7. *Чупров, С. В.* Мониторинг устойчивости производственных систем / С. В. Чупров. — Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2005. — 221 с.

Chuprov, S. V. Monitoring the sustainability of production systems / S. V. Chuprov. — Irkutsk : BSEEP Publ. House, 2005. — 221 p.

8. *Агабекова, Н. В.* Методология экономико-статистической оценки эффективности жизнедеятельности человека : монография / Н. В. Агабекова. — Минск : БГАТУ, 2015. — 326 с.

Agabekova, N. V. The methodology of economic and statistical evaluation of the effectiveness of human life : monograph / N. V. Agabekova. — Minsk : BSTU, 2015. — 326 p.

9. Резолюция I о статистике трудовой деятельности, занятости и недоиспользования рабочей силы [Электронный ресурс] : 19-я Междунар. конф. статистиков труда // International Labour Organization. — Режим доступа: www.ilo.org/global/statistics-and-databases/meetings-and-events/international-conference-of-labour-statisticians/19/lang--en/index.htm. — Дата доступа: 08.04.2017.

10. *Пирожков, С. И.* Трудовой потенциал в демографическом измерении / С. И. Пирожков. — Киев : Наукова думка, 1992. — 177 с.

Pirozhkov, S. I. Labor potential in the demographic dimension / S. I. Pies. — Kiev : Naukova Dumka, 1992. — 177 p.

11. *Соболева, И. В.* Человеческий потенциал российской экономики: проблемы сохранения и развития / И. В. Соболева. — М. : Наука, 2007. — 202 с.

Soboleva, I. V. The Human potential of the russian economy: problems of conservation and development / I. V. Sobolev. — Moscow : Nauka, 2007. — 202 p.

12. *Хадасевич, Н. Р.* Трудовой потенциал региона: теоретические и прикладные аспекты : монография / Н. Р. Хадасевич. — Новосибирск : ЦРНС, 2015. — 98 с.

Khadasevich, N. R. Labor potential of the region: theoretical and applied aspects : monograph / N. R. Khadasevich. — Novosibirsk : CDSC, 2015 — 98 c.

13. Методика по расчету статистических показателей занятости и недоиспользования рабочей силы [Электронный ресурс] : с изм. и доп., внес. постановлением Нац. стат. ком. Респ. Беларусь от 13.04.2015 г. № 17 и от 23.12.2016 г. № 199 // Национальный статистический комитет Республики Беларусь. — Режим доступа: http://www.belstat.gov.by/metodologiya/metodiki-po-formirovaniyu-i-raschetu-statistichesk/. — Дата доступа: 26.11.2017.

Статья поступила в редакцию 11.12.2017 г.

УДК 330.4

E. Aksen
BSEU (Minsk)

ESTIMATION OF FINANCIAL DERIVATIVES' VALUE WITH THE USE OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION FOR THE SHORT-TERM RISK-FREE YIELD

The paper presents a methodology for estimating the market value of financial derivatives by means of the replicating portfolio for the case when the dynamics of the short-term risk-free yield is described with the use of the Wiener processes utilized for the dynamics of basic assets' prices. A formula for the market value of derivative financial assets has been derived as well as a system of stochastic differential equations for the basic assets and the short-term risk-free yield with the use of the risk-neutral probability measure.

Keywords: *financial derivative; dynamics; stochastic differential equation; yield; replicating portfolio; investment strategy; mathematical expectation; random process; Wiener process; cash flow; martingale.*

Э. М. Аксень
доктор экономических наук, доцент
БГЭУ (Минск)

ОЦЕНКА СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КРАТКОСРОЧНОЙ БЕЗРИСКОВОЙ ДОХОДНОСТИ

В статье представлена методика оценивания рыночной стоимости финансовых производных с использованием дублирующего портфеля для случая, когда динамика краткосрочной безрисковой доходности описывается с помощью винеровских процессов, на основе которых задана динамика цен базовых активов. Получена формула для рыночной стоимости производных финансовых активов и система стохастических дифференциальных уравнений для базовых активов и краткосрочной безрисковой доходности с использованием нейтральной к риску вероятностной меры.

