

О ТОЖДЕСТВЕННОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Рутковский Р. А.

к.т.н., профессор кафедры ПМ и ЭК

БГЭУ, Минск

Задачей построения статистической модели является нахождение некоторой функции, "объясняющей" расположение точек в k -мерном пространстве наблюдений, соответствующих последовательным состояниям наблюдаемого (управляемого) объекта.

Можно предложить несколько форм представления статистической модели содержащей подгоночные параметры.

В наиболее общем виде статистическая модель может быть задана некоторым достаточно оператором, в общем случае нелинейным

$$\Phi(a, x) = 0, \quad (1)$$

здесь $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — вектор-строка параметров, определяемых из условия минимума критерия $Z(a)$, например суммы квадратов невязок

$$\min_a \sum_{i=1}^m \Phi^2(a, x^{(i)}).$$

Статистическая модель, линейная относительно подгоночных параметров, может быть представлена в следующем виде

$$f_0(x) = af, \quad (2)$$

где вектор-столбец линейно независимых на множестве наблюдений X функций

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

называется базисом модели.

Соотношения (1), (2) являются неявной формой задания моделируемого показателя как одной из компонент вектора состояния.

В случае, когда одну из компонент вектора состояния определяют как моделируемый показатель x_M , а остальные компоненты — как „объясняющие”, получаем линейную относительно параметров модель, представляющую моделируемый показатель в явном виде

$$x_M = af, \quad (3)$$

что является частным случаем модели (2), когда $f_0(x) = x_M$. Скалярную функцию f_0 можно считать обобщенным (синтетическим) показателем состояния моделируемого объекта.

Модели (2), (3) являются частным случаем модели (1). Они удобны в применении тем, что вычисление оптимальных параметров по критерию взвешенных наименьших квадратов

$$Z(a) = \sum_{i=1}^m \rho_i \left(x_M^{(i)} - af^{(i)} \right)^2 \quad (4)$$

приводит к решению системы нормальных (линейных) уравнений, которые запишем в следующем виде

$$Ma = b. \quad (5)$$

Обозначим через $H = (h_{ij})_{m \times n}$ информационную матрицу, элементами которой являются значения базисных функций, $h_{ij} = f_j(x^{(i)})$. Тогда матрица M системы нормальных уравнений (5), называемая матрицей Грама, может быть вычислена как

$$M = H'H$$

при условии, что вес наблюдений в (4) тождественно равен 1.

Для нестационарного временного ряда система нормальных уравнений (4) может быть вычислена по формулам Гаусса, с учетом применения функции веса $\rho(t) = \rho_t \geq 0, \quad t = \overline{1, m}$,

$$\left. \begin{aligned} h_{ij} &= [f_i, f_j] = \sum \rho_t f_i^{(t)} f_j^{(t)}, \\ b_i &= [f_0, f_i]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Значение критерия качества аппроксимации (таких как взвешенных наименьших квадратов, наименьших модулей и др.) однозначно определяется невязками, свойства которых исчерпывающим образом определяют качество статистической модели объекта.

Свойство ортогональности функций базиса на совокупности X влечет взаимную независимость компонент вектора параметров a . В случае применения метода наименьших квадратов ортогональность базиса приводит к диагональной матрице Грама, что не является существенным в условиях компьютерной обработки, поскольку решение системы линейных уравнений, порядок которой редко превосходит 10, относится к простейшим вычислительным процедурам. Более существенным является то, что в случае ортогональности базиса не требуется пересчета параметров других функций при добавлении нового слагаемого в статистическую модель. Однако для достижения свойства ортогональности базиса как правило требуется специальная процедура нормирования исходной совокупности, что при статистическом моделировании поглощает все преимущества связанные с ортогональностью.

Определение.

*Статистические модели называются **тождественными** если для любых допустимых значений вектора x они дают совпадающие значения моделируемого показателя x_M .*

Справедливо следующее утверждение.

Если имеются два базиса одинаковой размерности

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{bmatrix}$$

и компоненты одного из них выражаются линейно через компоненты другого базиса для любых допустимых значений x , то соответствующие им статистические модели тождественны.

Доказательство.

Из условия теоремы вытекает существование невырожденной матрицы перехода, которую обозначим через R ,

$$g(x) = Rf(x), \quad (7)$$

$$f(x) = R^{-1}g(x). \quad (8)$$

Тогда можно построить пару статистических моделей

$$x_M = af, \quad x_M = bg, \quad (9)$$

оптимальные значения критерия для которых обозначим F^* и G^* . Здесь b — вектор параметров модели в базисе g .

Подставим (7), (8) в (9), в результате чего получим новые статистические модели

$$x_M = aR^{-1}g = b'g, \quad x_M = bRf = a'f \quad (10)$$

с новыми значениями параметров $a' = bR$ и $b' = aR^{-1}$ в базисах g и f соответственно.

Покажем, что новые значения параметров совпадают с прежними значениями. Обозначим через F и G значения критерия соответствующие новым значениям параметров a' и b' . Предположим, что новым значениям параметров возможно соответствуют худшие (большие) значения критерия,

$$F \geq F^* \quad \text{и} \quad G \geq G^*. \quad (11)$$

Но из (10) следует, что

$$F = G^* \quad \text{и} \quad G = F^*. \quad (12)$$

Сопоставляя (11) и (12) приходим к выводу, что $F = F^*$ и $G = G^*$, откуда следует

$$a = a', \quad b = b'. \quad (13)$$

Поэтому, сравнивая (10) и (13), можем записать $(a,f) = (b,g)$, что означает тождественность моделей (9).