

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Кравцов М.К., доктор физ.-мат. наук

<http://edoc.bseu.by>

Лукшин Е.В.

НИЭИ Минэкономики Республики Беларусь, г. Минск

Ключевая роль в современных экономико-математических исследованиях отводится оптимизационным моделям. Эти модели чрезвычайно сложны и, как правило, характеризуются большой размерностью, выбором решений в условиях риска, неопределенности и с учетом многих критериев, наличием требований целочисленности координат вектора решений (всех или части), необходимостью учета вероятностных и плохо формализуемых ограничений, возможностью несовместности системы ограничений, трудностями получения исходной информации и т.п. Качественная разработка таких моделей и проведение расчетов по ним может осуществляться только на основе применения современных компьютеров и программных средств. Существует много литературы по пакетам прикладных программ. Однако, за редким исключением [1], практически во всех изданиях крайне слабо освещены вопросы применения этих пакетов для моделирования и решения экономических задач оптимизации.

В докладе представлены результаты исследования программных пакетов Mathematica 4.1, Matlab 6.5 и MS Excel 2000, предназначенных для математического моделирования и решения экономических задач оптимизации. Проведено сравнение и анализ функций указанных пакетов (на компьютере Pentium III – 750, 128 Mb RAM, ОС Windows 2000 Professional) на тестовых задачах линейного программирования (ЛП) и реальных оптимизационных задачах, относящихся к классам ЛП и нелинейного программирования. В частности, с использованием пакетов Mathematica 4.1 и Matlab 6.5 были разработаны и реализованы следующие экономико-математические модели

(ЭММ): линейная модель оптимизации производства продукции, линейная и нелинейная оптимизационные модели нахождения прогнозной матрицы коэффициентов прямых затрат (КПЗ) [2, 3], нелинейные оптимизационные модели нахождения матриц для коэффициентов импорта [2] и межотраслевых приростов основных фондов [4], статические и динамические межотраслевые модели внешнеэкономической деятельности (с учетом и без учета ограничений на трудовые ресурсы) [4], двухкритериальная модель максимизации ВВП и минимизации потребления топливно-энергетических ресурсов [5]. Все эти модели апробированы на информации Республики Беларусь за 1996-2000 годы и будут положены в основу разрабатываемого в НИЭИ Минэкономики модельного комплекса для анализа и краткосрочного прогнозирования важнейших макроэкономических показателей.

Выбор задач ЛП для проведения экспериментальных расчетов на тестовых задачах обусловлен тем, что модели и методы ЛП стали уже традиционными для исследований по оптимизации процессов во всех отраслях народного хозяйства, математической экономике, оптимальному управлению, теории игр и многим другим дисциплинам прикладной математики (см., напр., [6 – 10]). Вся исходная информация для решения задач ЛП задавалась посредством генератора случайных чисел, настроенного на работу с целыми числами.

Другой важный класс задач оптимизации, имеющих многочисленные экономические приложения, образуют задачи с квадратичным критерием и линейными ограничениями. Поэтому апробация функции `fmincon` системы Matlab, предназначенной для решения оптимизационных задач нелинейного программирования, проводилась применительно к задаче нахождения прогнозной матрицы КПЗ, которая может быть сформулирована следующим образом [2, 3]:

$$\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}(t) - a_{ij}(t-1))^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j(t) a_{ij}(t) = P_i(t) \quad \forall i \in N_n, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_j(t) a_{ij}(t) = Z_j(t) \quad \forall j \in N_n, \quad (3)$$

$$a_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall (i, j) \in N_n \times N_n, \quad (4)$$

где n — число отраслей, $[a_{ij}(t-1)]_n$ — матрица КПЗ отчетного межотраслевого баланса в году $(t-1)$, $[a_{ij}(t)]_n$ — искомая матрица КПЗ в году t , $x_j(t)$ — оценка валовых выпусков j -й отрасли в году t , $P_i(t)$ — оценка промежуточного потребления i -й отрасли в году t , $Z_j(t)$ — оценка промежуточных затрат j -й отрасли в году t , $\sum_{i=1}^n P_i(t) = \sum_{j=1}^n Z_j(t) = K(t)$, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Входная

информация для этой задачи формировалась на основе отчетных межотраслевых балансов Республики Беларусь за 1994 – 2001 гг. Расчеты проводились для матрицы КПЗ и векторов валовых выпусков, промежуточных затрат и промежуточного потребления, агрегированных согласно [11] в 12, 16, 20, 24 и 28 отраслей. В дальнейшем, говоря о размерности задачи, будем иметь в виду число отраслей n . Используемая для реализации задачи (1) – (4) при $n \leq 28$ функция `fmincon` позволяет достаточно быстро проводить расчеты по определению прогнозной матрицы КПЗ, если в качестве начального приближения взять точку с координатами $a_{ij}(t) = a_{ij}(t-1) \quad \forall (i, j) \in N_n \times N_n$ (см. табл.).

