Т.И.Гавриш, Л.В.Станишевская

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

Учебно-методическое пособие

Минск, БГЭУ 2018

Р е к о м е н д о в а н о кафедрой высшей математики
У т в е р ж д е н о Научно-методическим советом университета

Применение определенного интеграла в экономических расчетах: Учебно-метод. пособие / Т.И. Гавриш, Л.В.Станишевская — Мн.: БГЭУ, 2017. — 59 с.
fSBN 985-426-940-X.
УДК 517.3 ББК 22.161.12

ISBN 985-426-940-X

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Интегрирование функций

Основная задача интегрального исчисления – нахождение первообразной для заданной функции, т.е. нахождение функции по заданной производной.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x)= f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак интеграла; $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; x – переменная интегрирования. Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Нахождение неопределенного интеграла называется *интегрированием функции.*

Неопределенный интеграл обладает следующими основными свойствами (правила интегрирования):

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx)= f(x)dx$.
3. $\int dF(x)= F(x)+C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$, где a - постоянная.
5. $\int(f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0dx = c$
2. $\int dx = x + c$
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
4. $\int \frac{dx}{x} = ln\left|x\right| + c$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
7. $\int e^x\,dx = e^x + c$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$.
9. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\,x + c$
10. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + c$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c$
15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
16. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

К основным методам интегрирования функций относятся:

1. Непосредственное интегрирование, т.е. интегрирование с помощью правил 4 и 5, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов.

2. Интегрирование подведением под знак дифференциала, т.е. преобразование данного интеграла по формуле $\int f(x)dx = \int g(u)du$, где $f(x)\ dx =$
$= g\ (\varphi(x))\ \varphi'(x)\ dx = g(u)\ du$.

3. Интегрирование подстановкой (заменой переменной), т.е. интегрирование по формуле $\int f(x)dx = \int f\ (\varphi(t))\ \varphi'(t)\ dt$ (подстановка $x = \varphi(t)$), где $\varphi(t)$ –дифференцируемая функция.

4. Интегрирование по частям, основанное на использовании формулы
$\int udv = uv - \int vdu$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Например, для интегралов вида $\int P(x)\ e^{ax}dx$; $\int P(x)\sin ax\ dx$; $\int P(x) \cos ax\ dx$, где $P(x)$ - многочлен, за u - следует принять $P\ (x)$, а за dv – соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; для интегралов вида $\int P(x)lnxdx$, $\int P(x)\arcsin x\ dx$, $\int P(x)arcctgx\ dx$, $\int P(x)arctgxdx$, $\int P(x)\ \arccos xdx$ за u принимаются соответственно функции lnx, $arcsinx$, $arccosx$, $arctgx$, $arcctgx$, а за dv - выражение $P(x)dx$; интегралы вида $\int e^{ax} cosbxdx$, $\int e^{ax} sinbxdx$, где a и b - некоторые числа, вычисляются двукратным интегрированием по частям.

Рассмотрим основные методы интегрирования на примерах.

Непосредственное интегрирование

Пример 1. $\int (5\sin x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2)dx$.

Решение.

$$\int (5\sin x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2)dx = 5\int \sin xdx - \int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 2\int dx = -5cosx -$$
$$-ln|x| + \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 2x + c = -5cosx - ln|x| + \sqrt{x} - 2x + c.$$

Пример 2. $\int \frac{x^5+3x-1}{x^2}dx$.

Решение. Разделив числитель на знаменатель, получим

$$\int \frac{x^5+3x-1}{x^2}dx = \int x^3dx + 3\int \frac{dx}{x} - \int x^{-2}dx = \frac{x^4}{4} + 3ln|x| + \frac{1}{x} + c.$$

Пример 3. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$.

Решение.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \int x^{-2}dx + arctg\ x + c = -\frac{1}{x} +$$
$$+arctg\ x + c.$$

Пример 4. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{c}tgx - tgx + c.$$

Упражнения. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить следующие интегралы:

1. $\int (3\cos x + 2 - 4x^3 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2+1}) dx$.
   Ответ: $3\sin x + 2x - x^4 + ln\left|x\right| + 4arctg\, x + c$.
2. $\int \left(x^4 + \sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx$.
   Ответ: $\frac{x^5}{5} + \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x} + ln\left|x\right| + c$.
3. $\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}) dx$.
   Ответ: $2arctg\, x - 3\, arcsin\, x + c$.
4. $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right) dx$.
   Ответ: $2e^x + \frac{1}{2x^2} + c$.
5. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$.
   Ответ: $\cos x - ctg\, x + c$.
6. $\int \frac{\sqrt{1`+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$.
   Ответ: $arcsinx - ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + c$.
7. $\int \left(\frac{1}{x^2-25} + \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right) dx$.
   Ответ: $\frac{1}{10} ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right| + c$.
8. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3}\right) dx$.
   Ответ:$arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + c$.

Интегрирование подведением под знак дифференциала

При интегрировании методом подведения под знак дифференциала используется формула

$$\int f(x)dx = \int g(u)du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$- дифференцируемая функция от x.

В этом случае необходимо знать простейшие преобразования:

1.$dx = d(x \pm b)$, где b - постоянная величина.

2.$dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$, где a и b постоянные величины, причем $a \neq 0$.

3.$xdx = \frac{1}{2} dx^2$.

4.$x^2dx = \frac{1}{3} dx^3$

5.$sinxdx = -dcosx$.

6.cosxdx = d sinx.

7. $\frac{dx}{cos^2x} = dtgx.$

8. $\frac{dx}{sin^2x} = -dctgx$

9. $\frac{dx}{1+x^2} = d\,arctg\,x = -d\,arcctg\,x$

10. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\,arcsin\,x = \ -d\,arccos\,x$

11. $\frac{dx}{x} = d\,ln\,x$

12. $e^x dx = de^x.$

Используя метод подведения под знак дифференциала, найти следующие неопределенные интегралы.

Пример 1. $\int \frac{dx}{(2ctgx-3)sin^2x}$.

Решение. Так как $\frac{dx}{sin^2x} = -dctgx,\ \frac{dx}{sin^2x} = -\frac{1}{2}d(2ctgx-3)$, то применив подстановку $t = 2ctgx - 3$, получим

$$\int \frac{dx}{(2ctgx-3)sin^2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(2ctgx-3)}{2ctgx-3} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}ln\left|t\right| + c =$$

$$= -\frac{1}{2}ln\left|2ctgx-3\right| + c.$$

Пример 2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{25+x^2}}$.

Решение. Так как $xdx = \frac{1}{2}dx^2,\ xdx = \frac{1}{2}d(x^2+25)$, то применив подстановку $t = x^2 + 25$, получим

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{25+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+25)}{\sqrt{25+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{t} + c =$$

$$= \sqrt{25+x^2} + c.$$

Пример 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-ln^2x}}$.

Решение. Так как $\frac{dx}{x} = dlnx$, то применив подстановку $t = ln\,x$, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-ln^2x}} = \int \frac{dln\,x}{\sqrt{4-ln^2x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = arcsin\frac{t}{2} + c = arcsin\frac{\ln x}{2} + c\,.$$

Пример 4. $\int \frac{e^x\sqrt{arctg\,e^x}}{1+e^{2x}}dx.$

Решение. Так как $e^x dx = de^x;\ \frac{de^x}{1+e^{2x}} = darctg\,e^x$, то применив подстановку $t = arctg\,e^x$, получим

$$\int \frac{e^x\sqrt{arctg\,e^x}}{1+e^x}dx = \ \int \frac{\sqrt{arctg\,e^x}\,de^x}{1+e^{2x}} = \int \sqrt{arctg\,e^x}d\,arctge^x =$$

$$= \int \sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(arctg\ e^x)^3} + c$$

Упражнения. Применяя метод подведения под знак дифференциала, найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{tg\ x\ ln^2 sinx}$. Ответ: $-\frac{1}{ln|\sin x|} + c$.
2. $\int \frac{dx}{e^{ctg\ 2x} sin^2 2x}$. Ответ: $\frac{1}{2\ e^{ctg 2x}} + c$.
3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{16+x^2}}$. Ответ: $\sqrt{16 + x^2} + c$.
4. $\int \sqrt[3]{2 - 3cos5x}\ sin\ 5x\ dx$. Ответ: $\frac{1}{20}\sqrt[3]{(2 - 3cos5x)^4} + c$.
5. $\int \frac{\sin x}{cos^2 x} dx$. Ответ: $\frac{1}{\cos x} + c$.
6. $\int \frac{x + arccos3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$. Ответ: $-\frac{1}{9}\sqrt{1 - 9x^2} - \frac{1}{6}(\arccos 3x)^2 + c$.
7. $\int \frac{5x-3}{4x^2+3} dx$. Ответ: $\frac{5}{8} ln|4x^2 + 3| - \frac{\sqrt{3}}{2} arctg \frac{2x}{\sqrt{3}} + c$.
8. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{4-e^{4x}}}$. Ответ: $\frac{1}{2} arcsin \frac{e^{2x}}{2} + c$.
9.

Интегрирование методом подстановки

Пример 1. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

Решение. Сделаем подстановку $\sqrt{x} = t$, тогда $x = t^2$ и $dx = 2t\ dt$. Получим

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{t^2 + t} = \int \frac{2dt}{t + 1} = 2\int \frac{dt}{t + 1} = 2ln|t + 1| + c =$$
$$= 2ln|\sqrt{x} + 1| + c.$$

Пример 2. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}} dx$.

Решение. Положим $\sqrt{4x + 1} = t$, тогда $t^2 = 4x + 1, x = \frac{t^2-1}{4}, dx = \frac{1}{2} tdt$, откуда

$$\int \frac{3x + 5}{\sqrt{4x + 1}} dx = \int \frac{3\left(\frac{t^2 - 1}{4}\right) + 5}{2t} dt = \int \left(\frac{3}{8}t^2 + \frac{17}{8}\right) dt = \frac{3}{8} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{17}{8} t + c =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{4x + 1}(4x + 18) + c = \frac{1}{4}(2x + 9)\sqrt{4x + 1} + c.$$

Пример 3. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$.

Решение. Сделаем подстановку $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Получим $t^2 = \frac{1+x}{1-x}; 1 - x = \frac{2}{t^2+1};$

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, dx = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)' \, dt = \frac{4t}{(t^2+1)^2}dt.$$

Далее имеем

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x} = \int \frac{t(t^2+1)4t}{2(t^2+1)^2}dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2arctg\ t + c = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c.$$

Пример 4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx.$

Решение. Положим $\sqrt{1-x^2} = t$, тогда $t^2 = 1 - x^2,\ x^2 = 1 - t^2,$
$2xdx = \ -2tdt,\ xdx = -tdt,$ откуда

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{1-x^2}\ \cdot x}{x^2}dx = \int \frac{-t \cdot tdt}{1-t^2} = \int \frac{-t^2+1-1}{1-t^2}dt =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)-1}{1-t^2}dt = \int dt - \int \frac{dt}{1-t^2} = \ t - \frac{1}{2}ln\left|\ \frac{1+t}{1-t}\ \right| + c =$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}ln\left|\ \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\ \right| + c.$$

Упражнения. Применяя метод подстановки, найти следующие интегралы:

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$ Ответ: $2\left(\sqrt{x+1} - ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|\right) + c.$
2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$ Ответ: $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + c.$
3. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx.$ Ответ: $2arctg\sqrt{x} + c.$
4. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}dx.$ Ответ: $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6arctg\sqrt[6]{x} + c.$
5. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$ Ответ: $2ln(e^x+1) - x + c.$
6. $\int \frac{xdx}{(x+4)^4}.$ Ответ: $\frac{4}{3(x+4)^3} - \frac{1}{2(x+4)^2} + c.$
7. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{\sqrt{e^x+1}}}.$ Ответ: $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + c.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$ Ответ: $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c.$

Интегрирование по частям

Пример 1. $\int x\cos 3x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$.