Ключевые слова: *финансовая производная; динамика; стохастическое дифференциальное уравнение; доходность; дублирующий портфель; инвестиционная стратегия; математическое ожидание; случайный процесс; винеровский процесс; денежный поток; мартингал.*

Оценка рыночной стоимости финансовых производных является одной из основных задач финансового анализа. Стандартный подход к решению этой задачи заключается в построении дублирующей инвестиционной стратегии, состоящей в приобретении и продаже базовых и безрискового активов и генерирующей такие же денежные потоки, как и рассматриваемая финансовая производная. В качестве оценки рыночной стоимости финансовой производной берется рыночная стоимость дублирующего портфеля в соответствующий момент времени. Для данной задачи известно решение в случае когда краткосрочная безрисковая доходность однозначно определяется ценами базовых финансовых активов [1, с. 89]. Такой случай представляет теоретический интерес, однако редко встречается на финансовых рынках. С учетом сказанного в данной статье исследован более общий случай, когда динамика краткосрочной безрисковой доходности описывается с помощью винеровских процессов, на основе которых задана динамика цен базовых активов.

Вывод формулы для рыночной стоимости инвестиционной стратегии. Рассмотрим инвестиционную стратегию, состоящую в приобретении и продаже n видов финансовых активов, а также безрискового актива. Обозначим через $\lambda_i(t)$ количество единиц актива i-го вида в инвестиционном портфеле в момент времени t, а через $B(t)$ — количество денег, вложенных в безрисковый актив в момент времени t. Тогда рыночная стоимость $V(t)$ такого портфеля в момент времени t равна $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) S_i(t) + B(t)$, где $S_i(t)$ — цена единицы актива i-го вида в момент времени t. Это равенство можно записать также следующим образом:

$$V(t) = \lambda^{\mathrm{T}}(t) S(t) + B(t), \tag{1}$$

где $\lambda(t)$ и $S(t)$ — векторы-столбцы, состоящие соответственно из $\lambda_i(t)$ и $S_i(t)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, а верхний индекс T означает транспонирование.

Обозначим через $A_i(t)$ кумулятивный платеж, выплачиваемый единицей i-го финансового актива к моменту времени t, т.е. суммарный платеж за промежуток времени $(t_0, t]$, где t_0 — некоторый фиксированный момент времени, выбранный в качестве начального, а через $C(t)$ — кумулятивный денежный поток, генерируемый инвестиционной стратегией к моменту времени t. Пусть $r(t)$ — краткосрочная безрисковая доходность [2, с. 31].

В соответствии с [1, с. 107; 3, с. 162] для стохастического дифференциала рыночной стоимости инвестиционного портфеля имеет место равенство

$$dV(t) = \lambda^{\mathrm{T}}(t)d[S(t) + A(t)] + B(t)r(t)dt - dC(t), \tag{2}$$

где $A(t)$ — вектор-столбец, состоящий из $A_i(t)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

В соответствии с [1, с. 89, с. 106] будем считать, что для стохастического дифференциала суммарного случайного процесса $S(t) + A(t)$ справедливо следующее представление:

$$d[S(t) + A(t)] = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \tag{3}$$

где $W(t) = \left[W_1(t), \ldots, W_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$ — векторный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами [3, с. 100], а $\mu(t) = \left[\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$ и $\sigma(t) = \left[\sigma_{ij}(t)\right]\left(i \in \{1, 2, \ldots, n\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\right)$ — векторный и матричный случайные процессы адаптированные к W-фильтрации [3, с. 94].

