# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ

**Аксень Э.М.**

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры ПМ и ЭК

БГЭУ, Минск

## 1. Моделирование стохастической производственной функции

Пусть $Y(\tau,T)$ -- суммарный выпуск продукции за период времени $(\tau,T]$.

Допущение 1. $Y(\tau,T)\geq 0$ (почти наверное).

Обозначим $\overline{Y}(t)=Y(0,t)$. (Очевидно, что $Y(\tau,T)=\overline{Y}(T)-\overline{Y}(\tau)$.) В силу Допущения 1 случайный процесс $\overline{Y}=\left[\overline{Y}(t)\right]_{t\geq 0}$ -- положительный и возрастающий.

Для простоты изложения предположим, что капитал – единственный фактор производства.

Допущение 2. Траектории $\overline{Y}(\omega)=\left[\overline{Y}(t,\omega)\right]_{t\geq 0}$ случайного процесса выпуска продукции $\overline{Y}=\left[\overline{Y}(t)\right]_{t\geq 0}$ однозначным образом определяются траекториями $K(\omega)=\left[K(t,\omega)\right]_{t\geq 0}$ случайного процессом капитала $K=\left[K(t)\right]_{t\geq 0}$ и элементарными событиями $\omega\in\Omega$, т.е. $\overline{Y}(\omega)=\overline{Y}\left(\omega;K(\omega)\right)$, $\overline{Y}(t,\omega)=\overline{Y}\left(t,\omega;K(\omega)\right)$.

Пусть случайный процесс капитала $K=\left[K(t)\right]_{t\geq 0}$ равен некоторому (постоянному) числу $k\in[0,\infty)$ для всех $t\in[0,\infty)$ (почти наверное). Обозначим через $\overline{Y}(k)=\left[\overline{Y}(t;k)\right]_{t\geq 0}$ случайный процесс выпуска продукции, определенный таким процессом капитала. Обозначим через $Y(\tau,T;k)$ выпуск продукции за период времени $(\tau,T]$ при постоянном уровне капитала $k$. (Очевидно, что $Y(\tau,T;k)=\overline{Y}(T;k)-\overline{Y}(\tau;k)$.)

Пусть $K=[K(t)]_{t\geq 0}$ произвольный случайный процесс. Фиксируем момент времени $t\in(\tau,T]$ и элементарное событие $\omega\in\Omega$. Пусть $K(t,\omega)$ - значение случайного процесса $K=[K(t)]_{t\geq 0}$ в момент времени $t$ в случае, если произошло событие $\omega$. Под $Y(\tau,T;K(t,\omega))$ будем понимать $Y(\tau,T;k)$ при $k=K(t,\omega)$, а под $Y(\tau,T;\omega;K(t,\omega))$-- значение $Y(\tau,T;\omega;k)$ при $k=K(t,\omega)$.

<u>Допущение 3.</u> При любом случайном процессе капитала $K=[K(t)]_{t\geq 0}$ (почти наверное) имеет место соотношение:

$$\inf_{t\in(\tau,T]} Y\left(\tau,T;\omega;K(t,\omega)\right)\leq Y\left(\tau,T;\omega;K(\omega)\right)\leq \sup_{t\in(\tau,T]} Y\left(\tau,T;\omega;K(t,\omega)\right). \qquad (1)$$

<u>Допущение 4.</u> Существует функция $F:[0,\infty)\to[0,\infty)$ и случайный процесс $A=[A(t)]_{t\geq 0}$, такие, что при любом $k\in[0,\infty)$ для всех $t\in[0,\infty)$ почти наверное выполняется равенство $\overline{Y}(t;k)=F(k)A(t)$.

Из равенства $\overline{Y}(t;k)=F(k)A(t)$ в частности следует, что

$$Y(\tau,T;\omega;K(t,\omega))=F\left(K(t,\omega)\right)\left[A(T,\omega)-A(\tau,\omega)\right]. \qquad (2)$$

В силу Допущения 1 и равенства (2) процесс $A=[A(t)]_{t\geq 0}$ -- возрастающий.