Замечание 1. Поскольку задачи размерности 28 требуют существенно большего времени для нахождения решения по сравнению с задачами меньшей размерности, их решение проводилось в два этапа: на первом этапе, исходя из начального приближения $a_{ij}(t) = a_{ij}(t-1) \quad \forall (i, j) \in N_n \times N_n$, выполнялось пять итераций алгоритма с последующим сохранением полученного приближенного решения $[a_{ij}^1(t)]_{n \times n}$, а на втором этапе в качестве начального приближения бралась точка $a_{ij}(t) = a_{ij}^1(t) \quad \forall (i, j) \in N_n \times N_n$, выполнялось пять итераций алгоритма и найденное решение принималось в качестве оптимального.

Замечание 2. Задача размерности 28 с использованием начального приближения $a_{ij}(t) = \frac{P_i(t)Z_j(t)}{x_j(t)K(t)}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, не была решена после шестнадцати часов работы программы. Попытки решить задачу (1) – (4) при $n = 32$, даже с использованием начального приближения $a_{ij}(t) = a_{ij}(t - 1) \forall (i, j) \in N_n \times N_n$, не дали положительного результата за двадцать часов работы программы.

Таблица.

Время решения задачи нахождения прогнозной матрицы КПЗ
Республики Беларусь за 1995-2000 гг.

| Расчетный год | Количество отраслей после агрегирования | Расчетное время |
|---------------|-----------------------------------------|-------------------|
| 1995 | 12 | 6 с. |
| | 16 | 20 с. |
| | 20 | 1 мин. 20 с. |
| | 24 | 4 мин. 51 с. |
| | 28 | 2ч. 58 мин. 56 с. |
| 1996 | 12 | 5 с. |
| | 16 | 24 с. |
| | 20 | 1 мин. 48 с. |
| | 24 | 5 мин. 12 с. |
| | 28 | 2ч. 40 мин. 21 с. |
| 1997 | 12 | 5 с. |
| | 16 | 22 с. |
| | 20 | 1 мин. 22 с. |
| | 24 | 5 мин. 28 с. |
| | 28 | 2ч. 36 мин. 12 с. |
| 1998 | 12 | 5 с. |
| | 16 | 22 с. |
| | 20 | 1 мин. 13 с. |
| | 24 | 4 мин. 37 с. |
| | 28 | 2ч. 48 мин. 45 с. |
| 1999 | 12 | 6 с. |
| | 16 | 21 с. |
| | 20 | 1 мин. 27 с. |
| | 24 | 4 мин. 10 с. |
| | 28 | 2ч. 30 мин. 15 с. |
| 2000 | 12 | 6 с. |
| | 16 | 20 с. |
| | 20 | 1 мин. 09 с. |
| | 24 | 4 мин. 22 с. |
| | 28 | 2ч. 38 мин. 39 с. |

На основе результатов, представленных в докладе, даны следующие рекомендации по применению вышеназванных пакетов в системе Минэкономики.

1. Пакеты Matlab 6.5 и Mathematica 4.1 предоставляют средства, достаточные для построения, анализа и расчета ЭММ любой сложности. В пакетах помимо методов оптимизации реализованы следующие методы статистического анализа: пошаговый метод построения линейной регрессии, нелинейная регрессия, средства анализа временных рядов, параметрические тесты, многофакторный и кластерный анализ и др.

2. Благодаря своей интеграции с MS Excel пакеты Mathematica 4.1 и Matlab 6.5 позволяют разрабатывать удобные в использовании приложения, вызываемые напрямую из электронных таблиц.