Отметим, что если для стохастического дифференциала векторного случайного процесса $A(t)$ (компонентами которого являются процессы кумулятивных платежей финансовых активов) справедливо представление

$$dA(t) = \mu_A(t)dt + \sigma_A(t)dW(t), \tag{4}$$

где $\mu_A(t)$ и $\sigma_A(t)$ — векторный и матричный адаптированные случайные процессы, то в силу соотношения (3) имеет место равенство

$$dS(t) = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW(t), \tag{5}$$

где

$$\mu_S(t) = \mu(t) - \mu_A(t),\ \sigma_S(t) = \sigma(t) - \sigma_A(t). \tag{6}$$

Будем считать, что для стохастического дифференциала краткосрочной безрисковой доходности справедливо представление

$$dr(t) = \varphi(t)dt + \psi(t)dW(t), \tag{7}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t) = \left[\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\right]$ — скалярный и векторный адаптированные случайные процессы.

Замечание 1. В монографии [1, с. 89], а также в других источниках при описании методики оценки рыночной стоимости инвестиционной стратегии вместо представления (7) используется предположение о том, что краткосрочная безрисковая доходность однозначно определяется рыночными ценами финансовых активов, т.е.

$$r(t) = r\left[S(t), t\right], \tag{8}$$

где $r(S, t)$ — детерминированная функция соответствующих аргументов. Используя формулу Ито [3, с. 101; 4, с. 155], несложно показать, что из равенств (5) и (8) следует представление (7). Обратное, вообще говоря, неверно. Таким образом, в настоящей статье методика оценивания рыночной стоимости финансовых производных представлена для более общего случая.

Для любых моментов времени τ и t, таких что $t \geq \tau$, определим случайную величину $Q(\tau, t)$ по формуле

$$Q(\tau, t) = \exp\left[-\int_{\tau}^{t} r(s)ds\right]. \tag{9}$$

Значение $Q(\tau, t)$ равно коэффициенту дисконтирования, соответствующему инвестиционной стратегии, состоящей во вложении денег в краткосрочные безрисковые финансовые активы.

Из равенства (9) в частности следуют соотношения

$$dQ(\tau, t) = -Q(\tau, t)r(t)dt, \tag{10}$$

$$Q(\tau, \theta)Q(\theta, t) = Q(\tau, t) \tag{11}$$

при любых τ, θ и t.

С помощью коэффициента дисконтирования $Q(\tau, t)$ определим случайную величину $\xi(\tau, t)$ по формуле

$$\xi(\tau, t) = \int_{\tau}^{t} Q(\tau, s)dC(s) + Q(\tau, t)V(t). \tag{12}$$

Значение $\xi(\tau, t)$ равно сумме дисконтированного денежного потока, генерируемого в течение промежутка времени $(\tau, t]$ построенной выше инвестиционной стратегией, и дисконтированной рыночной стоимости соответствующего инвестиционного портфеля в момент времени t.

Из равенства (12) следует, что для стохастического дифференциала случайного процесса $\xi(\tau, t)$ по переменной t при фиксированном значении переменной имеет место соотношение

$$d\xi(\tau, t) = Q(\tau, t)dC(t) + d\left[Q(\tau, t)V(t)\right]. \tag{13}$$

Из равенства (10) в силу формулы (П.2.7) на с. 155 монографии [4] следует, что

$$d\left[Q(\tau, t)V(t)\right] = -V(t)Q(\tau, t)r(t)dt + Q(\tau, t)dV(t). \tag{14}$$

Из равенств (1)–(3), (13), (14) получим

$$d\xi(\tau, t) = Q(\tau, t)\lambda^{\mathrm{T}}(t)\left[\mu(t) - S(t)r(t)\right]dt + Q(\tau, t)\lambda^{\mathrm{T}}(t)\sigma(t)dW(t). \tag{15}$$

Предположим, что при любом значении t матрица $\sigma(t)$ не вырождена почти наверное, т.е. с вероятностью 1. Определим случайный процесс $\tilde{W}(t)$ по формуле

$$\tilde{W}(t) = \int_{0}^{t} \sigma^{-1}(\tau)\left[\mu(\tau) - S(\tau)r(\tau)\right]d\tau + W(t). \tag{16}$$

