $a_n = \dfrac{3n-1}{n^3}$.

15. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)}$.

16. $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right); S = \dfrac{1}{3}$.

17. $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n+3}\right); S = \dfrac{11}{18}$.

18. $S_n = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+5}\right); S = \dfrac{23}{90}$.

19. $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right); S = \dfrac{1}{4}$.

20. $S_n = \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right); S = \dfrac{1}{8}$.

21. $S_n = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{4n+1}\right); S = \dfrac{1}{4}$.

§ 2. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Обратное утверждение неверно. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Следствие. (Достаточный признак расходимости ряда).

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \cdots + \frac{n+1}{2n+1} + \cdots$$

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$, значит, ряд расходится на основании следствия из необходимого признака.

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+5}$.

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n^2}{n^3+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то на основании необходимого признака сходимости (расходимости) этого ряда ничего нельзя сказать. Далее будет показано, что данный ряд расходится.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$$

Решение. Найдем предел общего члена ряда:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n = (1^\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}\cdot 5} = e^5 \neq 0$, значит ряд расходится.

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов, применяя необходимый признак сходимости:

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{5n-4}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\dfrac{1}{n^2}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{1}{2n}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\dfrac{n^2+1}{n+3}$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10-n^2}{2n-5n^2}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3n+5}{3n+1}\right)^n$.

ОТВЕТЫ

22. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{5}$.

23. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

24. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-\frac{1}{2}}$.

25. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

26. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

27. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$.

28. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{5}$.

29. Расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{4}{3}}$.

§3. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \cdots$ называется положительным, если все его члены положительны, то есть $a_n > 0$, и неотрицательным, если $a_n \geq 0$.

Интегральный признак Маклорена-Коши:

Рассмотрим положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$.

Если существует функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(x)$ задана на промежутке $[1; +\infty)$;
2) непрерывная;
3) монотонно-убывающая;
4) $a_n = f(n)$; $n = 1, \ , 3, \ldots$.

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 9.

Рассмотрим *обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)* и исследуем его на сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{\ ^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots; p \in R \quad (*)$$

Решение. Применим интегральный признак сходимости. При $p > 0$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака Маклорена-Коши.

Рассмотрим три случая:

1. При $p = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является гармоническим.

Так как $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{dx}}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty,$

т.е. несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

2. Если $0 < p < 1,$ то

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = \infty,$$

т.е. несобственный интеграл расходится. Следовательно, обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ расходится при $0 < p < 1.$

3. Если $p > 1$, то $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{b^{p-1}} - 1) = \frac{1}{p-1}$

, т.е. несобственный интеграл сходится.

Следовательно, обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ сходится при $p > 1.$

Замечание1. Интегральный признак Маклорена-Коши был высказан в геометрической форме еще в 1742г Маклореном, но остался незамеченным и вновь был открыт в 1827г Коши. В литературе этот признак часто встречается под названием просто интегральный признак.

Пример 10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ удовлетворяет условиям интегрального признака сходимости. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d\ln x}{\ln x} = \lim_{b\to\infty}\ln\ln x\,\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty}(\ln\ln b - \ln\ln 2) = \infty$$

Несобственный интеграл расходится, следовательно, и ряд расходится.

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ

Рассмотрим два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots , \tag{1.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots. \tag{1.8}$$

Если, начиная с некоторого номера $n > N, a_n \le b_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

ВТОРОЙ ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ

Если существует конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \quad (l \ne 0; l \ne \infty)$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание 2. Сходимость многих рядов может быть исследована сравнением с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ или с геометрическим рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$.

Пример 11. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 10}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\left(n^2+1\right)}} + \ldots .$$

Решение.

Сравним данный ряд с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, который сходится т. к. $p = \dfrac{3}{2} > 1$.

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \le \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, т. е. $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ следует сходимость данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

Пример 12. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1-\cos^2 na} = \frac{1}{2-\cos^2 a} + \frac{1}{3-\cos^2 2a} + \frac{1}{4-\cos^2 3a} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n+1-\cos^2 na} + \ldots$$

Решение. Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} + \ldots$.

Этот ряд является гармоническим, у которого отброшен первый член. Известно, что гармонический ряд расходится, но тогда в силу следствия из теоремы 1 и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходится. Так как в данном случае $a_n = \frac{1}{n+1-(\cos n\alpha)^2}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$ и $\frac{1}{n+1-(\cos n\alpha)^2} \geq \frac{1}{n+1}, 0 \leq (\cos n\,\alpha)^2 \leq 1$, т.е. $a_n \geq b_n$, то из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ следует расходимость данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1-(\cos na)^2}$.

Пример 13. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{5n^4-3n^2+5}$.

Решение. В числителе стоит многочлен первой степени $3n-4$, а в знаменателе многочлен четвертой степени $5n^4-3n^2+5$.

Сравниваем данный ряд с обобщенным гармоническим рядом, у которого $p = 4-1 = 3$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Этот ряд сходится, т.к. $p = 3 > 1$.

Применим второй признак сравнения.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{5n^4-3n^2+5} : \frac{1}{n^3} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^4-n^3}{5n^4-3n^2+5} = \frac{3}{5} \neq 0.$$

Следовательно, второй признак сравнения выполняется и данный ряд сходится.

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов, применяя интегральный признак Маклорена-Коши:

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{3+n^2}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\,ln^3(n+2)}$.

35. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(ln\,n)^2}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$.

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения:

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1}$.

40. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{ln\,n}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n+n}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+5^{2n}}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^3}{n^5+4}$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}sin\frac{\pi}{2^n}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n(3^n+1)}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\sqrt{n^2+1}}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,3^n}{3^n}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+n^2}$.