Пусть $u=x;\ dv = cos3x\ dx$. Тогда $du=dx$; $v = \int \cos 3x\ dx = \frac{1}{3} sin3x$. (Здесь и только здесь полагаем $c = 0$). Имеем

$\int x\cos 3x\ dx = \frac{1}{3} x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x sin3x + \frac{1}{9}\cos 3x + c$.

Пример 2. $\int x^2\ 2^{\ x} dx$.

Решение. Положим $u = x^2;\ dv = 2^x\ dx$. Тогда $du = 2xdx;$ $v = \frac{2^x}{ln2}$. Применим формулу интегрирования по частям:

$\int x^2 2^x dx = \frac{x^2 2^x}{ln2} - \int \frac{2^x 2x}{ln2} dx = \frac{x^2 2^x}{ln2} - \frac{2}{ln2}\int\ x2^x dx.$

Чтобы найти $\int x2^x\ dx$, применим еще раз интегрирование по частям. Полагаем $u = x,\ dv = 2^x\ dx$, тогда $du = dx,\ v = \frac{2^x}{\ln 2}$. Получим

$$\int x^2 2^x dx = \frac{x^2 2^x}{ln2} - \frac{2}{ln2}\left(\frac{x\cdot 2^x}{ln2} - \int \frac{2^x dx}{ln2}\right) = \frac{x^2 2^x}{ln2} - \frac{2x\cdot 2^x}{ln^2 2} + \frac{2\cdot 2^x}{ln^3 2} + c.$$

Пример 3. $\int e^x cos2x\ dx$.

Решение. Положим $u = e^x;$ $dv = \cos 2x\ dx$. Тогда $du = e^x dx;$

$v = \int cos2x\ \ dx = \frac{1}{2} sin2x$. Применим формулу интегрирования по частям:

$\int e^x cos2x\ dx = \frac{1}{2}(e^x sin2x - \int e^x sin2x\ dx)$. Применим еще раз интегрирование по частям. Полагаем $u = e^x$; $dv = sin\ 2xdx$, тогда $du = e^x dx$; $v = -\frac{1}{2} cos2x$. Получим:

$\int e^x cos2x\ dx = \frac{1}{2} e^x\ sin\ 2x + \frac{1}{2\cdot 2} e^x\ cos2x - \frac{1}{4}\ \int e^x \cos 2x\ dx$.

Перенося интеграл из правой части равенства в левую, получаем

$\frac{5}{4}\int e^x \cos 2x\ dx = \frac{1}{2} e^x\ sin2x + \frac{1}{4} e^x \cos 2x + c$.

$\int e^x\ cos2x\ dx = \frac{2}{5}\ e^x\ \sin 2x + \frac{1}{5} e^x\ cos2x + c = \frac{2}{5} e^x (sin2x + \frac{1}{2} e^x\ cos2x) + c$.

Пример 4. $\int \frac{\boldsymbol{xcosxdx}}{\boldsymbol{sin^3 x}}$.

Решение. Положим $u = x$; $dv = \frac{cosx}{sin^3 x} dx$, тогда $du = dx$;

$$v = \int \frac{\cos x}{sin^3 x} dx = \int \frac{dsinx}{sin^3 x} = \int sin^{-3} xd\ sinx = -\frac{1}{2sin^2 x}.$$

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int \frac{x\ cosx}{sin^3 x} dx = -\frac{x}{2sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{sin^2 x} = -\frac{x}{2sin^2 x} - \frac{1}{2} ctgx + c.$$

Упражнения. Применяя метод интегрирования по частям, вычислить интегралы

1. $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1+x}} dx$. Ответ: $2\sqrt{1+x} arcsinx + 4\sqrt{1-x} + c$.

2. $\int(3x^2-x+4)e^{-\frac{x}{2}}dx$ Ответ: $-(6x^2+22x+52)e^{-\frac{x}{2}}+c.$

3. $\int\frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx.$ Ответ: $\sqrt{1+x^2}arctgx-ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c.$

4. $\int arccos\,x\,dx$ Ответ: $x\,arccos\,x-\sqrt{1-x^2}+c.$

5. $\int cos(2lnx)\,dx$ Ответ: $\frac{2x}{5}\left(sin(2lnx)+\frac{1}{2}cos\,(2lnx)\right)+c.$

6. $\int\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ Ответ: $2\sqrt{x}arctg\sqrt{x}-ln\left|1+x\right|+c.$

7. $\int sin\sqrt{x}dx$ Ответ: $-2\sqrt{x}cos\sqrt{x}+2sin\sqrt{x}+c.$

8. $\int\frac{xdx}{cos^2x}$ Ответ: $xtgx+ln\left|cosx\right|+c.$

1.2. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен

Для вычисления интегралов вида

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx;\ \int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;\ \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

содержащих квадратный трехчлен, применим следующее преобразование: выделим полный квадрат из квадратного трехчлена, в результате чего получим квадратный двучлен

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a(t^2\pm m^2).$$

После этого применяют формулы и уже известные методы интегрирования.

Пример 1. $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx.$

Решение. В знаменателе выделим полный квадрат

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx.$$

Сделаем замену $x-\frac{1}{2}=t,\ x=t+\frac{1}{2},\ dx=dt,$ т*огда получим*

$$\int\frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int\frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{3tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{3}{2}ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+c=\frac{3}{2}ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

Пример 2. $\int\frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx.$

Решение. В знаменателе выделим полный квадрат

$$\int\frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x+5}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x+5}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}dx\,.$$

Сделаем замену $x+\frac{1}{2}=t,x=t-\frac{1}{2},dx=dt,$ тогда получим

$$\frac{1}{2}\int\frac{t-\frac{1}{2}+5}{t^2+\frac{5}{4}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{t+\frac{9}{2}}{t^2+\frac{5}{4}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{t}{t^2+\frac{5}{4}}dt+\frac{9}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\int\frac{d\left(t^2+\frac{5}{4}\right)}{t^2+\frac{5}{4}}+\frac{9}{4}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}ln\left|\,t^2+\frac{5}{4}\,\right|+\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2t}{\sqrt{5}}+c=$$

$$=\frac{1}{4}ln\left|\;x^2+x+\frac{3}{2}\;\right|+\frac{9\sqrt{5}}{10}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+c.$$

Пример 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$.

Решение. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}ln\left|\,x-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-x+3}\,\right|+c=\frac{\sqrt{2}}{2}ln\left|\,x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,\right|+c$$

Пример 4. $\int\frac{x+4}{\sqrt{2x^2-3x+5}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{x+4}{\sqrt{2x^2-3x+5}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x+4}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}}dx.$$

Сделаем замену $x-\frac{3}{4}=t, x=t+\frac{3}{4}, dx=dt$, тогда получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{t+\frac{19}{4}}{\sqrt{t^2+\frac{31}{16}}}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+\frac{31}{16}}}+\frac{19}{4\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{31}{16}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(t^2+\frac{31}{16}\right)}{\sqrt{t^2+\frac{31}{16}}}+$$

$$+\frac{19}{4\sqrt{2}}ln\left|\,t+\sqrt{t^2+\frac{31}{16}}\,\right|+c=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{t^2+\frac{31}{16}}+\frac{19}{4\sqrt{2}}ln\left|\,t+\sqrt{t^2+\frac{31}{16}}\,\right|+c=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-3x+5}+\frac{19\sqrt{2}}{8}ln\left|\,x-\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2-3x+5}\,\right|+c.$$

Упражнения. Вычислить интегралы

1. $\int\frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx$. Ответ: $\frac{2}{3}ln\left|\,3x^2+2x+5\,\right|+\frac{20}{3\sqrt{14}}\cdot arctg\frac{3x+1}{\sqrt{14}}+c$.
2. $\int\frac{dx}{4x^2+8x+13}$ Ответ: $\frac{1}{6}arctg\frac{2(x+1)}{3}+c$.
3. $\int\frac{3x-4}{\sqrt{2x^2+2x+5}}dx$. Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+2x+5}-\frac{11}{2\sqrt{2}}ln\left|\,x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{5}{2}}\,\right|+c$.
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$. Ответ: $\frac{1}{3}arcsin\frac{3x-1}{3}+c$.
5. $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$. Ответ: $\frac{1}{3}ln\left|\,\frac{x-5}{x-2}\,\right|+c$.
6. $\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx$. Ответ: $\frac{3}{8}ln(4x^2-4x+17)+\frac{1}{16}arctg\frac{2x-1}{4}+c$.
7. $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$. Ответ: $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+c$.

8. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$.Ответ:$\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right|+c.$

9. Интегрирование тригонометрических выражений

1. Интегралы вида $\int sin^m x cos^n x dx$ вычисляют с помощью различных тригонометрических формул, применение которых зависит от показателей степеней m и n. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи:
а) если хотя бы одно из чисел m и n положительно и нечетно, то от нечетной степени отделяют множитель sin$x$ (или $cosx$), а оставшийся множитель в четной степени преобразуют по формуле $\sin^2 x$ = 1-$\cos^2 x$ (или $\cos^2 x$ = 1-$\sin^2 x$) и применяют подстановку t = cos$x$ (или $t = sinx$);
б) если оба показателя m и n положительные и четные числа (или один из них - нуль), то показатели степени понижаются с помощью формул:
$sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$; $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$;
в) если $m + n = -2k$ ($k \in N$), то подынтегральную функцию записывают (или она уже записана) в виде дроби, в знаменателе которой выделяют множитель $cos^2 x$(или $sin^2 x$). Так как $\frac{dx}{cos^2 x} = dtgx$ ($\frac{dx}{sin^2 x} = -dctgx$), то делаем подстановку $t = tgx$ ($t = ctgx$).
2. Интегралы вида $\int sin mx \cos nx dx$; $\int cos mx \cos nx dx$;
$\int sin mx \sin nx dx$ находятся с помощью применения формул:
$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$;
$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - в) - \cos(\alpha+\beta))$;
$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.
3. Интегралы вида $\int R(sinx,\ cosx)dx$, где R - рациональная функция, аргументами которой являются sin$x$ и cos$x$, в общем случае приводятся к интегралам от рациональных функций с аргументом t с помощью универсальной подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. При этом используются формулы

$$\sin x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ \ x = 2arctgt;$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Универсальная подстановка часто ведет к громоздким выкладкам, поэтому ее следует применять лишь в тех случаях, когда невозможно найти более легкий способ нахождения интеграла.

Если подынтегральная функция обладает одним из следующих свойств:
$R(-sinx, cosx) = -R(sinx,cosx)$;$R(sinx,-cosx) = -R(sinx,cosx)$; или
$R(-sinx,-cosx) = R(sinx,cosx)$, то для нахождения интеграла
$\int R(sinx,\cos x)dx$ целесообразно использовать одну из подстановок t = cos$x$,
t = sinx или $t = tgx$ соответственно.

Пример 1. $\int sin^2xcos^5xdx$.

Решение. Здесь *m=2*, *n=5*. Выполнив преобразования и применив соответствующую подстановку, получим

$$\int sin^2xcos^5xdx = \int sin^2xcos^4xcosxdx =$$

$$= \int sin^2x(1-sin^2x)^2d\,sinx = \ [sinx = t] = \int t^2(1-t^2)^2dt =$$

$$= \int t^2(1-2t^2+t^4)dt = \int (t^2-2t^4+t^6)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^7}{7} + c =$$

$$= \frac{sin^3x}{3} - \frac{2sin^5x}{5} + \frac{sin^7x}{7} + c.$$

Пример2. $\int cos^4xdx$.

