БЕЛОРУССКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2016. № 4. С. 132–141.
Belarusian Economic Journal. 2016. No 4. P. 132–141.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Г.О. Читая, А.Е. Тарасюк[1]

В статье аргументированы создание и реализация набора математических моделей и инструментальных средств обработки длинных временных рядов финансовых активов, порожденных нелинейной динамикой зависимостей в их структуре. Обоснованы и инструментально подкреплены вычислительные процедуры по использованию методов анализа нелинейной динамики финансовых активов, оценки степени хаотичности поведения их временных рядов, обнаружения скрытой цикличности с помощью алгоритма сингулярного спектрального анализа, дополненного методом Грассбергера-Прокаччиа, повышения точности прогнозирования курсовой стоимости акций компаний-эмитентов.

Ключевые слова: финансовые активы, квазипериодичность, нелинейность, многомерный ряд векторов, размерность вложения.

JEL-классификация: C69, G11.

Материал поступил 1.03.2016 г.

Нерегулярная динамика ряда финансовых активов, характерная для фондовых рынков, приводит к необходимости создания эффективного набора инструментов их анализа и прогнозирования. Классический линейный подход не позволяет идентифицировать хаотическое, близкое к квазипериодическому поведение различных ценных бумаг во времени, в связи с чем высокий научный интерес приобретают нелинейные методы оценки, которые способны улавливать и анализировать нелинейные зависимости фондовых индикаторов. Эволюция окружающего нас мира имеет нелинейный характер, линейные методы могут обнаруживать закономерности путем аппроксимации подлинных нелинейных процессов.

Фондовый рынок, на котором происходит торговля финансовыми активами, является сложной открытой системой со многими участниками (инвесторы, эмитенты и т. д.), которые вступают в различные экономические отношения по поводу выпуска и обращения ценных бумаг. Сложность определяется количеством элементов системы (множеством и участников, и финансовых активов) и связей между ними (различного рода экономические отношения, биржевые контракты, использование производных финансовых инструментов и др.). Открытость обусловлена высокой интенсивностью взаимодействия с внешней средой, что находит отражение в больших массивах обмениваемой информации об изменениях финансовых инструментов. Предварительные исходные данные формируются в виде временных рядов биржевых индикаторов ценных бумаг.

Открытым сложным системам свойственна нелинейность – малые изменения параметров системы приводят к неравномерному изменению ее состояния и свойств. Вместе с тем неправомерно утверждать, что элементы абсолютно всех временных рядов финансовых активов находятся в нелинейной зависимости. Для обнаружения скрытых зависимостей целесообразно проводить исследование финансовых временных рядов с

* **Читая Гигла Отарович** (chitaya_g@bseu.by), доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь);

Тарасюк Артем Евгеньевич (artemtarasiuk@gmail.com), магистр экономических наук Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).

позиции теории дискретной нелинейной динамики, в рамках которой разработаны методы и алгоритмы вычислений, позволяющие диагностировать ряд на наличие нелинейности, степени предсказуемости, квазипериодичности (присутствия скрытой цикличности) и других ключевых характеристик динамики. Это приводит к созданию набора количественных инструментов, способствующих увеличению точности прогнозных расчетов. Исследование непрерывной нелинейной динамики функционирования малой городской хозяйственной системы проводилось с использованием аппарата нелинейной системы дифференциальных уравнений (Читая, Белявский, 2014. С. 181–186).

Целью научной статьи является создание набора инструментов анализа и прогнозирования котируемых на фондовых рынках временных рядов финансовых активов на основе разработанных в теории нелинейной динамики поведения систем методов. Речь идет об обосновании целесообразности применения и алгоритмического обеспечения расчета параметра BDS-теста для подтверждения или опровержения гипотезы о нелинейном характере вариабельности временных рядов исследуемых индикаторов, конструировании показателя аппроксимированной энтропии для выявления скрытой цикличности, совершенствования алгоритма сглаживания временного ряда сингулярным спектральным анализом в сочетании с методом Грассбергера-Прокаччиа.

В качестве исходных данных сформированы и выбраны временные ряды индексов акций четырех российских компаний по ежедневным торгам на Московской фондовой бирже. Это цены акций в российских рублях в момент закрытия торгов на бирже, временной такт имеет продолжительность в один день. Компании: ПАО «Сбербанк России» (длина ряда – 3061 наблюдение), ГМК «Норильский Никель» (2746 наблюдений), ПАО «Лукойл» (2924 наблюдения) и ОАО «НК «Роснефть» (2339 наблюдений). Акции этих компаний относятся к так называемым «голубым фишкам», поскольку являются наиболее ликвидными, обладают наименьшей волатильностью, но отличаются продолжительной хаотичной динамикой с подозрением на квазипериодичность.