Из соотношения (16) следует, что

$$d\tilde{W}(t) = \sigma^{-1}(t)\left[\mu(t) - S(t)r(t)\right]dt + dW(t), \tag{17}$$

а из равенства (17) очевидным образом вытекает, что

$$dW(t) = \sigma^{-1}(t)\left[S(t)r(t) - \mu(t)\right]dt + d\tilde{W}(t). \tag{18}$$

Подставив формулу (18) в равенство (15), получим

$$d\xi(\tau, t) = Q(\tau, t)\lambda^{\mathrm{T}}(t)\sigma(t)d\tilde{W}(t). \tag{19}$$

В силу теоремы Гирсанова [3, с. 105] из представления (17) следует (при выполнении условия Новикова [3, с. 105]) существование такой вероятностной меры $\tilde{P}$, для которой векторный случайный процесс $\tilde{W}(t)$ является стандартным винеровским (с независимыми компонентами). Следовательно, в силу равенства (19) случайный процесс $\xi(\tau, t)$ является мартингалом [3, с. 106] относительно вероятностной меры $\tilde{P}$, т.е.

$$\tilde{E}_t\left[\xi(\tau,\theta)\right]=\xi(\tau,t) \tag{20}$$

при любых τ, θ и t, таких что $\tau \le t \le \theta$.

Из равенств (12) и (20) следует, что

$$V(t)=\tilde{E}_t\left[\int_t^{\theta} Q(t,s)dC(s)+Q(t,\theta)V(\theta)\right]. \tag{21}$$

Замечание 2. В соответствии с формулой (21) рыночная стоимость инвестиционной стратегии в «текущий» момент времени t равна сумме ожидаемого дисконтированного денежного потока, генерируемого инвестиционной стратегией до «будущего» момента времени θ, и ожидаемой дисконтированной рыночной стоимости инвестиционной стратегии в «будущий» момент времени θ, причем соответствующие математические ожидания берутся относительно «новой» вероятностной меры $\tilde{P}$. Поскольку в правой части формулы (21) фигурируют только математические ожидания соответствующих случайных величин (относительно вероятностной меры $\tilde{P}$), «новую» вероятностную меру $\tilde{P}$ называют нейтральной к риску [3, с. 233–239].

Денежный поток инвестиционной стратегии для важного частного случая. Рассмотрим случай, когда количество активов в динамическом портфеле определяется ценами активов и краткосрочной безрисковой доходностью

$$\lambda(t)=\lambda\left[S(t),r(t),t\right],\ B(t)=B\left[S(t),r(t),t\right]. \tag{22}$$

Тогда стоимость портфеля также определяется ценами активов и процентной ставкой

$$V(t)=V\left[S(t),r(t),t\right], \tag{23}$$

причем

$$V(S,r,t)=\lambda^{\mathrm{T}}(S,r,t)S+B(S,r,t). \tag{24}$$

Из равенств (21) и (23) вытекает, что

$$V\left[S(t),r(t),t)\right]=\tilde{E}\left[\xi(t,\theta)\,\middle|\,S(t),r(t)\right]. \tag{25}$$

Следовательно, для функции $V(S,r,t)$ имеет место равенство

$$V(x,y,t)=\tilde{E}\left[\xi(t,\theta)\,\middle|\,S(t)=x,r(t)=y\right], \tag{26}$$

т.е. $V(x,y,t)$ равно условному математическому ожиданию (относительно меры $\tilde{P}$) случайной величины $\int_t^{\theta} Q(t,s)dC(s)+Q(t,\theta)V(\theta)$ при условии, что значения случайных процессов $S(t)$ и $r(t)$ в момент времени t равны соответственно значениям $x \in R^n$ и $y \in R$.