Решение. Здесь *m=0, n*=4. Используя формулы понижения степени, получаем

$$\int cos^4xd = \int (cos^2x)^2dx = \int \left(\frac{1+cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2cos2x+cos^22x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2cos2x+\frac{1+cos4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}+2cos2x+\frac{cos4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\int dx + \frac{1}{2\cdot 2}\int cos2xd2x + \frac{1}{8\cdot 4}\int cos4xd4x = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin2x +$$

$$+ \frac{1}{32}sin4x + c.$$

Пример 3. $\int \mathbf{cos2x\ sin5xdx}$.

Решение. Применив формулу sinα cosβ =$\frac{1}{2}$ (sin($\alpha-\beta$) + sin ($\alpha+\beta$)), получим

$$\int cos2xsin5xdx = \frac{1}{2}\int (sin7x+sin3x)dx = \frac{1}{2\cdot 7}\int sin7xd7x + \frac{1}{2\cdot 3}\int sin3xd3x =$$

$$= -\frac{1}{14}cos7x - \frac{1}{6}cos3x + c.$$

Пример 4. $\int \frac{dx}{5sinx+3cosx+3}$.

Решение. Подынтегральная функция рационально зависит от *sinx и cosx*. Применим подстановку $tg\frac{x}{2} = t$, тогда $sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}$; $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Получим $\int \frac{dx}{5sinx+3cosx+3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+3} = \int \frac{2dt}{10t+3-3t^2+3+3t^2} =$

$$= \int \frac{dt}{5t+3} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5t+3)}{5t+3} = \frac{1}{5}ln\left|5t+3\right| + c = \frac{1}{5}ln\left|5tg\frac{x}{2}+3\right| + c$$

Пример 5. $\int \boldsymbol{tg^35xdx}$.

Решение. $\int \frac{sin^35x}{cos^35x}dx = \int \frac{sin^25x}{cos^35x}sin5xdx = -\frac{1}{5}\int \frac{1-cos^25x}{cos^35x}dcos5x =$

$$-\frac{1}{5}\left(\int \frac{dcos5x}{cos^35x} - \int \frac{dcos5x}{cos5x}\right) = -\frac{1}{5}\left(\int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{t^{-2}}{-2} - ln\left|t\right|\right) + c =$$

$$=\frac{1}{10t^2}+\frac{1}{5}ln\,|\,t\,|\,+c=\frac{1}{10cos^2 5x}+\frac{1}{5}ln\,|\,cos5x\,|\,+c.$$

Пример 6. $\int \mathbf{tg}^{\,5}\mathbf{x}\mathbf{dx}$.

Решение. $\int \mathbf{tg}^{\,3}\mathbf{x}\mathbf{tg}^2\mathbf{x}\mathbf{dx}=\int \mathbf{tg}^{\,3}\mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{sin}^2\mathbf{x}}{\mathbf{cos}^2\mathbf{x}}\mathbf{dx}=\int \mathbf{tg}^{\,3}\mathbf{x}\cdot\frac{1-\mathbf{cos}^2\mathbf{x}}{\mathbf{cos}^2\mathbf{x}}\mathbf{dx}=$

$$=\int\frac{tg^3x}{cos^2x}dx-\int tg^3xdx=\int tg^3xdtgx-\int tg^2xtgxdx=$$

$$=\frac{tg^4x}{4}-\int tgx\frac{sin^2x}{cos^2x}dx=\frac{tg^4x}{4}-\int tgx\cdot\frac{1-cos^2x}{cos^2x}dx=$$

$$=\int\frac{tg^4x}{4}-\int tgxdtgx+\int tgxdx=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}+\int\frac{sinx}{cosx}dx=$$

$$=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}+\int\frac{dcosx}{cosx}=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-ln\,|\,cosx\,|\,+c.$$

Упражнения. Вычислить интегралы

1. $\int sin^4xcos^5xdx.$ Ответ: $\frac{1}{5}sin^5x-\frac{2}{7}sin^7x+\frac{1}{9}sin^9x+c.$
2. $\int sin^4xdx.$ Ответ: $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}sin2x+\frac{1}{32}sin4x+c.$
3. $\int ctg^4xdx.$ Ответ: $x-\frac{1}{3}ctg^3x+ctgx+c.$
4. $\int tg^7xdx.$ Ответ: $\frac{tg^6x}{6}-\frac{tg^4x}{4}+\frac{tg^2x}{2}+ln\,|\,cosx\,|\,+c.$
5. $\int\frac{cos^5xdx}{sin^6x}.$ Ответ: $-\frac{1}{5sin^5x}+\frac{2}{3sin^3x}-\frac{1}{sinx}+c.$
6. $\int\frac{dx}{sin^3x}.$ Ответ: $-\frac{1}{8tg^2\frac{x}{2}}+\frac{ln\,|\,tg\frac{x}{2}\,|}{2}+\frac{tg^2\frac{x}{2}}{8}+c.$
7. $\int\frac{sin^4x}{cos^8x}dx.$ Ответ: $\frac{tg^5x}{5}+\frac{tg^7x}{7}+c.$
8. $\int\frac{dx}{2+sinx}.$ Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+c.$

1.4. Интегрирование рациональных дробей

1. Интегрирование простейших дробей.

Рациональной дробью называется дробь вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^m+\ldots+a`_1x+a_0}{b_nx^n+\ldots+b`_1x+b_0}\ ,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя $(m < n)$, в противном случае дробь называется неправильной.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующего вида:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$; где m - целое число, $m \geq 2$.

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; где $p^2-4q<0$, т.е. квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ где n - целое число, $n\geq 2$ и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней ($p^2-4q<0$).

Рассмотрим интегралы от простейших дробей первых трех типов.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln\left|x-a\right| + c;$

II. $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = \frac{-A}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + c\,;$

III. $\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c\,;$

Действительно, $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2 + a^2$, где $t = x + \frac{p}{2}$,

$a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\frac{t}{a} + c = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c.$$

Интегралы типа III рассмотрены в пункте 1.2.

Для нахождения интеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ *(n* - целое положительное число) имеет место следующая рекуррентная формула:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Эта формула позволяет после *(n -1)* кратного применения свести данный интеграл I_n к табличному интегралу $\int \frac{dt}{a^2+t^2}$.

Пример 1. $I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ **.**

Решение. Здесь $n = 3$. После применения рекуррентной формулы получаем

$$I_3 = \frac{1}{2(3-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{3-1}} + \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}\cdot I_{3-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}I_2\,.$$

К интегралу $\boldsymbol{I_2} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ снова применим рекуррентную формулу (здесь $n=2$)

$$I_2 = \frac{1}{2(2-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot I_{2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 =$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}arctgx + c.$$

Итак, $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}arctgx + c.$

Рассмотрим интегралы типа IV:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx +$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}\,.$$

Первый интеграл в правой части равенства легко находится с помощью подстановки $x^2+px+q=t$, а второй преобразуем следующим образом:

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}$$

Полагая $x+\frac{p}{2}=t$, $dt=dx$ и $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, получаем

$$\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}\ .$$

Пример 2. $\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+2)+(2-3)}{(x^2+2x+10)^2}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx-$$
$$-\int\frac{dx}{((x+1)^2+9)^2}$$

В первом интеграле сделаем замену $x^2+2x+10=z$; $(2x+2)dx=dz$, а во втором интеграле положим $x+1=t$; $dx=dt$. Отсюда

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2}-\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=\frac{3}{2}\int z^{-2}dz-\int\frac{dt}{(t^2+9)^2}=$$
$$=-\frac{3}{2}z^{-1}-\left[\frac{1}{2(2-1)\cdot 9}\cdot\frac{t}{(t^2+9)^{2-1}}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot\int\frac{dt}{t^2+9}\right]=$$
$$=-\frac{3}{2z}-\frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9}-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+c$$

Окончательно получим

$$\int\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}dx=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{(x+1)^2+9}-\frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3}+c=$$
$$=-\frac{3}{2(x^2+2x+10)}-\frac{1}{18}\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+10}-\frac{1}{54}arctg\frac{x+1}{3}+c.$$

2. Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби.

Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ надо сделать следующие алгебраические преобразования и вычисления:

а) если дана неправильная дробь, то выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ - многочлен, а $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь;

б) разложить знаменатель дроби на линейные и квадратичные множители:

$$Q(x) = (x-a)^m \dots (x^2+px+q)^n \dots ,$$
где квадратичные множители не имеют действительных корней;
в) правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби:
$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}$$
$$+ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q} + \dots;$$
г) вычислить неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_n, C_n, \dots$, для чего привести равенство к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^3-x}$.

Решение. Разложим знаменатель на простые множители $x^3 - x =$ $= x(x-1)(x+1)$. Тогда подынтегральная дробь представится в виде суммы простых дробей
$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$
Приводя правую часть к общему знаменателю и освободившись от него, находим
$$1 = A(x^2-1) + B(x^2+x) + C(x^2-x)$$
$$1 = x^2(A+B+C) + x(B-C) - A.$$
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, запишем систему уравнений относительно искомых коэффициентов
$$x^2 \left| \quad A+B+C=0 \right.$$
$$x^1 \left| \quad B-C=0 \right.$$
$$x^0 \left| \quad -A=1 \right.$$
Откуда находим $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $A = -1$. Таким образом,
$$\int \frac{dx}{x^3-x} = \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$
$$-ln|x| + \frac{1}{2}ln|x-1| + \frac{1}{2}ln|x+1| + c = ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right| + c.$$
Пример 2. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Ее знаменатель раскладывается на линейные и квадратичные множители, причем множитель x^2+1 не имеет действительных корней.

Представим данную правильную дробь в виде суммы простейших дробей

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Многочлен $(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$ имеет два равных корня $x_1 = x_2 = 1$, поэтому ему в разложении соответствует две дроби $\frac{A}{x-1}$ и $\frac{B}{(x-1)^2}$. Теперь приведем это разложение к общему знаменателю, а затем, освободившись от него, получим

$1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2;$

$1 = A(x^3 - x^2 + x - 1) + B(x^2+1) + C(x^3 - 2x^2 + x) + D(x^2 - 2x + 1);$

$1 = (A+C)x^3 + (-A+B-2C+D)x^2 + (A-C-2D)x + (-A+B+D).$

$x^3 \,|\quad A + C = 0$

$x^2 \,|\, -A + B - 2C + D = 0$

$x^1 \,|\quad A + C - 2D = 0$

$x^0 \,|\, -A + B + D = 1$

Откуда находим $A = -\frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$; $C = \frac{1}{2}$; $D = 0$.