Проверка гипотезы о нелинейности временных рядов финансовых активов

Для однозначного описания сложного процесса необходимо построение адекватной математической модели, которая чаще всего представляется системой уравнений размерности τ (система из уравнений для τ переменных), $\tau > 1$. При наличии измерений только для одной наблюдаемой переменной возникает вопрос: достаточно ли информации о поведении системы в целом содержится в динамическом ряду наблюдений данной переменной? В соответствии с теоремой Такенса, ответ будет утвердительным. Смысловое содержание теоремы можно изложить по ключевым ее позициям.

Пусть состояние системы полностью описывается N переменными: $x_1, x_2, \ldots, x_\tau$. Согласно теореме Такенса, можно сконструировать пространство вложения с τ-мерным вектором по значениям одной переменной x_i:

$$X_i = X(t_i) = \left\{ \begin{matrix} x(t_i), x(t_i + T), \ldots, \\ x[t_i + (\tau - 1)T] \end{matrix} \right\},$$

взятым со сдвигом T.

При анализе динамических систем основной вопрос состоит в определении ее размерности, т. е. количества переменных, необходимых для описания системы. Описание системы возможно на основе τ-мерных векторов задержек, составленных из последовательных отрезков временного ряда (Барышева, 2012. С. 120).

Основанные на теореме Такенса методы прогнозирования временных рядов предусматривают переход от анализа имеющегося одномерного временного ряда

$$x_t = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_N$$

к анализу и прогнозированию многомерного ряда векторов:

$$X_{\tau\times(N-\tau+1)} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{\tau+1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_{N-\tau+1} \\ x_{N-\tau+2} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \right).$$

Параметр запаздывания является размерностью вложения аттрактора, породившей ряд динамической системы, а N – число элементов исходного ряда (Истомин, 2007. С. 28).

Методы прогнозирования, основанные на теореме Такенса о динамических системах, демонстрируют наилучшие показатели, например, по точности прогнозирования при наличии детерминированного хаоса во временных рядах, когда в исследуемом временном ряду присутствует определенная нелинейная зависимость.

При наличия линейной зависимости можно прибегнуть к классическим эконометрическим методам прогнозирования без углубления в математический аппарат нелинейной динамики. Несмотря на то, что экономика, в частности фондовый рынок, в трактовках ряда современных ученых-экономистов предстает как динамически нестабильная и нелинейная, а не детерминистическая система, делать подобный вывод для всех временных рядов финансовых активов, порожденных такой системой, было бы некорректным. В связи с этим для оценки нелинейности исходных временных рядов можно использовать один из методов теории динамических систем – *BDS*-тест.

BDS-тест (Brock, Dechert & Scheinkman test) был предложен в результате анализа финансовых рынков экономистами Броком, Дечертом и Шейнкманом в 1987 г., и в настоящее время это один из приоритетных методов выявления зависимостей во временных рядах. Цель теста в том, чтобы различать данные I.I.D. (independent and identically distributed random variables – независимые, одинаково распределенные случайные величины) и любой вид зависимости, т. е. прове-рить нулевую гипотезу о независимости и тождественном распределении значений временного ряда, используя критерий значимости. *BDS*-тест основан на статистической величине (BDS-статистике):

$$w_{\tau,N}(l) = \sqrt{N-\tau+1}\,\frac{C_{\tau,N}(l) - [C_{1,N-\tau+1}(l)]^{\tau}}{\sigma_{\tau,N}(l)}.$$

При этом $C_{\tau,N}(l)$ является корреляционным интегралом. Это вероятность того, что временной ряд содержит пару точек, расстояние между которыми не превышает некое заданное число l. Вычисление корреляционного интеграла производится по формуле:

$$C_{\tau,N}(l) = \\ = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(N-\tau+1)}\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=1}^{N}\theta[l-\rho_{\tau}(n,n')],$$

где N – число элементов временного ряда; $\rho_{\tau}(n,n')$ – всевозможный набор расстояния между элементами векторов исходного временного ряда в многомерном представлении;

$\theta(z)$ –ступенчатая функция Хевисайда:

$$\theta(z) = \left\{\frac{\theta(z)=0, z<0,}{\theta(z)=1, z\geq 0}\right\}.$$

Корреляционный интеграл для меняющегося l воспроизводит всевозможный набор расстояний между элементами векторов исходного временного ряда в многомерном представлении и соответствует ступенчатой функции Хевисайда.