Обозначим

$$Z(t)=\begin{bmatrix}S(t)\\ r(t)\end{bmatrix},\quad \mu_Z(t)=\begin{bmatrix}\mu_S(t)\\ \varphi(t)\end{bmatrix}\quad \sigma_Z(t)=\begin{bmatrix}\sigma_S(t)\\ \psi(t)\end{bmatrix}. \tag{27}$$

Тогда соотношения (5) и (7) можно записать в виде

$$dZ(t)=\mu_Z(t)dt+\sigma_Z(t)dW(t), \tag{28}$$

а зависимость (23) может быть описана следующим образом:

$$V(t)=V\left[Z(t),t\right]. \tag{29}$$

В силу формулы Ито [3, с. 101; 4, с. 155] из представления (29) вытекает, что

$$dV(t) = \left\{ V_t(t) + V_Z^T(t)\mu_Z(t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[V_{ZZ}(t)\sigma_Z(t)\sigma_Z^{\mathrm{T}}(t)] \right\} dt + V_Z^T(t)\sigma_Z(t)dW(t), \tag{30}$$

где $V_t(t)$, $V_Z(t)$ и $V_{ZZ}(t)$ — соответственно частная производная по переменной t, вектор-столбец частных производных по переменным $Z_1, \ldots, Z_n$ и матрица вторых производных по указанным переменным от функции $V(Z, t)$ в точке $\left[Z(t), t\right]$.

Подставив формулу (3) в равенство (2), (3), получим

$$dV(t) = [\lambda^{\mathrm{T}}(t)\mu(t) + B(t)r(t)]d(t) + \lambda^{\mathrm{T}}(t)\sigma(t)dW(t) - dC(t). \tag{31}$$

Из равенств (30), (31) следует, что

$$dC(t) = \alpha(t)dt + \beta(t)dW(t), \tag{32}$$

где

$$\alpha(t) = [\lambda^{\mathrm{T}}(t)\mu(t) + B(t)r(t)] - \left\{ V_t(t) + V_Z^T(t)\mu_Z(t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}[V_{ZZ}(t)\sigma_Z(t)\sigma_Z^{\mathrm{T}}(t)] \right\}, \tag{33}$$

$$\beta(t) = \lambda^{\mathrm{T}}(t)\sigma(t) - V_Z^T(t)\sigma_Z(t). \tag{34}$$

Построение дублирующего динамического портфеля. Пусть финансовая производная генерирует денежный поток $\hat{C}(t)$ и ее стоимость в момент времени T равна $\hat{V}_T$. При этом будем считать, что

$$d\hat{C}(t) = \hat{\alpha}(t)dt + \hat{\beta}(t)dW(t), \tag{35}$$

$$\hat{V}_T = \hat{V}_T\left[S(T), r(T)\right], \tag{36}$$

$$\hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}\left[S(t), r(t), t\right],\ \hat{\beta}(t) = \hat{\beta}\left[S(t), r(t), t\right]. \tag{37}$$

Пусть для такой финансовой производной существует дублирующий портфель $[\lambda(t), B(t)]$. Обозначим его стоимость и кумулятивный денежный поток через $V(t)$ и $C(t)$. В связи с тем, что такой портфель является дублирующим для финансовой производной, это означает следующее:

$$C(t) = \hat{C}(t), \tag{38}$$

$$V(T) = \hat{V}_T. \tag{39}$$

По аналогии с формулами (36), (37) предположим, что

$$V(t) = V\left[S(t), r(t), t\right]. \tag{40}$$

Зависимость (40) означает, что стоимость дублирующего портфеля однозначным образом определяется ценами базовых финансовых активов и краткосрочной безрисковой доходностью.