Подставив (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned}&\inf_{t\in(\tau,T]} F\left(K(t,\omega)\right)\left[A(T,\omega)-A(\tau,\omega)\right]\leq Y\left(\tau,T;\omega;K(\omega)\right)\leq\\ &\leq \sup_{t\in(\tau,T]} F\left(K(t,\omega)\right)\left[A(T,\omega)-A(\tau,\omega)\right].\end{aligned} \qquad (3)$$

Пользуясь тем, что соотношение (3) имеет место для любого интервала $(\tau,T]$, несложно показать, что

$$Y(\tau,T)=\int_{\tau}^{T} F\left(K(t)\right)dA(t). \qquad (4)$$

Поскольку $Y(\tau,T)=\int_{\tau}^{T} d\overline{Y}(t)$, равенство (4) можно также записать в дифференциальном виде: $d\overline{Y}(t)=F\left(K(t)\right)dA(t)$.

Поскольку случайный процесс $A = \left[A(t)\right]_{t\geq 0}$ -- возрастающий, он (почти наверное) дифференцируем почти при всех $t \in [0,\infty)$. Из (3) следует, что если в точке $t \in [0,\infty)$ существует $\frac{dA}{dt}(t;\omega)$, то существует $\frac{d\overline{Y}}{dt}(t;\omega)$, причем

$$\frac{d\overline{Y}}{dt}(t;\omega) = F\left(K(t;\omega)\right)\frac{dA}{dt}(t;\omega). \qquad (5)$$

Отметим, что равенство (5) равносильно равенству (4) только в том случае, когда случайные процессы $\overline{Y} = \left[\overline{Y}(t)\right]_{t\geq 0}$ и $A = \left[A(t)\right]_{t\geq 0}$ абсолютно непрерывны.

Обозначим $\gamma(t) = \frac{dA}{dt}(t)$, $Y(t) = \frac{d\overline{Y}}{dt}(t)$. С учетом этих обозначений равенство (5) можно записать в виде:

$$Y(t) = \gamma(t)F\left(K(t)\right). \qquad (6)$$

**2. Методика построения стохастической модели**

Изложим методику построения стохастической динамической модели на примере задачи Рэмси (Ramsey).

Задача Рэмси состоит в выборе потребления таким образом, чтобы максимизировать полезность конечных потребителей. (При этом должна учитываться взаимосвязь между траекториями потребления и капитала.)

Для простоты предположим, что государственные расходы и износ капитала равны нулю. Также будем считать, что уровень труда не меняется (это позволит нам считать, что единственный фактор производства – капитал).

При сделанных предположениях должно выполняться равенство

$$K(T) = K(\tau) + Y(\tau,T) - C(\tau,T), \qquad (7)$$

которое, очевидно, эквивалентно следующему: $\int_\tau^T dK(t) = Y(\tau,T) - \int_\tau^T d\overline{C}(t)$.

Подставив формулу (4) в последнее равенство, получим:

$$\int_\tau^T dK(t) = \int_\tau^T F\left(K(t)\right)dA(t) - \int_\tau^T d\overline{C}(t). \qquad (8)$$

Равенство (8) можно записать в дифференциальном виде:

$$dK(t) = F\left(K(t)\right)dA(t) - d\overline{C}(t).$$

Из равенства (8) очевидным образом следует также, что

$$\frac{dK}{dt}(t) = \gamma(t)F\left(K(t)\right) - C(t), \qquad (9)$$

где $C(t) = \dfrac{d\overline{C}}{dt}(t)$.

Однако равенство (9) равносильно (8) только в том случае, когда процессы $A = \left[A(t)\right]_{t\geq 0}$, $K = \left[K(t)\right]_{t\geq 0}$ и $\overline{C} = \left[\overline{C}(t)\right]_{t\geq 0}$ абсолютно непрерывны (почти наверное).