Важно отметить, что расчеты, связанные с вычислением корреляционного интеграла, требуют значительных временных затрат. Например, при наличии временного ряда с количеством наблюдений, равным 2000, число операций будет пропорционально квадрату количества наблюдений, умноженного на размерность вложения и на используемое в алго-ритме число l. Поскольку для расчета корреляционного интеграла может использоваться диапазон $l\in[0,01;1]$ с шагом от 0,01 до 0,05 τ по временному ряду с размерностью вложения от 2 до 10 (например, в случае поиска оптимальной размерности), итоговое количество операций превысит 250 000. Это приводит к тому, что компьютерное время, необходимое для вычисления корреляционного интеграла для одного временного ряда, составляет примерно 2 часа.

Величина $\sigma_{\tau,N}(t)$ является среднеквадратическим отклонением и вычисляется по формуле(1).

Корреляционный интеграл $C_{1,N-\tau+1}(l)$ рассчитывается так же, как $C_{\tau,N}(l)$ при условии, что =1 .

В качестве теста на достоверность гипотезы H_0 о линейной зависимости принимается выполнение неравенства $|w_{\tau,N}(l)|\leq 1,96$ для значения статистики $w_{\tau,N}(l)$, что соответствует уровню значимости α=0,05 (вероятности ошибки первого рода), тогда с 95-процентной уверенностью можно принять гипотезу . Если рассчитанные значения лежат вне интервала (-1,96;1,96), то гипотеза линейности должна быть отвергнута на 5-процентном уровне значимости (Барышева, 2012. С. 123).

$$\sigma_{\tau,N}(l) = 2 \cdot \sqrt{k^{\tau} + 2 \cdot \sum_{j=1}^{\tau-1} k^{\tau-j} \cdot [C_{1,N}(l)]^{2j} + (\tau-1)^2 \cdot [C_{1,N}(l)]^{2\tau} - \tau^2 \cdot k \cdot [C_{1,N}(l)]^{2m-2}} \qquad (1)$$

где

$$k = \frac{1}{(N-1)\cdot(N-2)\cdot N}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{n'=1}^{N}\theta[l-\rho_{\tau}(n,n')]\right]^2 - 3\cdot\sum_{n=1}^{N}\sum_{n'=n+1}^{N}\theta[l-\rho_{\tau}(n,n')] + 2\cdot N\right\}.$$

Правомерно указать на то обстоятельство, что *BDS*-тест может выявлять нелинейность только при условии применения линейного фильтра, на выходе которого используются оцененные остатки в модели авторегрессии $AR(p)$. Количество лагов p можно оценить на основе выборочных частных автокорреляционных функций. Процесс авторегрессии порядка k можно представить формулой:

$$p_j = \varphi_{k0} + \varphi_{k1}p_{j-1} + \cdots$$
$$+\varphi_{k(k-1)}p_{j-k+1} + \varphi_{kk}p_{j-k} + \varepsilon_j,$$
$$j = 1,2,\dots,k,$$

где φ_{kk}– частные автокорреляционные функции порядка k.

Для модели $AR(p)$ частная автокорреляционная функция φ_{pp} должна быть отлична от нуля, иначе порядок модели можно понизить, в то же время частная автокорреляционная функция порядка (φ+1) должна быть равна нулю, в противном случае порядок модели должен увеличиваться. На практике величины частной автокорреляционной функции неизвестны и определяются, как правило, методом МНК.

Проведенные расчеты *BDS*-теста для построенных моделей $AR(p)$ остатков по индексам акций четырех компаний подтвердили, что все их значения лежат вне интервала (-1,96;1,96). Следовательно, гипотеза H_0 отвергается на 5-процентном уровне значимости об отсутствии нелинейных зависимостей в исследуемых временных рядах.