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n^3-1)^2}$.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n^4+3n^2+2}$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{\sqrt{n^3+2n^2+6}}$.

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$.

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}ln\frac{n+1}{n}$.

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+sin\,n}{n}$.

ОТВЕТЫ

30. Сходится. 31. Расходится. 32. Сходится. 33. Сходится. 34. Сходится. 35. Сходится. 36. Расходится. 37. Расходится. 38. Сходится. 39. Расходится. 40.Расходится (указание: $\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n}$). 41.Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$).

42. Сходится (указание: сравнить с $\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$). 43. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$). 44. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). 45. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$). 46. Расходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). 47. Расходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). 48. Сходится (указание: $\left|\sin 3^n\right| \le 1$). 49. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n}$). 50. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$). 51. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$). 52. Расходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$). 53. Сходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$). 54. Сходится (указание: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$). 55. Расходится (указание: $2+\sin n \ge 1$, сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА

Пусть для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$

Тогда, если $l < 1$, то ряд сходится;

если $l > 1$ то ряд расходится;

если $l = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается нерешенным, в этом случае следует применить другие признаки сходимости.

Пример 14. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}}$.

Решение. Применим признак Даламбера.

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}};\ a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)-1)5^{2(n+1)-1}} = \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)5^{2n-1}}{(2n+1)5^{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{(2n+1)5^2}=\frac{1}{25}<1$, следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2};\qquad a_{n+1}=\frac{(2n+\ \ )!}{\left((n+1)!\right)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+\ \ )!\,(n!)^2}{\left((n+1)!\right)^2(2n)!}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)n!n!}{(n+1)(n+1)n!n!(2n)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{(n+1)^2}=4>1,$ следовательно, данный ряд расходится по признаку Даламбера.

Пример 16. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Решение. Применим признак Даламбера.

$$a_n=\frac{n^n}{n!};\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{n^n}{n!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n n!\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$$

(использовали второй замечательный предел), значит, данный ряд расходится.

ПРИЗНАК КОШИ

Пусть для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$$

Тогда, если $l < 1$, то ряд сходится;

если $l > 1$ то ряд расходится;

если $l = 1$, то признак Коши ответа на вопрос о сходимости ряда не дает, в этом случае следует исследовать ряд с помощью других признаков сходимости.

Пример 17. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Применим признак Коши.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, ряд сходится.

Пример 18. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}$.

Решение. Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-3}{n+2}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{\left(\frac{n+2}{-3}\right)\left(\frac{-3}{n+2}\right)(n-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n+3}{n+2}} =$$

$= e^{-3} = \frac{1}{e^3} < 1$ (применили второй замечательный предел), следовательно, ряд сходится.

<u>ЗАДАЧИ</u>

Исследовать сходимость рядов, применяя признак Даламбера:

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n(2n-1)}$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{5^n}$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n^7}$.

60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$.

62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{3^n}$.

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$.

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

65. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{4^{n+1}}$. 66. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}3^n}$. 67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

ОТВЕТЫ

56. Сходится $\left(l=\frac{1}{3}\right)$. 57. Сходится $\left(l=\frac{1}{5}\right)$. 58. Сходится $(l=0)$.

59. Расходится $(l=7)$. 60. Сходится $\left(l=\frac{e}{3}\right)$. 61. Расходится $\left(l=\frac{e}{2}\right)$.

62. Сходится $\left(l=\frac{1}{3}\right)$. 63. Сходится $(l=0)$. 64. Сходится $\left(l=\frac{1}{4}\right)$.

65. Сходится $\left(l=\frac{1}{4}\right)$. 66. Сходится $\left(l=\frac{1}{3}\right)$. 67. Сходится $\left(l=\frac{1}{e}\right)$.

ЗАДАЧИ

Исследовать сходимость рядов, применяя признак Коши:

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

69. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^{3n+4}$.

70. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+\sqrt{n}+5}\right)^{n}$.

71. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

72. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{1}{n}$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}}$.

75. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{2}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$.

76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$

ОТВЕТЫ

68. Сходится $\left(l=\frac{1}{3e}\right)$. 69. Сходится $\left(l=\frac{1}{8}\right)$. 70. Расходится $(l=3)$. 71. Расходится $(l=e)$. 72. Сходится $\left(l=\frac{e}{5}\right)$. 73. Сходится $(l=0)$.

74. Расходится $(l=5e^2)$. 75. Расходится $\left(l=\frac{7}{2}\right)$. 76. Сходится $(l=0)$.

§4. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Признак Лейбница.

Определение 4. Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным.

Определение 5. Знакочередующимся называется ряд, в котором любые два соседних члена имеют разные знаки.

Таким образом, знакочередующийся ряд – это ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots (-1)^{n+1} a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad \text{где } a_n > 0;$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$

Замечание 1. Знакочередующиеся ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, называются рядами Лейбница.

Теорема Коши. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

Замечание2. Теорема Коши является только достаточным признаком сходимости знакопеременного ряда, но не необходимым: существуют такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Определение 6. Знакопеременный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд из абсолютных величин расходится, то знакопеременный ряд называется ***условно сходящимся***.

Для знакочередующихся рядов применяется признак Лейбница.

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА

Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ монотонно убывают по абсолютной величине, т.е. $a_1 > a_2 > a_3 >$ ... $> a_n > a_n + 1 >$ .... и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится и его сумма меньше первого члена, т.е. S<a_1, а остаток ряда удовлетворяет неравенству $|r_n| < a_{n+1}$.

Пример 20. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Решение. Данный ряд знакочередующийся, т.е.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}-1} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2\sqrt{3}-1} - \ldots.$$

Составим ряд их абсолютных величин членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Так как $2\sqrt{n} - 1 < 2\sqrt{n}$, то $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ для всех n. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ расходится, так как расходится ряд $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p = \frac{1}{2} < 1$).

Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$, составленный из абсолютных величин расходится по первому признаку сравнения.

Применим признак Лейбница для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$.

Условия признака Лейбница выполняются, т.к.

1) $a_n > a_{n+1}$, т.е. $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}-1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1} = 0.$

Следовательно, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ сходится по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин, расходится, поэтому данный ряд сходится условно.

Пример 21. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$.

Решение. Исследуемый ряд является знакочередующимся. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^n\cdot 3\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ по признаку Даламбера сходится, значит, исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Пример 22 . Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+1}{5n^2+2}$.

Решение. Исследуемый ряд является знакочередующимся. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5n^2+2}$.

Применим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{5n^2+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Следовательно, ряд из абсолютных величин расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости.

Замечание 3. Для сходимости знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ недостаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Условия $a_{n+1} < a_n$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ означают, что знакочередующийся ряд сходится, если абсолютная величина общего члена стремится к нулю монотонно.

Замечание 4. Признак Лейбница – это только достаточный признак, он не является необходимым, т.е. у сходящегося знакочередующегося ряда абсолютная величина его общего члена может стремиться к нулю при $n \to 0$ и не монотонно.

Пример 23. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} - \cdots + \frac{1}{(2n-1)^4} - \frac{1}{(2n)^3} + \cdots$$

Решение. Общий член данного ряда $a_n = \frac{1}{(2n)^3}$ стремится к 0 при $n \to \infty$, хотя и не монотонно, т.е. не выполнено условие $a_n > a_{n+1}$, т.е.

$$1 > \frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^4}; \quad \frac{1}{3^4} < \frac{1}{4^3}; \ldots$$

Однако данный ряд сходится абсолютно, так как сходится ряд

$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} + \ldots$, составленный из абсолютных величин данного ряда, и, каждый член которого не превосходит соответствующего члена сходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(p = 3 > 1\right)$.

§5. Приближенное вычисление с помощью рядов.

Пример 24. Найти приближенно сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(2n+1)!}$ с точностью до 0,001.

Решение. Запишем ряд в развернутом виде: $\frac{1}{1\cdot 3!} - \frac{1}{2\cdot 5!} + \frac{1}{3\cdot 7!} - \frac{1}{4\cdot 9!} + \cdots$

Данный ряд является знакочередующимся, который удовлетворяет признаку Лейбница, т.е. $a_n > a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(2n+1)!} = 0,$ следовательно, ряд сходится.

Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0, 001, т.е. надо определить число n, равное количеству первых n членов ряда, которые надо оставить, чтобы заменить сумму ряда S его частичной суммой S_n, а остальные члены отбросить, оценив сумму отброшенных членов r_n.

По условию $|r_n| < 0{,}001$.

$$a_1 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = 0{,}167.$$

$$a_2 = \frac{1}{2\cdot 5!} = \frac{1}{240} = 0{,}00417.$$

$$a_3 = \frac{1}{3\cdot 7!} = \frac{1}{15120} = 0{,}00006 < 0{,}001.$$

Для получения приближенного значения суммы ряда с точностью

до 0,001 надо взять сумму первых 2-х членов ряда, т.к. $r_2 < a_3 < 0{,}001$.

Следовательно, $S = a_1 - a_2 = 0{,}167 - 0{,}00417 \approx 0{,}163$.

Пример 25. Найти приближенно сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$ с точностью

до 0,01.

Решение. Запишем ряд в развернутом виде
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n} + \cdots$$

Данный ряд является знакочередующимся, удовлетворяющим условиям признака Лейбница, т.е. $\frac{1}{1\cdot 2} > \frac{1}{2\cdot 2^2} > \frac{1}{3\cdot 2^3} > \cdots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} = 0$.

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Лейбница. Но этот ряд сходится абсолютно, т.к. ряд, составленный из абсолютных величин, сходится по признаку Даламбера, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1.$

Чтобы вычислить сумму ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0,01, т.е. $\frac{1}{n\cdot 2^n} < 0{,}01$, $n \cdot 2^n > 100$. Следовательно, нужно взять сумму первых четырех членов ряда, т.к. $a_5 = \frac{1}{5\cdot 2^5} = \frac{1}{160} = 0{,}00625 < 0{,}01$, то оценка для остатка будет $r_n < 0{,}01$ и $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \approx 0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0417 - 0{,}0156 \approx 0{,}40$.

Пример 26. Исследовать сходимость ряда и найти сумму ряда с точностью до 0,01:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3} + \cdots .$$

Решение. Это знакочередующийся ряд, который удовлетворяет признаку Лейбница, т.е. $a_n > a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)^3} = 0$. Следовательно, ряд сходится. Но этот ряд сходится абсолютно, т.к. ряд, составленный из абсолютных величин, сходится по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (обобщенный гармонический ряд, где p=3>1). Для того, чтобы найти с точностью до 0,01 сумму данного ряда, надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,01. Тогда весь остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет также меньше 0,01. Для данного ряда модуль четвертого члена $|a_4| = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} < 0{,}01.$

Следовательно, для решения данной задачи, согласно признаку Лейбница, надо взять сумму первых трех членов, что обеспечит заданную точность.

Тогда $S = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{57}{64} = 0{,}89.$

<u>ЗАДАЧИ</u>

Исследовать сходимость рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^3}$.

78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{7^n \sqrt{n}}$.

79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2^n}$.

80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3^n+1)}{n\cdot 3^n}$.

81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{e^{n+1}}$.

82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{5n+1}$.

83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+2}}$.

84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)^3}{3^{n-1}}$.

86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{n!\cdot 4^n}$.

87. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}$.

<u>ОТВЕТЫ</u>

77. Расходится.

78. Сходится абсолютно.