Тогда для функции $V(S, r, t)$ имеет место равенство (26). Из равенств (26), (38), (39) следует, что

$$V(x, y, t) = \tilde{E}\left[\int_t^T Q(\tau, s)d\hat{C}(s) + Q(\tau, T)\hat{V}_T \,\middle|\, S(t) = x, r(t) = y\right]. \tag{41}$$

В силу соотношений (35), (38) для $C(t)$ имеет место равенство

$$dC(t) = \hat{\alpha}(t)dt + \hat{\beta}(t)dW(t), \tag{42}$$

откуда в силу формул (32) и (34) получим

$$\lambda^{\mathrm{T}}(t) = [\hat{\beta}(t) + V_Z^T(t)\sigma_Z(t)]\sigma^{-1}(t). \tag{43}$$

Итак, если существует дублирующий портфель и имеет место зависимость (40), то справедливы формулы (41) и (43). (Однако мы еще не доказали существование дублирующего портфеля.)

Формулы (41) и (43) возьмем в качестве основы для построения портфеля и выясним, при каких условиях такой портфель является дублирующим. Построим функцию $V(S, r, t)$ по формуле (41). Определим вектор $\lambda(t)$ количеств активов в портфеле по формуле (43). Построим случайный процесс $V(t)$ с помощью формулы (40). Определим $B(t)$ в соответствии с формулой (1) следующим образом:

$$B(t) = V(t) - \lambda^{\mathrm{T}}(t)S(t). \tag{44}$$

Из равенства (44) следует, что в каждый момент времени t (определенное выше) значение $V(t)$ равно стоимости построенного указанным образом портфеля. Обозначим через $C(t)$ денежный поток построенного динамического портфеля. Для того чтобы показать, что полученный динамический портфель является дублирующим, нужно доказать справедливость равенств (38) и (39).

Из соотношений (40), (41) следует, что

$$V(t) = \tilde{E}\left[\int_t^T Q(\tau, s)d\hat{C}(s) + Q(\tau, T)\hat{V}_T \,\middle|\, S(t), r(t)\right]. \tag{45}$$

Равенство (39) вытекает из формул (9), (36), (45).

Можно показать, что в случае когда справедливы зависимости (36), (37), и кроме того, когда

$$\mu(t) = \mu\left[S(t), r(t), t\right], \qquad \sigma(t) = \sigma\left[S(t), r(t), t\right], \tag{46}$$

$$\mu_S(t) = \mu_S\left[S(t), r(t), t\right], \qquad \sigma_S(t) = \sigma_S\left[S(t), r(t), t\right], \tag{47}$$

$$\varphi(t) = \varphi\left[S(t), r(t), t\right], \qquad \psi(t) = \psi\left[S(t), r(t), t\right], \tag{48}$$

где $\mu(S, r, t), \sigma(S, r, t), \mu_S(S, r, t), \sigma_S(S, r, t), \varphi(S, r, t)$ и $\psi(S, r, t)$ — детерминированные функции соответствующих аргументов, имеет место равенство

$$\tilde{E}\left[\int_t^T Q(\tau, s)d\hat{C}(s) + Q(\tau, T)\hat{V}_T \,\middle|\, S(t), r(t)\right] = \tilde{E}_t\left[\int_t^T Q(\tau, s)d\hat{C}(s) + Q(\tau, T)\hat{V}_T\right]. \tag{48}$$

В таком случае из (45), (48) следует, что

$$V(t) = \tilde{E}_t\left[\int_t^T Q(t, s)d\hat{C}(s) + Q(t, T)\hat{V}_T\right]. \tag{49}$$

В силу зависимости (40) для денежного потока $C(t)$ построенного портфеля имеет место равенство (32), где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ находятся по формулам (33), (34).

Покажем, что

$$\alpha(t) = \hat{\alpha}(t), \tag{50}$$

$$\beta(t) = \hat{\beta}(t). \tag{51}$$

Из формулы (43) следует, что

$$\hat{\beta}(t) = \lambda^{\mathrm{T}}(t)\sigma(t) - V_Z^T(t)\sigma_Z(t). \tag{52}$$

Из (34), (52) следует справедливость равенства (51).

Докажем соотношение (50). Для этого определим случайный процесс $\hat{\xi}(\tau, t)$ по формуле

$$\hat{\xi}(\tau, t) = \int_t^T Q(\tau, s) d\hat{C}(s) + Q(\tau, t) V(t) \tag{53}$$

и покажем, что этот случайный процесс является мартингалом относительно вероятностной меры $\tilde{P}$.