3. Система Matlab 6.5 обладает *преимуществами* перед пакетом Mathematica 4.1 по таким характеристикам и возможностям, как:

- возможность пользователя выбирать методы и алгоритмы для решения оптимизационных задач путем варьирования входными параметрами имеющихся функций системы;
- наличие специальных функций для работы с матрицами и задачами большой размерности, а также с многоиндексными матрицами;
- скорость решения оптимизационных задач ЛП, особенно — большой размерности;
- наличие функций для решения задач квадратичного программирования, задач о наименьших квадратах, минимаксных и многокритериальных задач, а также нелинейных оптимизационных задач с ограничениями;
- наличие функций для решения систем линейных и нелинейных уравнений большой размерности;
- наличие в сети Интернет свободно распространяемых программ (М-файлов) для решения задач дискретной и целочисленной оптимизации;
- наличие пакета Simulink, позволяющего создавать имитационные и динамические модели в интерактивном режиме.

4. Время решения задачи нелинейной оптимизации существенно зависит не только от ее размерности, но и от выбора точки начального приближения. Для каждой реализованной нелинейной ЭММ указана точка начального

приближения, стартуя от которой функция `fmincon` достаточно быстро находит ее оптимальное решение, особенно если число переменных $n = 784$.

5. Несмотря на сложность, язык программирования пакета Mathematica имеет *преимущество* перед входным языком системы Matlab, заключающееся в возможности создавать программы на основе структурного, процедурного и объектно-ориентированного подходов. Это позволяет высококвалифицированному специалисту разрабатывать более сложные и гибкие ЭММ и создавать приложения за более короткое время и с меньшим исходным кодом.

6. Система Matlab 6.5 позволяет решать оптимизационные задачи ЛП с количеством переменных до 100000 включительно. В то же время в пакете MS Excel 2000 число переменных при решении задач ЛП ограничено двумястами. Опыт работы с пакетами Matlab 6.5 и Mathematica 4.1 показывает, что их использование делает реализацию математических методов более эффективной, а разработку ЭММ — на порядок менее трудоемкой, чем с помощью традиционных средств: электронных таблиц MS Excel и языков программирования высокого уровня.

Литература

1. Кравцов М.К., Подкопаев Д.П., Лука Ю.З. Методические рекомендации по использованию современных программных средств для математического моделирования и решения экономических задач. Минск.: НИЭИ Минэкономки РБ, 2001. – 240 с.

2. Кравцов М.К., Подкопаев Д.П., Позняков А.М. Линейные и нелинейные модели прогнозирования импорта Республики Беларусь // Белорусская экономика: анализ, прогноз, регулирование. 2001. № 9. С. 27 – 35.

3. Кравцов М.К., Подкопаев Д.П., Позняков А.М. Модельный комплекс краткосрочного прогнозирования внешнеторговой деятельности Республики Беларусь // Белорусская экономика: анализ, прогноз, регулирование. 2002. № 2. С. 29 – 40.

4. Кравцов М.К. Динамическая межотраслевая модель

внешнеэкономической деятельности Республики Беларусь // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития. Доклады 3-й международной научной конференции (Минск, 10 – 11 октября 2002 г.). Минск: НИЭИ Минэкономики РБ, 2002. С. 278 – 288.

5. Кравцов М.К., Пашкевич А. В., Подкопаев Д.П. Двухкритериальная модель оптимизации валового внутреннего продукта с учетом рационального использования топливно-энергетических ресурсов // Белорусская экономика: анализ, прогноз, регулирование. 2002. № 12. С.21 – 29.

6. Холод Н.И. и др. Экономико-математические методы и модели. Минск: БГЭУ, 1999. – 413 с.

7. Хачиян Л.Г. Сложность задач линейного программирования // Математика и кибернетика. 1987. № 10. 32 с.

8. Кравцов М.К., Крачковский А.П. Экономико-математические модели оптимального размещения сельскохозяйственных культур и выбора технологий их возделывания // Известия Академии аграрных наук Республики Беларусь. 1996. № 4. С. 44 – 49.

9. Кравцов М.К. Развитие экономико-математического моделирования: итоги, проблемы, перспективы // Белорусская экономика: анализ, прогноз, регулирование. 1998. № 10. С. 9 – 21.

10. Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. Моделирование сферы материального производства // Проблемы экономико-математического моделирования. Минск: НИЭИ Минэкономики РБ. 2000. С. 3 – 22.

11. Кравцов М.К., Крачковский А.П. Агрегирование и редуцирование моделей межотраслевого баланса // Экономико-математические модели прогнозирования макроэкономических показателей секторов экономики в условиях рынка. Минск: НИЭИ Минэкономики РБ. 1998. С. 43 – 53.