79. Сходится абсолютно.

80. Сходится условно.

81. Сходится абсолютно.

82. Расходится.

83. Сходится условно.

84. Сходится абсолютно.

85. Сходится абсолютно.

86. Расходится.

87. Сходится условно.

88. Сходится абсолютно.

<u>ЗАДАЧИ</u>

Вычислить сумму ряда с заданной точностью.

89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+1}$; ε = 0,01.

90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^3+3}$; ε=0,01.

91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n^2}$; ε = 0,001.

92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n}$; ε = 0,001.

93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$; ε = 0,001.

94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4n}{3n^3+5}$; ε=0,01.

ОТВЕТЫ

89. 0,74.	90. 0,17.	91. 0,449.
92. 0,287.	93. 0,632.	94. 0,32.

§6. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + a_n\left(x-x_0\right)^n + \ldots \text{ (1.9)},$$

членами которого являются степенные функции. Числа a_n (n = 0, 1, 2, ...) называются коэффициентами степенного ряда.

Общий член степенного ряда будем обозначать $U_n(x) = a_n(x - x_0)^n$.

При $x_0 = 0$ степенной ряд (1.9) примет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ (2.0).

Ряд (1.9) называют степенным рядом по степеням $(x - x_0)$, а ряд (2.0) – степенным рядом по степеням x.

Область сходимости степенного ряда устанавливается следующей теоремой.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_0 (x_0 \neq 0)$, то он сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.

Если же ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Область сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля утверждает, что если степенной ряд сходится при $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом x из интервала $(-|x_0|, |x_0|)$. Если же ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится во всех точках, расположенных вне интервала $(-|x_1|, |x_1|)$.

Определение. Радиусом сходимости степенного ряда (2.0) называется неотрицательное число R, такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится. Интервалом сходимости ряда (2.0) называется интервал $(-R, R)$ (рис. 1), а для ряда (1.9) – интервал сходимости $(-R + x_0, x_0 + R)$ (рис. 2).

Радиус сходимости можно найти, используя признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |\,x\,| \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, отсюда следует

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Следовательно, радиус сходимости определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Если к ряду (2.0) применить признак Коши, то получим следующую формулу для нахождения радиуса сходимости

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если $R = 0$, то ряд (1.9) сходится только в одной точке $x = x_0$, а ряд (2.0) сходится только в одной точке $x = 0$.

Если $R = \infty$, то ряды (1.9) и (2.0) сходятся на всей числовой оси.

Таким образом, всякий степенной ряд имеет свой радиус сходимости R и интервал сходимости $(-R, R)$. При $x = \pm R$ ряд может либо сходиться, либо расходиться. Этот вопрос решается для каждого конкретного ряда индивидуально.

Следовательно, областью сходимости степенного ряда (2.0) является интервал сходимости $(-R, R)$ с возможно присоединенной к нему одной или двумя точками в зависимости от того, как ведет себя ряд на концах интервала, т.е. при $x = R$ и $x = -R$.

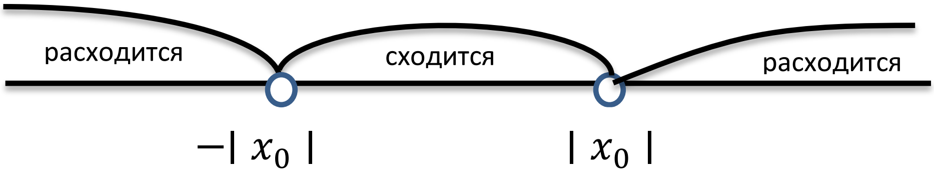

рис. 1

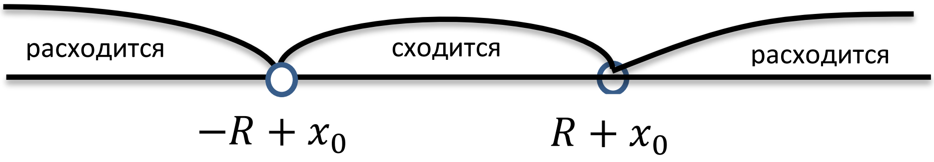

рис. 2

Пример 27. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$a_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$.

$$\text{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,2^{n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!\,2^n 2^2}{2^n\cdot 2n!(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится только при $x - 3 = 0$, т.е. в одной точке $x = 3$.

Пример 28. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n+2}}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$a_n = \frac{3^n}{\sqrt[3]{n+2}}$; $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}}$.

$$\text{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n+2}\,3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n+2}\cdot 3\cdot 3^n}\right| = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n+2}}\right| = \frac{1}{3}.$$

R $= \frac{1}{3}$. Интервал сходимости ряда $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$. Итак, при $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ – ряд расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала,

т.е. при $x = -\frac{1}{3}$ и $x = \frac{1}{3}$.

1) При $x = -\frac{1}{3}$ получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt[3]{n+2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}}{\sqrt[3]{n+2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$.

Это знакочередующийся ряд. Запишем его в развернутом виде

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \cdots$$

Применим признак Лейбница

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \cdots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} = 0.$

Признак Лейбница выполняется, следовательно, ряд сходится. Проверим, как ведет себя ряд из абсолютных величин $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$.

Это обобщенный гармонический ряд, где $p = \frac{1}{3} < 1$, который расходится.

По признаку сравнения ряд, составленный из абсолютных величин, расходится, а знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, следовательно, знакочередующийся ряд сходится условно.

2) При $x = \frac{1}{3}$ получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cdot\frac{1}{3^n}}{\sqrt[3]{n+2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$.

Этот ряд расходится по признаку сравнения с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Следовательно, областью сходимости степенного ряда является полуинтервал $[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3})$.