Из формулы (53) с учетом равенства (11) получим

$$\tilde{E}_t[\hat{\xi}(\tau, \theta)] = \int_t^T Q(\tau, s) d\hat{C}(s) + Q(\tau, t) \tilde{E}_t \left[\int_t^\theta Q(t, s) d\hat{C}(s) + Q(t, \theta) V(\theta) \right]. \tag{54}$$

В силу соотношения (49) справедливо равенство

$$\tilde{E}_t \left[\int_t^\theta Q(t, s) d\hat{C}(s) + Q(t, \theta) V(\theta) \right] = V(t). \tag{55}$$

Подставив правую часть равенства (55) в соотношение (54), с учетом формулы (53) получим

$$\tilde{E}_t[\hat{\xi}(\tau, \theta)] = \hat{\xi}(\tau, t). \tag{56}$$

Следовательно, $\hat{\xi}(\tau, t)$ мартингал (по переменной t) относительно меры $\tilde{P}$. С другой стороны, из формулы (53) следует, что

$$d\hat{\xi}(\tau, t) = Q(\tau, t) d\hat{C}(t) + d\big[Q(\tau, t) V(t) \big]. \tag{57}$$

В силу формул (10) и (30)

$$\begin{gathered} d\big[Q(\tau, t) V(t) \big] = Q(\tau, t) \left\{ V_t(t) + V_Z^T(t) \mu_Z(t) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[V_{ZZ}(t) \sigma_Z(t) \sigma_Z^{\mathrm{T}}(t)] - V(t) r(t) \right\} dt + \\ + Q(\tau, t) V_Z^T(t) \sigma_Z(t) dW(t). \end{gathered} \tag{58}$$

Из соотношений (35), (57), (58) получим

$$\begin{gathered} d\hat{\xi}(\tau, t) = Q(\tau, t) \left\{ \hat{\alpha}(t) + V_t(t) + V_Z^T(t) \mu_Z(t) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[V_{ZZ}(t) \sigma_Z(t) \sigma_Z^{\mathrm{T}}(t)] - V(t) r(t) \right\} dt + \\ + Q(\tau, t) \Big[\hat{\beta}(t) + V_Z^T(t) \sigma_Z(t) \Big] dW(t). \end{gathered} \tag{59}$$

Подставив формулу (18) в соотношение (59), будем иметь

$$\begin{gathered} d\hat{\xi}(\tau, t) = Q(\tau, t) \Big\{ \hat{\alpha}(t) + V_t(t) + V_Z^T(t) \mu_Z(t) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[V_{ZZ}(t) \sigma_Z(t) \sigma_Z^{\mathrm{T}}(t)] - V(t) r(t) + \\ + \Big[\hat{\beta}(t) + V_Z^T(t) \sigma_Z(t) \Big] \sigma^{-1}(t) [S(t) r(t) - \mu(t)] \Big\} dt + Q(\tau, t) \Big[\hat{\beta}(t) + V_Z^T(t) \sigma_Z(t) \Big] d\tilde{W}(t). \end{gathered} \tag{60}$$

Поскольку $\hat{\xi}(\tau, t)$ мартингал относительно меры $\tilde{P}$, то множитель при дифференциале dt в правой части равенства (60) равен нулю. Следовательно,

$$\begin{gathered} \hat{\alpha}(t) + V_t(t) + V_Z^T(t) \mu_Z(t) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[V_{ZZ}(t) \sigma_Z(t) \sigma_Z^{\mathrm{T}}(t)] - V(t) r(t) + \\ + [\hat{\beta}(t) + V_Z^T(t) \sigma_Z(t)] \sigma^{-1}(t) [S(t) r(t) - \mu(t)] = 0. \end{gathered} \tag{61}$$

В силу формул (44), (52) из (61) следует, что

$$\hat{\alpha}(t) = \lambda^{\mathrm{T}}(t) \mu(t) + B(t) r(t) - V_t(t) - V_Z^T(t) \mu_Z(t) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}[V_{ZZ}(t) \sigma_Z(t) \sigma_Z^{\mathrm{T}}(t)]. \tag{62}$$

Из формул (62), (33) следует равенство (50). Равенство (38) следует из уже доказанных равенств (50), (51) и соотношений (32), (35).