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+1)} = \int \frac{-\frac{1}{2}dx}{x-1} + \int \frac{\frac{1}{2}dx}{(x-1)^2} + \int \frac{\frac{1}{2}xdx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = -\frac{1}{2}ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}ln(x^2+1) + c.$$

Пример 3. $\int \frac{x^3-5}{x^2+4x+3}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь неправильная. Следует выделить целую часть и перейти к правильной дроби:

$$\frac{x^3-5}{x^2+4x+3} = x - 4 + \frac{13x+7}{x^2+4x+3}.$$

Тогда данный интеграл представим в виде суммы двух интегралов

$$\int \frac{x^3-5}{x^2+4x+3}dx = \int (x-4)dx + \int \frac{13x+7}{x^2+4x+3}dx = \frac{(x-4)^2}{2} +$$

$$+ \int \frac{13x+7}{x^2+4x+3}dx$$

Подынтегральная дробь правильная. Разложим знаменатель дроби на простые множители: $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$, тогда подынтегральная дробь представится в виде суммы простых дробей

$$\frac{13x+7}{x^2+4x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и освободившись от него, получим

$13x + 7 = A(x+1) + B(x+3)$

$13x + 7 = x(A+B) + A + 3B.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, запишем систему уравнений относительно искомых коэффициентов

$$x^1 \,\middle|\, A + B = 13$$

$$x^0 \,\middle|\, A + 3B = 7\ .$$

Откуда находим $B = -3;\ A = 16$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^3 - 5}{x^2 + 4x + 3} dx = \frac{(x-4)^2}{2} + 16\int \frac{dx}{x+3} - 3\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{(x-4)^2}{2} + 16ln|x+3| - 3ln|x+1| + c.$$

Упражнения. Найти интегралы

1. $\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx.$ Ответ: $ln\left|\frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}\right| + c$.
2. $\int \frac{dx}{x^4-1}$. Ответ: $\frac{1}{4}ln|x-1| - \frac{1}{4}ln|x+1| - \frac{1}{2}arctgx + c.$
3. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} dx.$ Ответ: $-\frac{1}{4}ln|x| + \frac{1}{6}ln|x-2| + \frac{13}{12}ln|x+4| + c.$
4. $\int \frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2} dx$. Ответ: $\frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$
5. $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx.$ Ответ: $-\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + c$.
6. $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2} dx$. Ответ: $-\frac{1}{6}ln|x+1| + \frac{1}{6}ln|x-1| + \frac{2}{3\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + c.$
7. $\int \frac{(x+1)^3+x^4}{x^3-4x} dx$. Ответ: $\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{4}ln|x| + \frac{43}{8}ln|x-2| + \frac{15}{8}ln|x+2| + c.$

1.5. Интегрирование простейших иррациональностей

Интегралы вида $\int R\left(x,\ x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$ где R - рациональная функция своих аргументов; $m, \dots, r,\ n, \dots,\ s$ - целые числа, подстановкой $x = t^k$, (где k - наименьшее общее кратное чисел $n, \dots s$) приводятся к интегралам от рациональных функций.

Подобным образом находятся интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx.$$

Здесь используется подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}$.

Решение. Производим подстановку $x = t^6$, так как $k = НОК(2;3) = 6$. Тогда $dx = 6t^5dt$. Следовательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t^2+1)} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 6t - 6arctg\ t + c = 6\left(\sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}\right) + c.$

Пример 2. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

Решение. Сделаем замену $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$, тогда $t^2 = \frac{1+x}{1-x}, x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, 1+x = \frac{2t^2}{t^2+1},$ $dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}.$

Следовательно, искомый интеграл примет вид

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + c = 2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c.$$

Пример 3. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}dx.$

Решение. Сделаем замену $x = t^6$, так как k =*НОК(2;3)*=6. Тогда $dx = 6t^5 dt$.
Следовательно, искомый интеграл примет вид

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[2]{x^2}+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t^3}{t^4+t^3} \cdot 6t^5 dt = 6\int \frac{t^5}{t+1}dt =$$

$$= 6\int \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\int (t^4 - t^3 + t^2 - t + 1)\,dt -$$

$$-6\int \frac{dt}{t+1} = 6\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\right) - 6ln|t+1| + c =$$

$$= 6\left(\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{x}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}\right) - 6ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c.$$

Пример 4. $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{(3+2x)^2} - \sqrt{3+2x}}$.

Решение. Сделаем замену $3 + 2x = \mathbf{t^6}$, так как k-= *НОК*(2**;** *3)*= 6.
Тогда $2dx = 6t^5 dt,\ dx = 3t^s dt,\ \sqrt[3]{\mathbf{(3+2x)^2}} = \mathbf{t^4},\ \sqrt{\mathbf{3+2x}} = \mathbf{t^3}$.
Следовательно, искомый интеграл примет вид

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2} - \sqrt{3+2x}} = \int \frac{3t^5}{t^4 - t^3}dt = 3\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 3\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 3\left(\int tdt + \int dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) = 3\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + c =$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{3+2x} + \sqrt[6]{3+2x} + ln\left|\sqrt[6]{3+2x} - 1\right|\right) + c.$$

Упражнения. Найти интегралы

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx.$ Ответ: $6ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + c.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$. Ответ: $4ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + \frac{4}{\sqrt[4]{x}+1} + c.$

3. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$. Ответ: $ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c.$

4. $\int \frac{2x+5}{\sqrt[3]{6x+1}} dx$. Ответ: $\frac{2}{5}\,(x+1)\sqrt[3]{(6x+1)}^2 + \text{c}.$

5. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}} dx$.

Ответ: $6\left(\frac{1}{9}(\mathrm{x}+1)^{3/2} - \frac{1}{8}(\mathrm{x}+1)^{4/3} +\right.$
$+\frac{1}{7}(\mathrm{x}+1)^{7/6} - \frac{1}{6}(\mathrm{x}+1) + \frac{1}{5}(\mathrm{x}+1)^{5/6} -$
$\left.-\frac{1}{4}(\mathrm{x}+1)^{2/3}\right) + \text{c}.$

1.6. Интегрирование с помощью тригонометрических подстановок

Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки.
Для интеграла $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ делаем подстановку $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$); для $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$- подстановку $x=atgt$ (или $x = actgt$); для $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$- подстановку $x = \frac{a}{cost}$ (или $x = \frac{a}{sint}$).

Пример 1. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $x = a\sin t$, тогда $dx = acostdt$ и данный интеграл примет вид

$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{a^2-a^2sin^2t}}{asint}acostdt = a\int \frac{cos^2t}{sint}dt = a\int \frac{1-sin^2t}{sint}dt = a\int \frac{dt}{sint}$ - $a\int sintdt =$
$=a\int \frac{sintdt}{sin^2t} + acost + c =$ -$a\int \frac{dcost}{1-cos^2t} + acost + c = \frac{a}{2}ln\left|\frac{1-cost}{1+cost}\right| + acost + c.$

Таким образом получаем

$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = -\frac{a}{2}ln\left|\frac{1+cost}{1-cost}\right| + acost + c = \frac{a}{2}ln\left|\frac{1-cost}{1+cost}\right| + acost$, где $sint = \frac{x}{a}$; $cost =$
$= \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = = \frac{a}{2}\ln\left|\frac{1-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}{1+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}\right| + a\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + c = \frac{a}{2}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + \sqrt{a^2-x^2} + c.$$

Пример 2. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx$.

Решение. Сделаем замену $x = 4sint$, тогда $dx=4costdt$; $sint = \frac{x}{4}$;

$t = arcsin\frac{x}{4}$ и данный интеграл примет вид

$$\int x^2\sqrt{16-x^2}dx = \int 16sin^2 t\sqrt{16-16sin^2t}4costdt = 256\int sin^2tcos^2tdt =$$

$$= 64\int sin^2 2tdt = 32\int(1-cos4t)dt = 32t - 8sin4t + c = 32arcsin\frac{x}{4} -$$

$$-8sin4\left(arcsin\frac{x}{4}\right) + c = 32arcsin\frac{x}{4} - \frac{x}{4}(8-x^2)\sqrt{16-x^2} + c$$

Упражнения. Найти интегралы

1. $\int\sqrt{4-x^2}\,dx.$ Ответ: $2arscin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c.$
2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx.$ Ответ: $\frac{1}{8}arcsinx - \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}\,(1-2x^2) + c.$
3. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx.$ Ответ: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c.$
4. $\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx.$ Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-9}+x}{\sqrt{x^2-9}-x}\right| - \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + c.$

5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Разделим отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками x_i:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

Выберем на каждом элементарном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ произвольную точку z_k и найдем длину каждого такого отрезка: $\Delta x_к = x_к - x_{k-1}$.

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$называется сумма

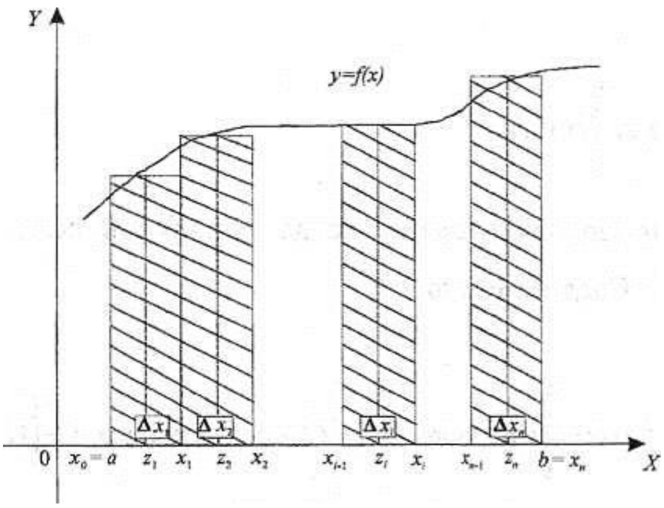
вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k = f(z_1)\Delta x_1 + f(z_2)\Delta x_2 + \ldots + f(z_k)\Delta x_k$$

Если существует конечный предел последовательности $\{S_n\}$ интегральных сумм, не зависящей от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на элементарные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, и выбора точек z_k на этих отрезках, при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю ($max\Delta x_k \to 0$), то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a,b]$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k.$$

Обозначается определенный интеграл символом $\int_a^b f(x)dx$, отрезок $[a,b]$ называют промежутком интегрирования, a и b - пределы интегрирования, a называют нижним, b - верхним пределами интегрирования, *f(x)*-подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования.



Для вычисления определенных интегралов используется формула Ньютона-Лейбница: если функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ − первообразная функция для $f(x)$.

Свойства определенного интеграла:

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

2. Если нижний предел интеграла равен верхнему, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Если нижний и верхний пределы интегрирования поменять местами, то интеграл изменит свой знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Для любых a, b и с имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Данное свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых. Будем полагать далее, что $a < b$.

7. Если $f(x) \geq 0$ всюду на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

8. Если $f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$$

9. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

10. Если M , m соответсвенно максимум и минимум $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

11. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\mathrm{c})(b-a)$$

Это свойство называется теоремой о среднем, которая утверждает, что найдется такая точка c на отрезке $[a, b]$, что площадь под кривой $y = f(x)$ на $[a, b]$ равна площади прямоугольника со сторонами $f(\mathrm{c})$ и $(b - a)$.

2.1/ Замена переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \int\limits_\alpha^\beta \boldsymbol{f(\varphi(t))\varphi'(t)dt},$$

где $x = \boldsymbol{\varphi}(t)$ - функция, непрерывная вместе со своей производной $\boldsymbol{\varphi}'(\mathrm{t})$ на отрезке $\alpha<t<\beta$, $a = \boldsymbol{\varphi}(\alpha), b = \boldsymbol{\varphi}(\beta),\ f(\boldsymbol{\varphi}(t))$ - функция, непрерывная на $[\alpha, \beta\ ]$.

Пример 1. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(lnx)^2}}$.

Решение. Положим $\ln x = \mathrm{t}$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$, если $x = 1$, то $t = 0$; если $x = \sqrt{e}$, то $t = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(lnx)^2}} = \int\limits_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsint\Bigg|_0^{1/2} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xdx$.

Решение. Положим cos$x$ = t, тогда –sinxdx = dt, если x = 0, то t = 1; если $x = \frac{\pi}{2}$, то t = 0. Следовательно

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xsinxdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos^2x)sinxdx$=

$$= -\int_1^0 (1-t^2)dt = \int_0^1 (1-t^2)dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 t^2dt = t\Big|_0^1 - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Пример 3. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. Положим x = sint, тогда dx = costdt; если x = 0, то t = 0; если x=1, то $t = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, получим $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin^2t}\,costdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2t)dt \; = \frac{1}{2}\left(t + \frac{sin2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{sin0}{2}\right) = \frac{p}{4}$.

Упражнения. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; Ответ: 4 – 2ln3.
2. $\int_0^{ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$; Ответ: 4 - π.
3. $\int_0^1 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$; Ответ: $\frac{9}{28}$.
4. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; Ответ: $\frac{\pi a^4}{16}$.
5. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$; Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

2.2. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Имеет место следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке [a,b].