Пример 29. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{5^n(n+2)}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$a_n = \frac{1}{5^n(n+2)}$; $\quad a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}(n+3)}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}(n+3)}{5^n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \cdot 5(n+3)}{5^n(n+2)} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+2} = 5.$$

Ряд сходится, если $|x-2| < 5$;

$$-5 + 2 < x < 5 + 2;$$

$$-3 < x < 7.$$

Итак, интервал сходимости степенного ряда (−3;7).

При $x \in (-3;7)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin (-3;7)$ – расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

1) При $x = -3$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3-2)^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,5^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^{n+1}}{(n+2)}.$$

Это знакочередующийся ряд. Составим ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(n+2)}$. Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

По признаку сравнения рядов в предельной форме имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n+2} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot n}{n+2} = 5 \neq 0.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+2}$ также расходится.

Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница:

1) $a_n > a_{n+1}$, т.е. $\frac{5}{n+2} > \frac{5}{n+3}$;

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+2} = 0$.

Итак, для знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\cdot 5$ выполнены оба условия признака Лейбница, значит, данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин расходится, а знакочередующийся ряд сходится, следовательно, данный знакочередующийся ряд сходится условно.

2) При $x = 7$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7-2)^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{5^n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(n+2)}.$$

Данный ряд расходится по признаку сравнения с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (см. выше).

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является полуинтервал $[-3; 7)$.

Пример 30. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{3^n+4^n}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$a_n = \frac{5^n}{3^n+4^n}$; $a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1}+4^{n+1}}$.

$$\mathrm{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^n(3^{n+1}+4^{n+1})}{5^{n+1}(3^n+4^n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)}{5\cdot 4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right)}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)}{5\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right)}\right| = \frac{4}{5}.$$

Ряд сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{4}{5}$; т.е.

$$-\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}.$$

Итак, интервал сходимости степенного ряда $\left(-\frac{4}{5};\ \frac{4}{5}\right)$.

При $x \in \left(-\frac{4}{5};\ \frac{4}{5}\right)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin (-\frac{4}{5};\ \frac{4}{5})$ – расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

1) При $x = -\frac{4}{5}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\left(-\frac{4}{5}\right)^n}{3^n+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{4^n}{5^n}}{3^n+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{3^n+4^n}$.

Это знакочередующийся ряд. Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n+4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n((\frac{3}{4})^n+1)} = 1 \neq 0.$$

Условие признака Лейбница не выполняется, следовательно, знакочередующийся ряд расходится.

2) При $x = \frac{4}{5}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\left(\frac{4}{5}\right)^n}{3^n+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \frac{4^n}{5^n}}{3^n+4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+4^n}$.

Применим необходимый признак сходимости $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{3^n+4^n} =$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{4^n((\frac{3}{4})^n+1)} = 1 \neq 0.$

Следовательно, данный ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $(-\frac{4}{5};\ \frac{4}{5})$.

Пример 31. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{x^n}{2^n}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле

$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, где $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$, тогда $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}}} =$

$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e}.$

Интервал сходимости ряда $\left(-\frac{2}{e};\ \frac{2}{e}\right)$.

Итак, при x $\in \left(-\frac{2}{e};\ \frac{2}{e}\right)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin \left(-\frac{2}{e};\ \frac{2}{e}\right)$ – расходится.

Пример 32. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n^3 3^n}$.

Решение. Найдем радиус сходимости ряда по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$$a_n = \frac{1}{n^3 3^n};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3 3^{n+1}}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^3 3^{n+1}}{n^3 3^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \frac{3^n \cdot 3}{3^n}\right| = 3.$$

Получим $R = 3$. Найдем интервал сходимости степенного ряда

$$(x-5)^2 < 3; \qquad |x-5| < \sqrt{3}.$$

Интервал сходимости ряда

$-\sqrt{3} + 5 < x < \sqrt{3} + 5,$ т.е. $x \in \left(-\sqrt{3} + +5; \sqrt{3} + 5\right)$.

Итак, при $x \in \left(-\sqrt{3} + 5; \sqrt{3} + 5\right)$ ряд сходится абсолютно, а при $x \notin \left(-\sqrt{3} + 5; \sqrt{3} + 5\right)$ – расходится.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала, т.е. при x = $-\sqrt{3} + 5$; x = $\sqrt{3} + 5$.

1) При $x = -\sqrt{3} + 5$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\sqrt{3}+5-5\right)^{2n}}{n^3 3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Этот ряд сходится, т.к. это обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле), где $p = 3 > 1$.

2) При $x = \sqrt{3} + 5$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{3}+5-5\right)^{2n}}{n^3 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Этот ряд сходится (показано выше).

Следовательно, областью сходимости степенного ряда является закрытый промежуток $\left[-\sqrt{3}+5; \sqrt{3}+5\right]$.

ЗАДАЧИ

Найти область сходимости степенных рядов:

95. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n!}$.

96. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

97. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$.

98. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$.

99. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^{n+1} \cdot n \ln^3 n}$.

100. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 3^{n-1}}$.

101. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}$.

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{5^n}$.

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt{n} x^n}{4^n}$.

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{3n+4}$.

105. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{\sqrt{n}}$.

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(x+7)^n}{3^{n-1}}$.

107. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n (x+1)^n$.

108. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n}$.

109. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n x^n}{\sqrt{n+2}}$.

ОТВЕТЫ

95. $(-\infty; \infty)$.

96. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

97. $(0; 6)$.

98. $(-e; e)$.

(указание $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-\sqrt{n}} \sqrt{2\pi n}} = 1$).

99. $[-8; -2]$.

100. $[-5; 1)$.

101. $[-1; 1]$.

102. $\left(-\frac{5}{e}; \frac{5}{e}\right)$.

103. $\left(-\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

104. $(-4; -2)$.