В дальнейшем всюду будем считать, что процессы $A = \left[A(t)\right]_{t\geq 0}$, $K = \left[K(t)\right]_{t\geq 0}$ и $\overline{C} = \left[\overline{C}(t)\right]_{t\geq 0}$ абсолютно непрерывны.

Задача максимизации полезности конечных потребителей имеет вид:

$$U(C) = \int_0^\infty e^{-\theta t} E\left[u\left(C(t)\right)\right] \to \max, \qquad (10)$$

$$\frac{dK}{dt}(t) = \gamma(t)F\left(K(t)\right) - C(t), \qquad (11)$$

$$K(0) = k \quad (\text{т.е. } K(0) \text{ задано}), \qquad (12)$$

$$K(t) \geq 0, \;\; C(t) \geq 0 \;\; \forall t \geq 0. \qquad (13)$$

Здесь $\theta > 0$ -- норма межвременных предпочтений, $E[\cdot]$ -- оператор математического ожидания, $u(\cdot)$ -- функция полезности.

Переменными в данной задаче являются случайные процессы $K = \left[K(t)\right]_{t\geq 0}$ и $C = \left[C(t)\right]_{t\geq 0}$, согласованные с заданным (информационным) потоком $\sigma$-алгебр.

## 3. Метод множителей Лагранжа для стохастической динамической задачи в непрерывном времени

Изложим метод множителей Лагранжа для стохастической динамической задачи в непрерывном времени на примере задачи (10)-(13).

Функция Лагранжа для задачи (10)-(13) имеет вид:

$$L(K,C;\lambda,\mu)=\int_0^\infty e^{-\theta t}E\left[u(C(t)\right]dt-$$
$$-\int_0^\infty E\left[\lambda(t)\left(\frac{dK}{dt}(t)-\gamma(t)F\left(K(t)\right)+C(t)\right)\right]dt-\mu\cdot\left[K(0)-k\right]. \tag{14}$$

Здесь $\lambda=\left[\lambda(t)\right]_{t\geq 0}$ -- согласованный случайный процесс, $\mu$ -- вещественное число.

Можно доказать, что условие равенства нулю производной $D_{(K,C)}L(K,C;\lambda,\mu)$ функции Лагранжа $L(K,C;\lambda,\mu)$ по вектору переменных $(K,C)$ необходимо для оптимальности случайных процессов $K=\left[K(t)\right]_{t\geq 0}$ и $C=\left[C(t)\right]_{t\geq 0}$ в задаче (11)-(14). Несложно показать, что

$$D_{(K,C)}L(K,C;\lambda,\mu)(\xi,\eta)=\int_0^\infty e^{-\theta t}E\left[u'\left(C(t)\right)\eta(t)\right]dt-$$
$$-\int_0^\infty E\left[\lambda(t)\left(\frac{d\xi}{dt}(t)-\gamma(t)F'\left(K(t)\right)\xi(t)+\eta(t)\right)\right]dt-\mu\cdot\xi(0). \tag{15}$$

Таким образом, необходимое условие первого порядка для задачи (10)-(13) заключается в том, что равенство

$$\int_0^\infty e^{-\theta t}E\left[u'\left(C(t)\right)\eta(t)\right]dt-\int_0^\infty E\left[\lambda(t)\left(\frac{d\xi}{dt}(t)-\gamma(t)F'\left(K(t)\right)\xi(t)+\eta(t)\right)\right]dt-$$
$$-\mu\cdot\xi(0)=0. \tag{16}$$

должно выполняться для всех согласованных случайных процессов $\xi=\left[\xi(t)\right]_{t\geq 0}$ и $\eta=\left[\eta(t)\right]_{t\geq 0}$.

Из условия (16) можно получить уравнение Эйлера для задачи (10)-(13).