Пример 1. $\int_0^3 xarctgxdx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Положим u = $arctgx$, dv = xdx, тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$.

Имеем $\int_0^3 xarctgxdx. = \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{9}{2}arctg3 -$

$$-\frac{1}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}(x-arctgx)\Big|_0^3=5arctg3-\frac{3}{2}.$$

Пример 2. $\int_1^e(1+lnx)^2dx.$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Положим $(1+lnx)^2=u, dv=dx,$ тогда $du=2(1+lnx)\frac{dx}{x}; v=x.$

Имеем $\int_1^e(1+lnx)^2dx=x(1+lnx)^2\Big|_1^e-2\int_1^e(1+lnx)dx.$

Применим еще раз формулу интегрирования по частям. Положим *1+lnx=u, dv=dx, тогда* $du=\frac{1}{x}dx$; *v* = *x*. Получим $\int_1^e(1+lnx)^2dx=x(1+lnx)^2\Big|_1^e-$

$-2\left((1+lnx)x\right)\Big|_1^e+2\int_1^e x\frac{dx}{x}=x(1+lnx)^2\Big|_1^e-2x(1+lnx)\Big|_1^e+2x\Big|_1^e=$

$e(1+lne)^2-(1+\boldsymbol{ln}1)^2-2e(1+lne)++2(1+ln1)-2=$

$=4e-1-4e+2+2e-2=2e-1.$

Пример 3. $\int_0^{2\pi}xcos^2xdx.$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. Положим

$u=x, dv=cos^2xdx,$

Тогда $du=dx, v=\int cos^2xdx=\int\frac{1+cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin2x.$

Имеем $\int_0^{2\pi}xcos^2xdx.=x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin2x\right)\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sin2x\right)dx=$

$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}sin2x\right)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{4}x^2\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{8}cos2x\Big|_0^{2\pi}=2\pi^2-\frac{\pi}{2}sin4\pi-\pi^2+\frac{1}{8}cos4\pi-$

$-\frac{1}{8}cos0=2\pi^2-\pi^2=\pi^2.$

Упражнения. Вычислить определенные интегралы

1. $\int_0^1 xe^{2x}dx.$ Ответ: $\frac{e^2+1}{4}$.
2. $\int_0^1 arccosxdx.$ Ответ: 1.
3. $\int_0^{\pi^2}cos\sqrt{x}\,dx.$ Ответ: -4
4. $\int_0^{\frac{\pi^2}{2}}x^2sinxdx.$ Ответ: $\pi-2$.
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2cos^2tdt.$ Ответ: $\frac{\pi}{8}(\frac{\pi^2}{6}-1)$.
6. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}sin\sqrt{x}\,dx.$ Ответ: 2.

2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственными интегралами называются:

1) интегралы с бесконечными пределами;

2) интегралы от неограниченных функций.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[\,a, +\infty)$, тогда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если существует конечный предел в правой части формулы, то говорят, что несобственный интеграл сходится, если же предел равен бесконечности или вообще не существует, то интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечной нижней границей:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

где c – любая фиксированная точка оси OX, при этом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится только в том случае, если сходятся оба интеграла правой части.

Геометрически несобственный интеграл в случае $f(x) \geq 0$, есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямой $x = a$ и осью OX.

Пример 1. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{xln^3x}$.

Решение.

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{xln^3x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b} \frac{dlnx}{ln^3x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2ln^2x}\right)\Big|_{e^2}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2ln^2b} + \frac{1}{2ln^2e^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}.$$

Интеграл сходится и выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = e^2$, $y = 0$ и графиком функции $y = \frac{1}{xln^3x}$.

Пример 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

Решение. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} \frac{dx}{x^2+2x+10} + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} \frac{dx}{x^2+2x+10} =$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{dx}{(x+1)^2+3^2} + \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{dx}{(x+1)^2+3^2} = \lim_{a\to-\infty}(\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}\Big|_a^c) +$$

$$+\lim_{b\to\infty}(\frac{1}{3}arctg\frac{x+1}{3}\Big|_c^b) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{3}arctg\frac{c+1}{3} - \frac{1}{3}arctg\frac{a+1}{3}\right) +$$

$$+\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}arctg\frac{b+1}{3} - \frac{1}{3}arctg\frac{c+1}{3}\right) = \frac{1}{3}arctg\frac{c+1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}arctg\frac{c+1}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 3. $\int_0^{+\infty} cos^2xdx.$

Решение. $\int_0^{+\infty} cos^2xdx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1+cos2xdx}{2} = \lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}\int_0^b dx + \frac{1}{2\cdot 2}\int_0^b cos2xd2x) =.$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x\Big|_0^b + \frac{1}{4}sin2x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}sin2b\right)$$

Так как $\lim_{b\to+\infty} sin2b$ не существует, то несобственный интеграл расходится.

Пример 4. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

Решение. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^b \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^b (1+x^2)^{-2}d(x^2+1) =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{(1+x^2)}\right]\Big|_0^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 5. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+4x^2}$.

Решение. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+(2x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\int_a^0 \frac{d2x}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} arctg2x\Big|_a^0 =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(arctg0 - arctga) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Упражнения. Найти несобственные интегралы.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx.$ Ответ: $\frac{\pi^2}{8}$, сходится.
2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}.$ Ответ: $\frac{\pi}{12}$, сходится.
3. $\int_2^{+\infty} \frac{lnx}{x}dx.$ Ответ: расходится.
4. $\int_0^{\infty} xsinxdx.$ Ответ: расходится.
5. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx.$ Ответ: 2, сходится.
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}.$ Ответ: π, сходится.
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} sinxdx.$ Ответ: расходится.

3.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим интегралы от неограниченных функций. Если функция $f\ (x)$ непрерывна для $x\epsilon[a,b)$ и в точке $x\ =\ b$ имеет бесконечный разрыв, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (1)$$

Если существует конечный предел в правой части формулы (1), то несобственный интеграл называется сходящимся; если этот предел равен бесконечности или не существует, то интеграл называется расходящимся.

Если функция $f\ (x)$ непрерывна для $x\epsilon(a;b]$ и в точке $x\ =\ a$ имеет бесконечный разрыв, то

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Если предел в правой части формулы (2) существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если функция $f\,(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c\epsilon(a,b)$ и непрерывна при $x\epsilon[a,c)\cup(c,b]$, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Если оба предела в правой части формулы (3) существуют и конечны, то несобственный интеграл называется сходящимся, и расходящимся, если не существует или равен бесконечности хотя бы один из них.

Пример 1. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+2)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ является неограниченной при $x=-2$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль, следовательно, в этой точке функция терпит бесконечный разрыв. Согласно определению имеем

$$\int_{-2}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-2+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x+2}\Big|_{-2+\varepsilon}^{0}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

Пример 2. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{lnx}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{lnx}}$ в точке $x\ =\ 1$ терпит бесконечный разрыв, так как знаменатель дроби обращается в нуль при $x = 1$.

По определению имеем

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{lnx}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{lnx}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{dlnx}{\sqrt[3]{lnx}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{ln^2x}\,\Big|_{1+\varepsilon}^{e} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{ln^2e} - \right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\sqrt[3]{ln^2(1+\varepsilon)}\right) = \frac{3}{2}.$$ Интеграл сходится.

Пример 3. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна в промежутке [1,3] за исключением точек x=1 и x=3, в которых знаменатель дроби обращается в нуль. Следовательно, имеем

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^{2} + \lim_{\text{e}\to 0} \arcsin(x-2)\Big|_{2}^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(arcsin0 - \arcsin(1+\varepsilon-2)) + \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon) - arcsin0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctgxdx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)$ = ctg$x$ в точке x = 0 терпит бесконечный разрыв. По определению имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctgxdx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} ctgxdx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{sinx} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{dsinx}{sinx} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(ln|sinx| \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(ln\left|sin\frac{\pi}{4}\right| - ln|sin\varepsilon| \right) = \infty.$$ Интеграл расходится.

Пример 5. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{dx}{(x-1)^2}$ в точке x = 1 терпит бесконечный разрыв. По определению имеем:

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\frac{1}{x-1} \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{1-\varepsilon-1} + 1 \right) = \infty.$$

Если один из интегралов равен бесконечности, то несобственный интеграл расходится.

Упражнения. Найти несобственные интегралы.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. Ответ: интеграл расходится.

2. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+5x}$. Ответ: интеграл расходится.

3. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. Ответ: $\frac{8}{3}$, интеграл сходится.

4. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x ln^2 x}$. Ответ: 1, интеграл сходится.

5. $\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$. Ответ: $14\frac{4}{7}$, интеграл сходится.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{cos^2 x}$. Ответ: интеграл расходится.

7. $\int_{-1}^{0} \frac{arccosx}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Ответ: $\frac{3\pi^2}{8}$, интеграл сходится.

8. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Ответ: $\frac{\pi}{3}$, интеграл сходится.

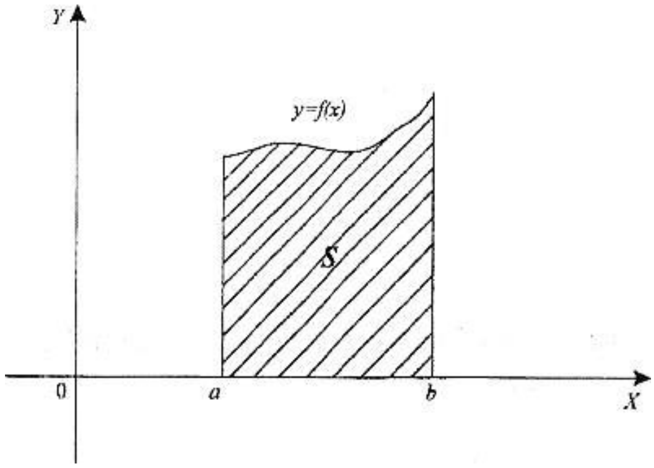
9. $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$. Ответ: 16, интеграл сходится

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРИИ И ЭКОНОМИКЕ

4.1. Площадь плоской фигуры

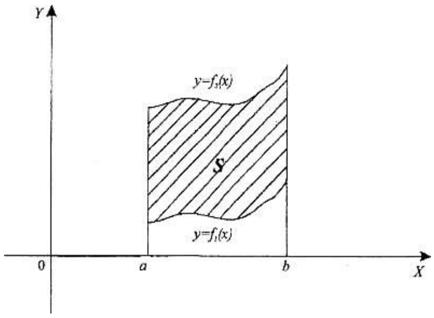
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(\ ) \geq 0)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком [a,b] оси *OX,* вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



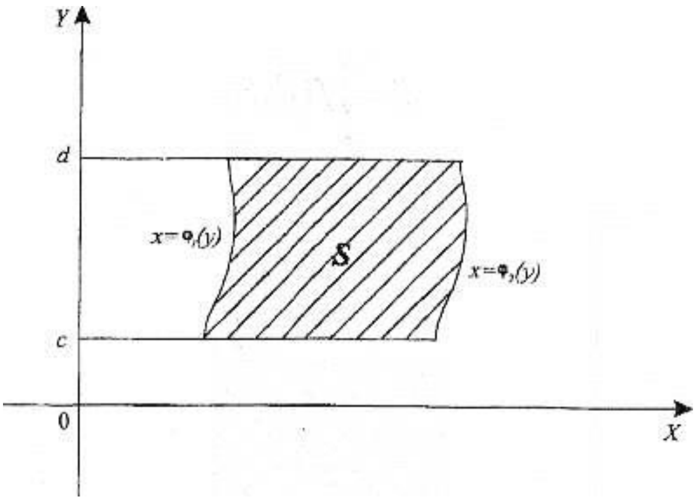
Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ $(f_1(x) \geq f_2(x))$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$



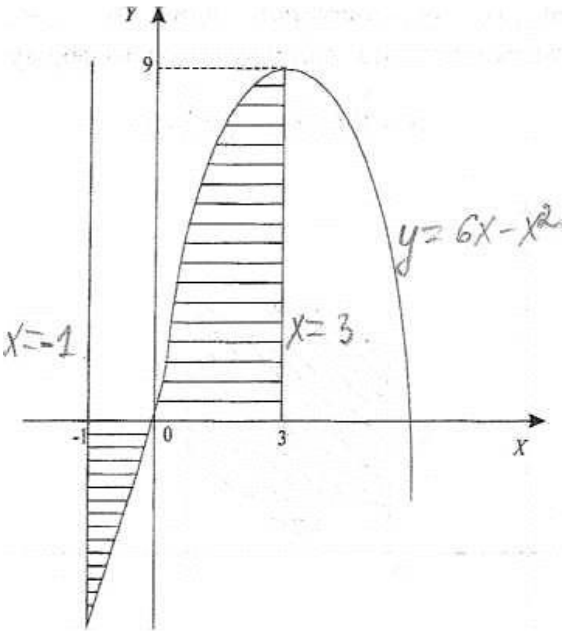
Если фигура ограничена кривыми $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ $(\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y))$ на отрезке $[c, d]$, и двумя прямыми $y = c$ и $y = d$, то площадь фигуры находится по формуле

$$S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))\, dy$$



Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 3$ и осью OX.