105. $[-\frac{1}{5}; \frac{1}{5})$.

106. x = -7.

107. (–2; 0).

108. [–2; 0).

109. $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

§7. Ряды Тейлора и Маклорена

Если функция $f(x)$ является суммой степенного ряда на некотором промежутке, то говорят, что она разлагается в степенной ряд на этом промежутке, или степенной ряд сходится к функции $f(x)$ на указанном промежутке.

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x = x_0$ производные до (n+1)-го порядка включительно, тогда справедлива формула Тейлора: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$ $+r_n(x)$, (2.1)

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ – остаточный член формулы Тейлора (или остаток ряда), $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$, т.е. с заключено между x_0 и x.

Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \qquad (2.1)$$

называется **рядом Тейлора** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Если $x_0 = 0$, то получим ряд (2.2), который называется **рядом Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + f(x) = \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n . \quad (2.2)$$

Теорема 1. Для того, чтобы ряд Тейлора (2.1) сходился к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаток ряда стремился к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Теорема 2. (Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора).

Если производные любого порядка $n = 0, 1, 2, ...$ функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом М > 0, т.е. $|f^n(x)| \leq$ М, то ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ для любого x из этой окрестности.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

Пример 31. Разложить в ряд Тейлора функцию $y = \frac{1}{x}$ по степеням $(x - 2)$ и найти интервал сходимости полученного ряда.

Решение. Запишем ряд Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$, где $x_0 = 2$.

Применим формулу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Вычислим значения функции и ее производных в точке x = 2.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(2) = \frac{1}{2}.$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(2) = -\frac{1}{2^2}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f''(2) = \frac{2}{2^3} = \frac{2!}{2^3}.$$

. . . .

$$f^n(x) = -\frac{n!}{x^{n+1}}, \qquad f^n(2) = -\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Составляем ряд:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \frac{2!(x-2)^2}{2!2^3} - \frac{3!(x-2)^3}{3!2^4} + \cdots - \frac{n!(x-2)^n}{n!2^{n+1}} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$$

Найдём радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{2^{n+1}}$:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}\right|=2.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-2|<2,\qquad -2<x-2<2;$

$0<x<4$. Ряд сходится в интервале (0;4).

Разложение функций в ряд Маклорена

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots,\qquad -\infty<x<+\infty$ (2.3)

2) $sinx=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,\qquad -\infty<x<+\infty$ (2.4)

3) $cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\qquad -\infty<x<+\infty$ (2.5)

4) $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots+$
$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ -1<x<1$ (2.6)

5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\cdots,\qquad -1<x\le 1$ (2.7)

6) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right),\qquad -1<x<1$ (2.8)

7) $arcsinx=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$
$-1<x<1$ (2.9)

8) $arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)}+\cdots,\qquad -1<x\le 1$ (3.0)

9) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\qquad -1<x<1$ (3.1)

10) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\qquad -1<x<1$ (3.2)

Пример 33. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию $f(x)=\ln(x+2)$.

Решение. Найдём производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x=1$.

$f(x)=\ln(x+2),\qquad f(1)=\ln 3;$

$f'(x)=\frac{1}{(x+2)}=(x+2)^{-1},\qquad f'(1)=\frac{1}{3};$

$f''(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}=-(x+2)^{-2},\qquad f''(1)=-\frac{1}{3^2};$

$f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3} = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (x+2)^{-3},$ $\qquad f'''(1) = \frac{2!}{3^3};$

. . . .

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (x+2)^{-n},$ $\qquad f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{3^n}.$

Следовательно, искомый ряд Тейлора функции $f(x) = \ln(x+2)$ имеет вид:

$$\ln(x+2) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3^2}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{3^3}\frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^2}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots.$$

Пример 34. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ функцию $f(x) = x^3 - 2x$.

Решение. Найдём производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x = 2$.

$f(x) = x^3 - 2x,$ $\qquad f(2) = 4;$
$f'(x) = 3x^2 - 2,$ $\qquad f'(2) = 10;$
$f''(x) = 6x,$ $\qquad f''(2) = 12;$
$f'''(x) = 6.$

Подставляя эти значения в ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots,$$

получим ряд Тейлора данной функции:

$$x^3 - 2x = 4 + 10(x-2) + \frac{12}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3 =$$

$$= 4 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

Пример 35. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1).

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \cdots$$

$$f(x) = \frac{2}{3-x} = \frac{2}{3(1-\frac{x}{3})} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}}.$$

Заменим x на $\frac{x}{3}$ в формуле (3.1), тогда получим:

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\cdots\right); \text{ или}$$

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3^3}+\cdots++\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\mathrm{n}}}{3^{\mathrm{n}}}+\cdots,$$

где $-1<\frac{x}{3}<1$, т.е. $-3<x<3$.

Пример 36. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=sin^2x$.

Решение. Найдём производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x=0$.

$f(x)=sin^2x$, $\qquad f(0)=0;$

$f'(x)=2sinxcosx=sin2x$, $\qquad f'(0)=0;$

$f''(x)=2cos2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$, $\qquad f''(0)=2;$

$f'''(x)=-2^2sin2x=2^2\sin(2x+2\cdot\frac{\pi}{2})$, $\qquad f'''(0)=0;$

$f^{IV}(x)=-2^3cos2x=2^3\sin(2x+3\cdot\frac{\pi}{2})$, $\qquad f^{IV}(0)=-2^3;$

. . . . $\qquad$ . . .

$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$, $\qquad f^{(n)}(0)=0;$

$f^{(n+1)}(x)=2^n\sin\left[2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right];$

Находим остаточный член:

$R_n=\frac{2^n\sin(2c+\frac{\pi n}{2})}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$, где $c=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1$, т.е.