Итак, при выполнении зависимостей (36), (37), (46), (48) и невырожденности матрицы $\sigma(t)$ для финансовой производной существует дублирующая инвестиционная стратегия, причем она определяется формулами (43), (44), в которых функция $V(S, r, t)$ определяется с помощью формулы (41).

Для использования формулы (41) следует вначале получить систему стохастических дифференциальных уравнений для $S(t)$ и $r(t)$ с использованием случайного процесса $\tilde{W}(t)$ (который является винеровским относительно меры $\tilde{P}$).

Подставив формулу (18) в соотношения (5) и (7) с учетом зависимостей (46)–(48), получим

$$dS(t) = \Big(\mu_S\big[S(t), r(t), t\big] + \sigma_S\big[S(t), r(t), t\big]\sigma^{-1}\big[S(t), r(t), t\big]\big\{S(t)r(t) - \mu\big[S(t), r(t), t\big]\big\}\Big)dt + \\ + \sigma_S\big[S(t), r(t), t\big]d\tilde{W}(t), \quad (63)$$

$$dr(t) = \Big(\varphi\big[S(t), r(t), t\big] + \psi\big[S(t), r(t), t\big]\sigma^{-1}\big[S(t), r(t), t\big]\big\{S(t)r(t) - \mu\big[S(t), r(t), t\big]\big\}\Big)dt + \\ + \psi\big[S(t), r(t), t\big]d\tilde{W}(t). \quad (64)$$

При использовании формулы (41) случайные процессы $S(t)$ и $r(t)$ следует рассматривать как решение системы стохастических дифференциальных уравнений (63), (64) (с соответствующими начальными условиями).

Таким образом, в данной статье представлена методика получения оценки рыночной стоимости финансовых производных в случае, когда динамика краткосрочной безрисковой доходности задается с помощью винеровских процессов, используемых для описания динамики базовых активов. Практическая значимость описанной в данной статье методики обусловлена тем, что рассмотренная нами модель более адекватно описывает реальные финансовые рынки в сравнении с ранее исследованным случаем (когда краткосрочная безрисковая доходность однозначно определяется ценами базовых активов).

Источники

1. *Аксень, Э. М.* Стохастическое моделирование динамики макроэкономических показателей / Э. М. Аксень. — Минск : БГЭУ, 2006. — 164 с.

Aksen', E. M. Stokhasticheskoe modelirovanie dinamiki makroekonomicheskikh pokazateley / E. M. Aksen'. — Minsk : BGEU, 2006. — 164 s.

2. *Медведев, Г. А.* Математические модели финансовых рисков : в 2 ч. / Г. А. Медведев. — Минск : БГУ, 1999. — Ч. 1. Риски из-за неопределенности процентных ставок. — 239 с.

Medvedev, G. A. Matematicheskie modeli finansovykh riskov : v 2 ch. / G. A. Medvedev. — Minsk : BGU, 1999. — Ch. 1. Riski iz-za neopredelennosti protsentnykh stavok. — 239 s.

3. *Медведев, Г. А.* Математические основы финансовой экономики / Г. А. Медведев. — Минск : БГУ, 2011. — 303 с.

Medvedev, G. A. Matematicheskie osnovy finansovoy ekonomiki / G. A. Medvedev. — Minsk : BGU, 2011. — 303 s.

4. *Duffie, D.* Dynamic asset pricing theory / D. Duffie. — Princeton : Princeton Univ. Press, 1992. — 299 p.

Статья поступила в редакцию 24.10.2017 г.