Решение. Сделаем чертеж.

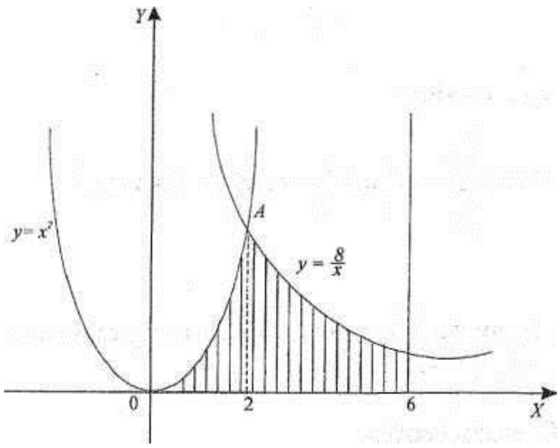


$$S = -\int_{-1}^{0} (6x - x^2)dx + \int_{0}^{3} (6x - x^2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2\right)\Big|_0^1 + \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3 =$$

$= 21\frac{1}{3}(\text{кв. ед.})$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $xy = 8$ и прямыми $x = 6$, $y = 0$.

Решение. Сделаем чертеж.



Найдем точки пересечения параболы и гиперболы. Для этого решим систему уравнений

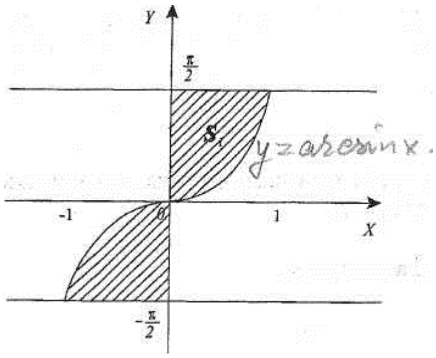
$$\begin{cases} y = x^2 \\ xy = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Точка пересечения параболы и гиперболы $A(2;\ 4)$.

$$S = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^6 \frac{8}{x} dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 8\ln|x|\,\Big|_2^6 = \frac{8}{3} + 8(ln6 - ln2) = \frac{8}{3} + 8ln3(\text{кв. ед.})$$

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную линиями y=arcsin$x$,
$y = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

Решение. Сделаем чертеж.

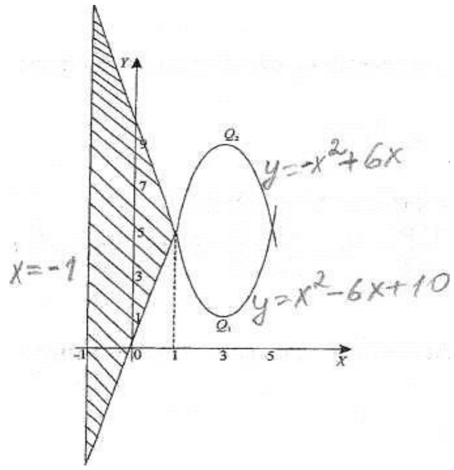


$S = 2\,S_1$, $y = arcsinx, x = siny$

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinydy = -2cosy\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(\cos\frac{\pi}{2} - cos0) = 2(\text{кв. ед.}).$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
$y = x^2 - 6x + 10$; $y = 6x - x^2$, $x = -1$.

Решение. Сделаем чертеж.



$y = (x–3)^2+1;$ $Q_1(3,1)$- вершина параболы, $y = -(x-3)^2 + 9$

Q_2 (3, 9) – вершина параболы.

Найдем точки пересечения парабол. Для этого решим систему уравнений:

$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 1 \\ y = 6x - x^2 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 - 6x + 1 = 6x - x^2; 2x^2 - 12x + 10 = 0;$

$x^2 – 6x+5 = 0; x_1= 1;. x_2=5.$

Точки пересечения парабол (1, 5); (5, 5).

Для вычисления данной площади воспользуемся формулой

$S = \int_a^b (f_2(\text{x}) - f_1(x))dx.$ Здесь $f_1(x) = 6x - x^2,$ $f_2(\text{x}) = x^2 - 6x + 1$

Имеем,

$$S = \int_{-1}^{1} ((x^2 - 6x + 10) - (6x - x^2))dx. = \int_{-1}^{1} (2x^2 - 12x + 10)dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right)\Big|_{-1}^{1} = 21\frac{1}{3}(\text{кв. ед.})$$

Упражнения.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - e^x$,

$x = 2,$ y = 0.

Ответ: $e^2 - 3$ (кв. ед.).

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x,$

$y = \frac{1}{\text{x}^2}$, y = 0, x = 3.

Ответ: $\frac{7}{6}$ (кв. ед.).

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$,

$xy = 8, x = 6.$

Ответ: $69\frac{1}{3} - 8ln3$ (кв. ед.).

4. Найти площадь, заключенную между параболой $y = x^2 - 2x + 2,$ касательной к ней в точке $A(3, 5)$ и осью $OУ$.

Ответ: 9 (кв. ед.).

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

y = cos$x$,$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y=0.

Ответ: $2 - \sqrt{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ (кв. ед.).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (кв. ед.).

4.2. Длина дуги кривой

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на этом отрезке, то длина дуги кривой между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Пример 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ между точками (0, 0) и (1, 1) ($y \geq 0$).

Решение. Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Таким образом,

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right)(\text{ед. дл.})$$

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 1 - e^x$ между точками $O(0, 0)$ и $B(2, 1-e^2)$.

Решение. Поскольку $y' = -e^x$, $1 + (y')^2 = 1 + e^{2x}$, $a = 0$, $b = 2$, имеем

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + e^{2x}}dx.$$

Вычислим интеграл

$$l = \int \sqrt{1 + e^{2x}}\,dx = \left|\begin{matrix} e^x = t; x = \ln t; \\ dx = \frac{dt}{t}. \end{matrix}\right| = \int \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{t}dt = \left|\begin{matrix} u = \frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{t}; dv = dt; \\ du = -\frac{dt}{t^2\sqrt{1+t^2}}; v = t \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{применим формулу} \\ \text{интергирования по} \\ \text{частям}\end{matrix}\right| = \sqrt{1 + e^{2x}} + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{1 + t^2}} = \sqrt{1 + e^{2x}} + \int \frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} =$$

$= \sqrt{1+e^{2x}} - \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}} = \sqrt{1+e^{2x}} - ln\left|\frac{1}{t} + \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}\right| + c =$

$= \sqrt{1+e^{2x}} - \ln\left(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}\right) + c.$

Тогда получим $l = \int_0^2 \sqrt{1+e^{2x}}dx = (\sqrt{1+e^{2x}} - \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}+1}))\,\Big|_0^2 =$

$= \sqrt{1+e^4} - \ln\left(e^{-2} + \sqrt{e^{-4}+1}\right) - \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) \approx 6{,}789$(ед. дл.).

Упражнения.

1. Вычислить длину дуги кривой y=lnsinx от x=$\frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ:$\frac{ln3}{2}$(ед.дл.).

2. Вычислить длину параболы $y = 4 - x^2$ между точками пересечения ее с осью OX.

Ответ: $2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17})$ (ед. дл.).

3. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

Ответ: $\frac{34}{3}$ ед. дл.

4.3. Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси OX, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

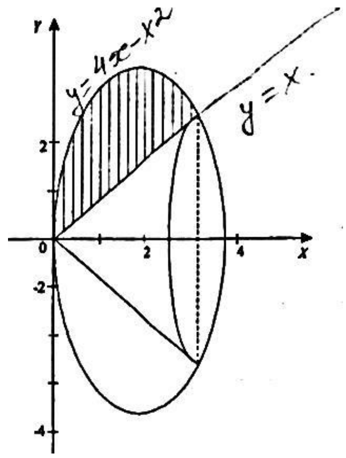
Если криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной кривой $x=\varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, вращается вокруг оси $OУ$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси OX, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

Пример 1. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = x$ вокруг оси OX.
Решение. Найдем точки пересечения кривых $y = 4x - x^2$ и $y = x$.



Для этого решим систему $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x \end{cases}$, получим $x_1 = 0,\ x_2 = 3$.

Откуда точки пересечения кривых O (0, 0) и B (3, 3). Искомый объем тела вращения равен разности двух объемов, образованных вращением вокруг оси OX криволинейных трапеций:

$$V_x = V_2 - V_1 = = \pi\int_0^3 (4x - x^2)^2 dx - \pi\int_0^3 x^2 dx = \pi\int_0^3 ((4x - x^2)^2 - x^2) dx =$$

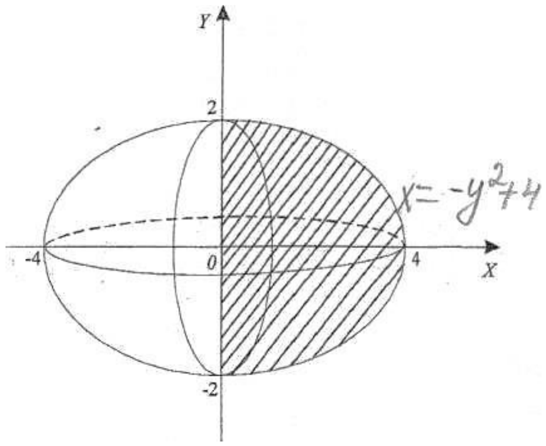
$$= \pi\int_0^3 (16x^2 - 8x^3 + x^4 - x^2) dx = \pi\int_0^3 (15x^2 - 8x^3 + x^4) dx =$$

$$= \pi\left(5x^3 - 2x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3 = \frac{108}{5}\pi \approx 21{,}6(\text{куб. ед.}).$$

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, лежащей в плоскости XOY и ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$ и $x = 0$.
Решение. Найдем точки пересечения параболы с осью OY. Пусть $x = 0$, тогда $y = \pm 2$. Откуда получим пределы интегрирования $c = -2, d = 2$. Следовательно, применив формулу $V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$, получим

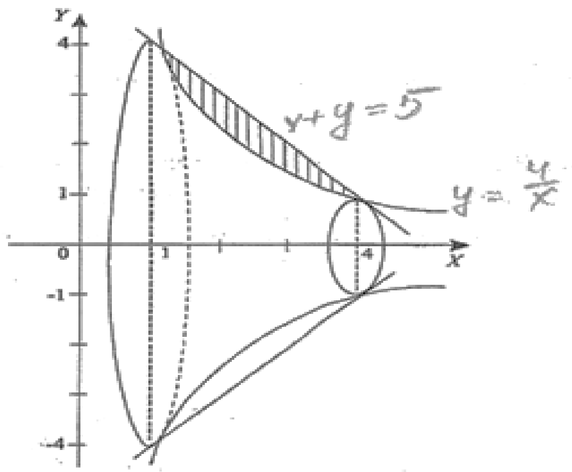
$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_{-2}^2 (4 - y^2)^2 \mathrm{dy} = 2\pi\int_0^2 (4 - y^2)^2 \mathrm{dy} = 2\pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + 4y^2) \mathrm{dy} =$$

$$= 2\pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 2\pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512\pi}{15} \approx 107{,}23(\text{куб. ед.}).$$



Пример 3. Фигура, ограниченная гиперболой $y = \frac{4}{x}$ и прямой $x + y = 5$ вращается вокруг оси *OX*. Найти объем тела вращения.