$R_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\sin(2c+\frac{\pi n}{2})$. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}=0$ при любом x, а $\sin(2c+\frac{\pi n}{2})$ – величина ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$. Следовательно, функцию $f(x)=sin^2x$ можно представить в виде суммы ряда Маклорена:

$$sin^2x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\cdots.$$

Задачу можно решить иначе. В равенстве $sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ заменим $cos2x$ его разложением в степенной ряд:

$$cos2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots.$$

$$sin^2x = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right) = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \frac{2^7x^8}{8!} + \cdots.$$

ЗАДАЧИ

Разложить в ряд Маклорена следующие функции:

110. $f(x) = \frac{1}{x+8}$

111. $f(x) = \frac{1}{3-2x}$

112. $f(x) = 3^x$

113. $f(x) = cos^2x$

114. $f(x) = \frac{1}{4+3x}$

115. $f(x) = \frac{sin5x}{x}$

116. $f(x) = x^2cos\sqrt{x}$

117. $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$

ОТВЕТЫ

110. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3(n+1)}}x^n, \quad (-8 < x < 8).$

111. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^{n+1}}, \quad (-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}).$

112. $1 + \frac{ln3}{1!}x + \frac{ln^2 3}{2!}x^2 + \frac{ln^3 3}{3!}x^3 + \cdots + \frac{ln^n 3}{n!}x^n + \cdots, \quad (-\infty < x < +\infty).$

113. $1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3x^4}{4!} - \frac{2^5x^6}{6!} + \frac{2^7x^8}{8!} \ldots, \ (-\infty < x < +\infty).$

114. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{4^{n+1}}x^n, \qquad \left(-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}\right).$

115. $5 - \frac{5^3x^2}{3!} + \frac{5^5x^4}{5!} - \frac{5^7x^6}{7!} \ldots, \qquad (-\infty < x < +\infty).$

116. $x^2 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \frac{x^6}{8!} - \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty).$

117. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^3 3!} + \frac{x^5}{2^4 4!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty).$

ЗАДАЧИ

Разложить в ряд Тейлора следующие функции:

118. $f(x) = \frac{1}{x+5}$ по степеням $x-2$.

119. $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням $x-3$.

120 . $f(x) = cosx$ по степеням $x - \frac{\pi}{4}$.

121. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ по степеням $x-2$.

122. $f(x) = 2^x$ по степеням $x-3$.

123. $f(x) = e^{3x}$ по степеням $x-1$.

124. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 2$ по степеням $x-1$.

ОТВЕТЫ

118. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{7^{n+1}} x^n, \quad (-5 < x < 9).$

119. $1 + \frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{4} \cdot \frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{3}{8} \cdot \frac{(x-3)^3}{3!} - \frac{5}{16} \cdot \frac{(x-3)^4}{4!} + \cdots =$

$$= 1 + \frac{x-3}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)}{2^n n!}(x-3)^n, \qquad 2 \le x \le 4 .$$

120. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!} - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^5}{5!} - \cdots\right].$

121. $1 - (x-2) + (x-2) - (x-2)^2 + \cdots, \quad |x-2| < 1.$

122. $2^3\left[1 + ln2(x-3) + \frac{ln^2 2}{2!}(x-3)^2 + \frac{ln^3 2}{3!}(x-3)^3 + \cdots\right], \quad -\infty < x-3 < +\infty.$

123. $e^3\left[1 + 3(x-1) + \frac{3^2(x-1)^2}{2!} + \frac{3^3(x-1)^3}{3!} + \cdots\right].$

124. $4 + 5(x-1) + \frac{6(x-1)^3}{3!} = 4 + 5(x-1) + (x-1)^3.$

§8. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Представление элементарных функций в виде степенных рядов позволяет применять эти ряды для приближенных вычислений. С заданной степенью точности можно вычислить значения тригонометрических функций, логарифмов, корней, определенных интегралов, которые не могут быть вычислены с помощью формулы Ньютона-Лейбница, а также можно интегрировать дифференциальные уравнения.

Пример 37. Вычислить sin12°, взяв два члена разложения функции в ряд. Оценить погрешность.

Решение. Переведем 12° в радианы:

$$\frac{\pi}{180}\cdot 12=\frac{\pi}{15}=\frac{3{,}14}{15}=0{,}2093.$$

Используем разложение синуса в степенной ряд Маклорена

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

который сходится на интервале (-∞; ∞).

Получим

$$\sin 12°=\frac{\pi}{15}-\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!}+\ldots .$$

Действительно, если взять в этом равенстве два первых члена, то будем иметь приближенное равенство

$$sin\frac{\pi}{15}\approx 0.2093-\frac{(0.2093)^3}{6}=0.20787\,,$$

погрешность которого равна сумме отброшенного знакочередующегося ряда

$$\Delta=\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^7}{7!}+\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^9}{9!}-\cdots$$

Согласно признаку Лейбница погрешность не превзойдет по абсолютной величине абсолютного значения первого отброшенного члена ряда, т.е. a_3, в нашем случае

$$|\,r_n\,|<a_3=\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{5!}=\frac{(0.2093)^5}{5!}=0.000003<0.0001\,.$$

Поэтому мы допускаем ошибку меньше 0,0001.

Итак, $\sin 12° \approx 0{,}20787$.

В случае знакопостоянного ряда оценка погрешности сложнее. Во многих случаях можно использовать прием, когда ряд из отброшенных членов сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Пример 38. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2}dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд.

Решение. Применить формулу Ньютона-Лейбница для вычисления интеграла не предоставляется возможным, так как соответствующий интеграл $\int \frac{sinx^2}{x^2}dx$ не выражается через элементарные функции. Тем не менее с помощью степенных рядов его можно вычислить с любой степенью точности.

Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, для этого воспользуемся разложением функции $sinx$ в ряд Маклорена:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots .$$

Заменив в этом ряде x на x^2, получим

$$sinx^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots .$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots}{x^2}\right)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{12}}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^5}{5\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 5!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 7!} + \cdots\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{5\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 5!} - \frac{1}{13\cdot 7!} + \cdots.$$

Получим знакочередующийся ряд. Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0.001, замечаем, что третий член ряда по абсолютной величине меньше 0.001. Согласно признаку Лейбница, остаток ряда не превзойдет по абсолютной величине первого отброшенного члена ряда, т.е.

$$|\, r_n \,| < a_n = \frac{1}{9\cdot 5!} = \frac{1}{1080} < 0.001 .$$

Следовательно, для решения данной задачи достаточно взять сумму первых двух членов, что обеспечит требуемую точность.

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^2}dx \approx 1-\frac{1}{5\cdot 3!}=1-\frac{1}{30}=\frac{29}{30}\approx 0,9667$$

Пример 39. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{0,6} e^{-0,4x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, для этого воспользуемся разложением функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

Заменив в этом ряде x на $-0,4x^2$, получим:

$$e^{-0,4x^2} = 1-\frac{0,4x^2}{1!}+\frac{0.4^2x^4}{2!}-\frac{0.4^3x^6}{3!}+\frac{0.4^4x^8}{4!}-\cdots.$$

$$\int_0^{0.6} e^{-0.4x}dx=\int_0^{0.6}\left(1-\frac{0.4x^2}{1!}+\frac{0.4^2x^4}{2!}-\frac{0.4^3x^6}{3!}+\frac{0.4^4x^8}{4!}-\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{0.4x^3}{3}+\frac{0.08x^5}{5}-\frac{0.4^3x^7}{6\cdot 7}+\frac{0.4^4x^9}{24\cdot 9}-\ldots\right)\Big|_0^{0.6}=$$

$$=0.6-0.0288+0.0012-0.00004+\ldots$$

Получили знакочередующийся ряд. Вычисляя члены этого ряда с точностью до 0,001, замечаем, что 4-ый член ряда по абсолютной величине меньше 0,001. Согласно признаку Лейбница, остаток ряда не превзойдет по абсолютной величине первого отброшенного члена ряда, т.е.

$$|\, r_n \,| < a_4 = 0,00004 < 0.001\,.$$

Следовательно, для решения данной задачи, достаточно взять сумму первых 3-х членов ряда, что обеспечит требуемую точность

$$\int_0^{0,6} e^{-0,4x^2}dx \approx 0.6-0.0288+0.0012 = 0,5724\,.$$

Пример 40. Вычислить $\ln 1{,}04$ с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением функции $\ln(1+x)$ в ряд, т.е.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots .$$

В нашем случае

$\ln 1{,}04 = \ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} + \dots = 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}000021 - 0{,}00000064 + \dots .$

Получим знакочередующийся ряд. Вычисляя члены этого ряда, замечаем, что 3-й член ряда по абсолютной величине меньше 0,0001. Следовательно, для решения данной задачи, согласно признаку Лейбница, достаточно взять сумму первых двух членов ряда, что обеспечит требуемую точность.

$$\ln 1{,}04 = 0{,}04 - 0{,}0008 \approx 0{,}0392 .$$

Пример 41. Вычислить $\ln 5$ с точностью до 0,0001.

Решение. Для вычисления логарифмов эффективна формула

$$\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}}\right].$$

$$R_n = 2\left[\frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5)(2t+1)^{2n+5}} + \dots\right].$$

Заменив каждый из множителей (2n+3); (2n+5); (2n+7); … меньшим числом 2n+1, получим неравенство

$$R_n < \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+3}} + \frac{1}{(2t+1)^{2n+5}} + \dots\right]$$

Просуммируем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в квадратных скобках:

$R_n < \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}}}{1-\frac{1}{(2t+1)^2}} = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}[(2t+1)^2-1]} = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}\cdot 4t(t+1)}$, т.е.

$$R_n < \frac{1}{2(2n+1)t(t+1)(2t+1)^{2n-1}} .$$

$$\ln 5 = \ln(4+1) = \ln 4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \dots\right);$$

$$R_n < \frac{1}{2(2n+1)\cdot 4(4+1)(2\cdot 4+1)^{2n-1}} = \frac{1}{40(2n+1)9^{2n-1}}$$

Если $n = 1$, то $R_1 < \frac{1}{40 \cdot 3 \cdot 9} = \frac{1}{1080}$;

если $n = 2$, то $R_2 < \frac{1}{40 \cdot 5 \cdot 9^3} = \frac{1}{10000}$.

Значит, достаточно взять два члена ряда, чтобы вычислить с заданной точностью. Следовательно,

$$\ln 5 \approx 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3}\right) \approx 1{,}38628 + 0{,}22222 + 0{,}00090 = 1{,}60940.$$

ЗАДАЧИ

Вычислить значения функции с точностью до 0,0001:

125. $\cos 20°$. 126. $\sin 80°$. 127. $\sqrt[3]{e}$.

ОТВЕТЫ

125. 0,9397. 126. 0,9868. 127. 1,3956.

ЗАДАЧИ

Вычислить определенные интегралы с точностью до 0,001:

128. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx$.

129. $\int_0^{0,8} \frac{\sin 1,25x}{x} dx$.

130. $\int_0^{0,4} e^{-1.7x^2} dx$.

131. $\int_0^1 \cos\sqrt{x} dx$.

132. $\int_0^{0,8} x^{10}\sin x dx$.

ОТВЕТЫ

128. 0,608. 129. 0,946 . 130. 0,367

131. 0,764 . 132. 0,006 .