Решение. Построим фигуру, ограниченную гиперболой. Найдем точки пересечения линий, решив систему уравнений.



$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5) = 4 \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Итак, отрезок интегрирования [1,4]. Объем тела вращения находим как разность объемов, т.е.

$$\mathrm{V}_x = \mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1 = \pi \int_a^b \left(f_2(x)\right)^2 dx - \pi \int_a^b (f_1(x))^2 dx = \pi \int_a^b ({f_2}^2(x) - {f_1}^2(x)) dx,$$

где $f_2(x) = (5 - x),\ f_1(x) = \frac{4}{x}$.

Имеем

$$V_x = \pi \int_1^4 ((5-x)^2 - \frac{16}{x^2}) dx = \pi(-\frac{(5-x)^3}{3} + \frac{16}{x}) \Big|_1^4 = \pi \left(-\frac{1}{3} + 4 + \frac{64}{3} - 16\right) =$$

$$= 9\pi.$$

Ответ: $V = 9\pi(\text{куб. ед.})$.

Упражнения.

1. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, лежащей в плоскости XOY и ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.

Ответ: $\frac{16}{15}\pi$ (куб. ед.).

2. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ и осью OX.

Ответ: 24π (куб. ед.).

3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, где $y \geq 0$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

4. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$ вокруг: 1) оси OX; 2) оси OY.

Ответ: $\frac{6\pi}{7}$; $\frac{3\pi}{5}$.

4.4. Применение определенного интеграла в экономике. Экономический смысл интеграла

Пусть *функция* $z=f(t)$ описывает изменения производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объём продукции V, произведенный за промежуток времени [0, T].

Учитывая определение определенного интеграла получаем

$$V = \int_0^T f(t)dt,$$

т.е. если $f(t)$ – производительность труда в момент времени t, то $\int_0^T f(t)dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток [0, T].

В курсе микроэкономики рассматриваются так называемые предельные величины, т.е. для данной величины представляемой некоторой функцией $f(x)$, рассматривают ее производную $f'(x)$. Поэтому часто приходится находить экономическую функцию (первообразную) по данной функции предельных величин (производной).

Пример 1. Вычислить объем продукции, выпущенной рабочим за седьмой час рабочего дня, если производительность труда на этом отрезке времени задана формулой $f(t) = \frac{3}{4t+6} + 4$.

Решение.

$$V=\int_6^7\left(\frac{3}{4t+6}+4\right)dt=\frac{3}{4}ln|4t+6|\,\Big|_6^7+4t\,\Big|_6^7=\frac{3}{4}(ln34-ln30)+4=.$$

$$=\frac{3}{4}ln\frac{34}{30}+4=\frac{3}{4}ln\frac{17}{14}+4\approx 4{,}09(\text{ед. продукции})$$

Пример 2. Вычислить запас продукции *K* на складе, какой образуется за рабочий день, если поступление продукции описывается функцией $f(t)=3t^2+2t+3$ (рабочий день составляет 7 часов).

Решение.

$$K=\int_0^7(3t^2+2t+3)dt=3\frac{t^3}{3}\Big|_0^7+\frac{2t^2}{2}\Big|_0^7+3t\,\Big|_0^7=7^3+7^2+21=413(\text{ ед. товара}).$$

Пример 3. Найти среднее значение издержек $K(x)=6x^2+2x+1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от $x_1=1$ до $x_2=3$.

Решение. Если объем продукции изменяется от x_1 до x_2, то среднее значение издержек производства $K(x)$ выражается формулой

$$K(c)=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}K(x)dx.$$

Если $f(x)=6x^2+2x+1, x_1=1, x_2=3$, то

$$K(c)=\frac{1}{3-1}\int_1^3(6x^2+2x+1)dx=\frac{1}{2}(\,2x^3+x^2+x)\,\Big|_1^3=\frac{1}{2}(54+9+3-2-1-1)=31.$$

т.е. среднее значение издержек равно 31 денежной единице.

Пример 4. Найти объем произведенной продукции за время t = 6 час, если производительность труда задана функцией

$$f(t)=-t^2+10t(\text{ед/час})$$

Решение. Воспользуемся формулой нахождения объема продукции.

$$\mathrm{V}=\int_0^{\mathrm{t}}f(t)dt=\int_0^6(-t^2+10t)dt=\left(-\frac{t^3}{3}+\frac{10t^2}{2}\right)\Big|_0^6=108(\text{у. е.})$$

Пример 5. Найти дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 часов, если, производительность труда в течение дня изменяется по формуле:

$$f(t)=-0{,}2t^2+1{,}6t+3,$$

где t – время в часах.

Провести экономический анализ.

Решение. Дневную выработку найдем по формуле $\mathrm{Q}=\int_0^{\mathrm{t}}f(t)dt$.

$$Q=\int_0^8(-0{,}2t^2+1{,}6t+3)dt=F(t)\,\Big|_0^8=\left(-\frac{0{,}2}{3}t^3+0{,}8t^2+3t\right)\Big|_0^8=41{,}06\text{ у. е.}$$

Построим график функции.

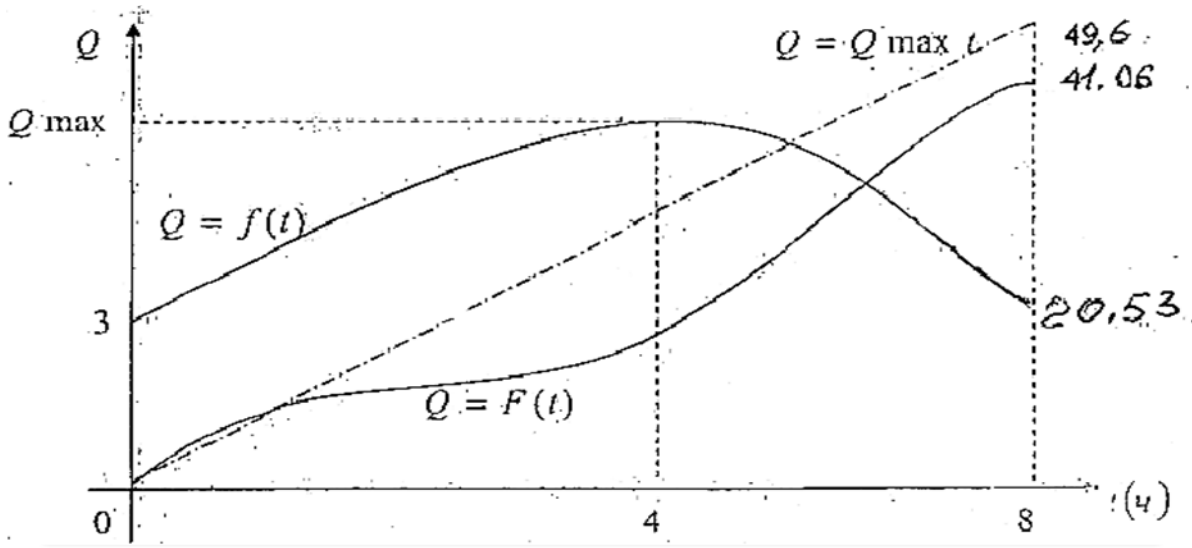


Рис. 1

Если бы в течение всего дня работа велась ритмично и с максимальной производительностью $f(t) = 6{,}2$, то дневная выработка составила бы Q max =49,6 или на 21% больше. На рис.1 дневная выработка численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $f(t)$, вторая кривая $F(t)$ показывает рост выпуска продукции во времени. Значение t=4 ч. соответствует точке перегиба кривой $F(t)$: в первой половине рабочего дня производительность выше, чем во второй. Прямая $Q = Q$ max t соответствует выпуску продукции с равномерной производительностью. В этом случае объем продукции составил бы 49,6 у.е.

Пример 6. Определить выработку рабочего:

а) за весь рабочий день;

б) за третий час работы;

в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов, а $f(t) = -3t^2 + 18t$ - производительность труда;

г) провести экономический анализ задачи.

Решение. Находим общую выработку рабочего за весь день (6 часов) по формуле $\mathrm{V} = \int_0^{\mathrm{t}} f(t)dt$;

$$V = \int_0^6 (-3t^2 + 18t)dt = (-\frac{3t^3}{3} + 18\frac{t^2}{2})\Big|_0^6 = (-t^3 + 9t^2)\Big|_0^6 =$$

$$= (-216 + 324) = 108(у.е)$$

Определяем выработку рабочего за третий час работы

$$V = \int_2^3 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2)\Big|_2^3 = 26(у.е).$$

Аналогично определяем выработку рабочего за последний час работы:

$$V = \int_5^6 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2)\Big|_5^6 = 8(у.е.).$$

За полный рабочий день выработка составила 108 у.е. продукции. За третий час работы 26 у.е., за последний час 8 у.е.. Вероятно, что работа утомительная и требует большого напряжения, поэтому к концу смены производительность труда падает.

Пример 7. Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба- Дугласа $\mathrm{Q} = \mathrm{AK}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}$, где $\mathrm{A}, \alpha, \beta,$ - неотрицательные константы и $\alpha + \beta \leq 1$, К - объем фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (скажем, число станков), L - объём трудовых ресурсов (число рабочих, число человеко-дней), Q - выпуск продукции в стоимостном, либо в натуральном выражении.

Если в функции Кобба-Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{rt}$. Тогда объем выпускаемой продукции за время T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{rt}dt$$

Найти объем продукции, произведенный за 5 лет, если
функция Кобба-Дугласа имеет вид $f(t) = (1 + t)e^{2t}$.

Решение. Объем произведенной продукции равен

$$Q = \int_0^5 (1 + t)e^{2t}dt$$

Используем для вычисления интеграла метод интегрирования по частям.
Пусть $u = 1 + t, du = dt,\ dv = e^{2t}dt, v = \frac{1}{2}e^{2t}$.Тогда

$$Q = \frac{1}{2}(1 + t)e^{2t}dt\Big|_0^5 - \frac{1}{2}\int_0^5 e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}(1 + t)e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t}\Big|_0^5 = 7549899(у.е).$$

Нахождение среднего времени изготовления изделия

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии.

Тогда среднее время $t_{\text{ср.}}$ затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{\text{ср.}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий $t=t(x)$ часто имеет вид

$$t = ax^{-b},$$

где a – затраты времени на первое изделия, b – показатель производственного процесса.

Пример 8. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 50$ до $x_2 = 75$ изделий, если функция изменения затрат времени $t = 100\, x^{-\frac{1}{2}}$(ч).

Решение. Используя теорему о среднем, получаем:

$$t_{\text{ср.}} = \frac{1}{75 - 50}\int_{50}^{75} 100x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{100}{25}\int_{50}^{75}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\sqrt{x}\Big|_{50}^{75} \approx 11{,}2(\text{ч}).$$

Нахождение дисконтированной стоимости денежного потока

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время *t* лет при годовом удельном проценте *p,* называется дисконтированием.

Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений. Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией *f(t)* и при удельной норме процента, равной *p,*процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход *K* за время вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt.$$

Пример 9. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 10%, если первоначальное капиталовложение составили 15 млн. руб. и намечается ежегодно капитал увеличивать на 5 млн. руб. Провести экономический анализ.

Решение. Составим функцию ежегодного дохода *f(t)=15+5t.* Тогда дисконтированная сумма капиталовложения находится

$$K = \int_0^3 (15 + 15t)e^{-0,1t}dt$$

Интегрируем по частям.

Пусть $u = 15 + 5t$, $du = 5dt$, $dv = e^{0,1}tdt$, $v = -10e^{-0,1t}$

Следовательно, $\mathrm{K} = -10(15 + 15\mathrm{t})\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}\Big|_0^3 + 50\int_0^3 \mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}\mathrm{dt} = -72 - 500\mathrm{e}^{-0,1\mathrm{t}}\Big|_0^3 =$
$= -72 - 130 = 58$(млн.руб.)

Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 15 до 30 млн. руб. равны одновременным первоначальным вложениям 58 млн.руб. при той же исчисляемой непрерывной процентной ставке.

Нахождение капитала по известным инвестициям

Чистыми инвестициями (капиталовложениями) называют общие инвестиции, производимые в экономике в течение определенного промежутка времени (чаще всего года), за вычетом инвестиций на возмещение выходящих из строя основных фондов (капитала).

Таким образом, за единицу времени капитал увеличивается на величину чистых инвестиций.

Если капитал обозначить как функцию времени *K(t),*а чистые инвестиции - - *I(t)*, сказанное выше можно записать

$$I(t) = \frac{d}{dt}K(t)$$

т.е производная от капитала по времени t.

Часто требуется найти приращение капитала за период времени от t_1 до t_2, т.е величину

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$$

Функция $K(t)$ является первообразной для функции $I(t)$, поэтому можно записать:

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = K(t_2) - K(t_1)$$

Пример 10. Пусть заданы чистые инвестиции функцией $I(t) = 500\sqrt{t}(у.е)$. Требуется определить приращение капитала за 2 года.

Решение. Найдем приращение капитала за 2 года:

$$\Delta K = \int_0^2 500\sqrt{t}dt = \frac{500t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{500 \cdot 2}{3}\sqrt{8} \approx 943{,}3(у.е).$$

Пример 11. Задана функция чистых инвестиций $I(t) = 300\sqrt[3]{t}.$ Определить, сколько лет потребуется, чтобы приращение капитала составило 5000 у.е.

Решение. Обозначим искомый промежуток времени [0,T] и, используя формулу прирощения капитала, получим

$$5000 = \int_0^T (300\sqrt[3]{t})dt = (\frac{4 \cdot 300\sqrt[3]{t^4}}{3})\Big|_0^T = 400\sqrt[3]{T^4}$$

Запишем уравнение: 5000 = $400\sqrt[3]{T^4}$

Решая его, находим: T = 6.64

Чтобы приращение капитала составило 5000, потребуется 6,64 лет.

Упражнения.

1. Пусть известна непрерывная функция $f(x)=10+2sin^2$πx, которая характеризует изменение производительности труда от времени x рабочего некоторого предприятия. Определить объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от x_1 = 4 до $x_2 = 6$.

Ответ: 22 (ед. продукции).

2. Найти среднее значение издержек *К(х)*= $2^{x+1} + 4$ выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от $x_1 = 1$ до x_2 = 5.

Ответ: $\frac{15}{ln2} + 4 \approx 25{,}64$(ден. ед.).

3. Вычислить объем продукции, выпущенной рабочим за промежуток времени от x_1 = 0 до $x_2 = 2$, если производительность труда на этом отрезке времени дана формулой $f(x) = 42\left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)$.

Ответ: 84 + 21ln5 ≈117,79 (ед. продукции).

4.5 . Применение интеграла в области финансов

1. Если начальный вклад составляет p , процентная ставка равна *r*, то величина вклада через промежуток времени *t* определяется по формуле:

$$S = pe^{\frac{rt}{100}}.$$

Рассмотрим обратную задачу для нахождения стоимости аннуитета (регулярных платежей) применительно к непрерывным процентам. В этом случае платежи зависят от времени *t*, то есть является функцией от *t*, что можно записать

$$p = p(t)$$

Тогда величина вклада S через T лет определяется формулой:

$S = \int_0^T p(t) e^{\frac{r(T-t)}{100}} dt$.

Если рассмотреть понятие дисконтированной суммы, связанное для непрерывных процентов с формулой

$$S = pe^{\frac{r(T-t)}{100}},$$

то эта формула даёт возможности определять величину начального вклада P, если известно, что через t лет он должен составить величину S , а непрерывная процентная ставка равна r . Задача аннуитета в этом случае может быть сформулирована так: найти величину начального вклада P , если регулярные выплаты по этому вкладу должны составить S ежегодно **в** течение T лет.

Расчетная формула имеет вид

$$p = \int_0^T Se^{-\frac{rt}{100}} dt .$$

Пример 1. Определить величину вклада через 2 года, если начальный капитал 50 000 у.е., процентная ставка 8%.

Решение. Используя формулу $p = \int_0^T Se^{-\frac{rt}{100}} dt$, получим общую величину вклада через 2 года:

$S = \int_0^2 50000 e^{\frac{8(2-t)}{100}} dt = 50000 \int_0^2 e^{\frac{16-8t}{100}} dt = 50000 (-\frac{100}{8} e^{\frac{8(2-t)}{100}}) \Big|_0^2$=108437,5 у.е.

Пример 2. Требуется определить начальный вклад, если выплаты должны составить 75 у.е. в течение трёх лёт, а процентная ставка 5%.

Решение. Применим формулу $p = \int_0^T Se^{-\frac{rt}{100}} dt$, получим

$$p = \int_0^3 75 e^{-\frac{5t}{100}} dt = 75 \left(-\frac{100}{5} e^{-\frac{5t}{100}}\right) \Big|_0^3 \approx 206{,}25 (у.е.)$$

Искомый начальный вклад составит 206,25 у.е.

Выпуск оборудования при постоянном темпе роста

Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста его выпуска

$$K = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

где K – известная постоянная величина (ежегодный темп роста), $y(t)$ – это уровень производства за единицу времени на момент времени t, $y'(t)$ – прирост выпуска оборудования за промежуток времени $t = 1$.

Общее количество оборудования к моменту времени t (единицей которого является год), а в начальный момент времени t=0 уровень ежегодного производства оборудования составлял y_0, находится по формуле

$$Y(t) = \int_0^t y_0 e^{kt} dt. \qquad (6)$$

Пример 3. Найти общее количество произведенного оборудования за три года,

если k = 7% ежегодного роста, а $y_0 = 12$ у.е.
Решение. Применяя формулу (6), получим
$Y(t) = \int_0^3 12e^{0,07t}dt = 12 \cdot \frac{100}{7} e^{0,07t}\Big|_0^3 = \frac{1200}{7} (e^{0,21} - e^0) = \frac{1200}{7}(e^{0,21} -$
$-1)$ =39,43(у.е).

Вычисление коэффициента Джини

Для анализа социально-экономического строения общества применяется так называемая «диаграмма или кривая Джини» распределение богатства в обществе. Исследуя кривую Лоренца $y = f(x)$ – зависимость процента дохода от процента имеющего их население (кривую *ОБА*, рис. 2), мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения.

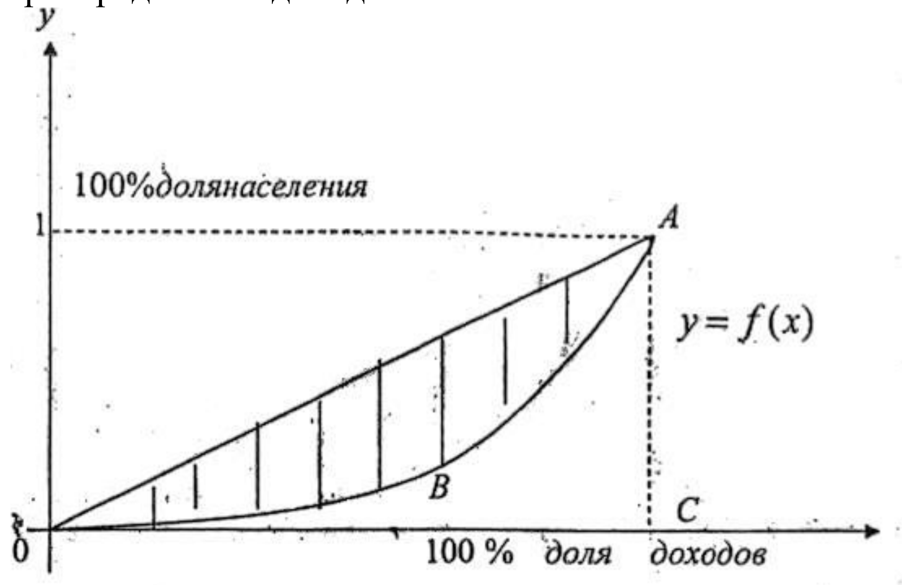


Рис 2.

При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую *OA*.

Поэтому чем больше площадь заштрихованной части, тем неравномернее распределено богатство в обществе.

Коэффициентом Джини называют площадь фигуры *OAB*, отнесенную к площади треугольника *OAC*, т.е.

$$K = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}}$$

По определению имеем:

$$K = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{\frac{1}{2} - S_{OBAC}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx,$$

$$\text{где } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}, \qquad S_{OBAC} = \int_0^1 f(x)dx.$$

Пример 4. По данным исследования в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини, провести экономический анализ.

Решение. Применяя формулу , $K = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx$, получим

$$K = 1 - 2\int\limits_0^1 (1 - \sqrt[3]{x})dx = 1 - 2(x - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}})\Big|_0^1 = 1 - 2(1 - \frac{3}{4}) = 0,5$$

Достаточно высокое значение K показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

4.6. Несобственные интегралы в экономических задачах

Пусть задан непрекращающийся денежный поток, например, в случае эксплуатации земельного участка. Если r – непрерывная процентная ставка, а $R(t)$– соответствующая рента, то нахождение дисконтированной стоимости земельного участка приводит к формуле, содержащий несобственный интеграл

$$P = \int\limits_0^\infty R(t)e^{\frac{-rt}{100}}dt.$$

Пример 1. Определить дисконтированную стоимость земельного участка, если рента, получаемая от земельного участка, $R(t)=3e^{-0,6t}$, $r = 12\%$. Провести экономический анализ.

Решение. Применяя формулу, получим:

$$P = \int\limits_0^\infty 3e^{-0,6t}\, e^{-0,12t}dt = 3\int\limits_0^\infty e^{-0,72t}dt = 3\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-0,72t}dt =$$

$$= 3\lim_{b\to\infty}(-\frac{100}{72}e^{-0,72t})\Big|_0^b = -\frac{300}{72}\lim_{b\to\infty}(e^{-0,72b} - 1) = \frac{300}{72} = 4,16(\text{тыс. руб.})$$

Начальная стоимость земельного участка составит 3 тыс. руб. Конечная стоимость при постоянной процентной ставке будет равна 4,16 тыс. руб.

ЛИТЕРАТУРА

Высшая математика. Общий курс / Под ред. С.А. Самаля. Мн.: Вышэйш. шк., 2000.

Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. Мн.: Вышэйш. шк., 1988. Ч. 1.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высш. шк., 1986. Ч. 1.

Кузнецов А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс: Учеб. пособие. Мн.: Вышэйш. шк., 1994.

Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Вышэйш. шк., 1976.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко. Мн.: Вышэйш. шк., 1991.