Определение квазипериодичности и степени хаотичности временного ряда

Нелинейность означает множественность состояний системы, многовариантность и альтернативность управленческих решений и, как следствие, разнообразие сценариев развития системы, проявляющееся, в частности, в виде различных циклических явлений. Имеются основания утверждать, что цикличность – это неотъемлемое свойство нелинейных систем, обусловленное их открытостью и сложностью (Горшенин, 2014. С. 36). Между тем при анализе временных рядов финансовых активов визуально определить какую-либо цикличность нереально (см. рис. 1–4), можно говорить лишь о наличии квазипериодичности – скрытой или мнимой цикличности. Графически сложно определить и важнейшие характеристики временного ряда – степень регулярности, предсказуемости и хаотичности. Дело в том, что неправильная оценка ряда и его характеристик может привести к некорректным результатам прогнозирования его динамики, существенным отклонениям прогнозных значений от фактических.

В настоящее время существуют методы оценки степени регулярности и хаотичности временных рядов экономических показателей, среди которых наиболее известным считается метод Херста, или R/S-анализ. Вместе с тем показатель Херста применим лишь для стационарных временных рядов, а его оценка зависит от ряда характеристик – размера выборки, временного периода происхождения исходных данных, а также их структуры. В зависимости от значений перечисленных характеристик показатель Херста изменяется, что осложняет его интерпретацию. Свойственные параметру Херста недостатки исследованы в работах (Molnar, 1997; 1998). В связи с этим в следующих за ними исследованиях появились модификации, среди которых выделяются: R/R-анализ, K-метод,метод Барроу, метод Виттла и др. Однако они не лишены недостатков, которые не позволяют различать стационарные случайные процессы.

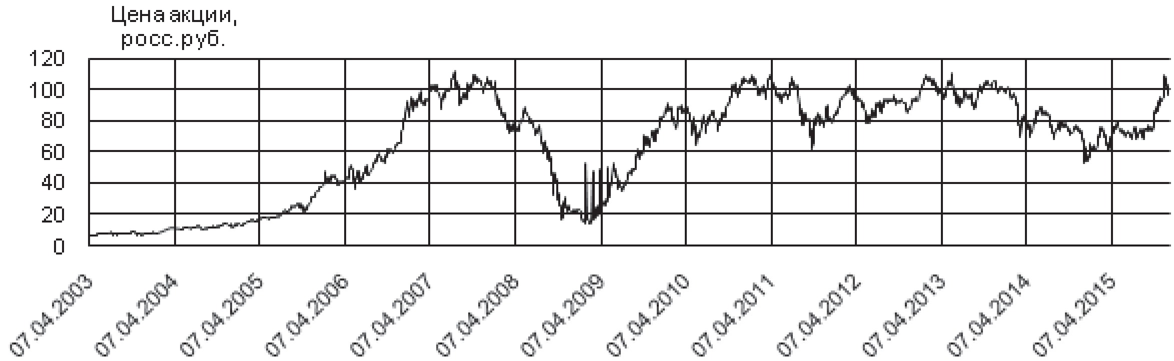

Рис. 1.График временного ряда стоимости акций ПАО «Сбербанк России»

Источник. Рис. 1–4 – авторская разработка.

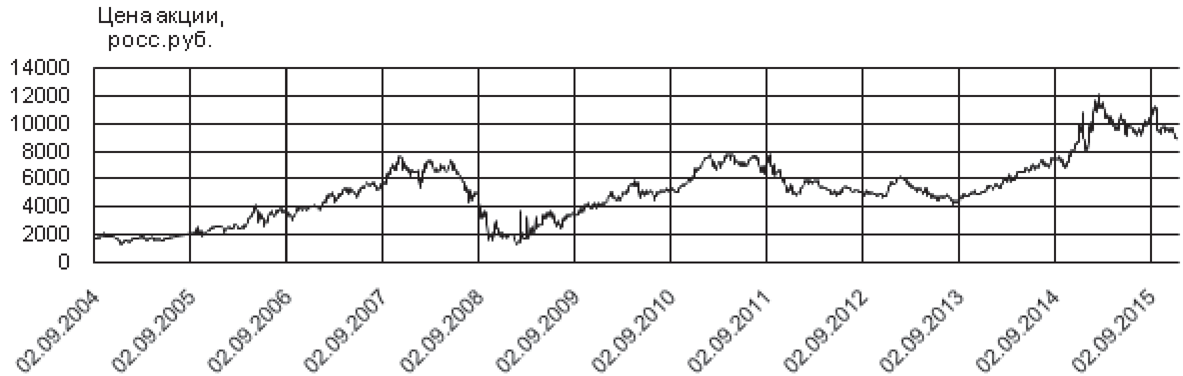

Рис. 2. График временного ряда стоимости акций ГМК «Норильский никель»

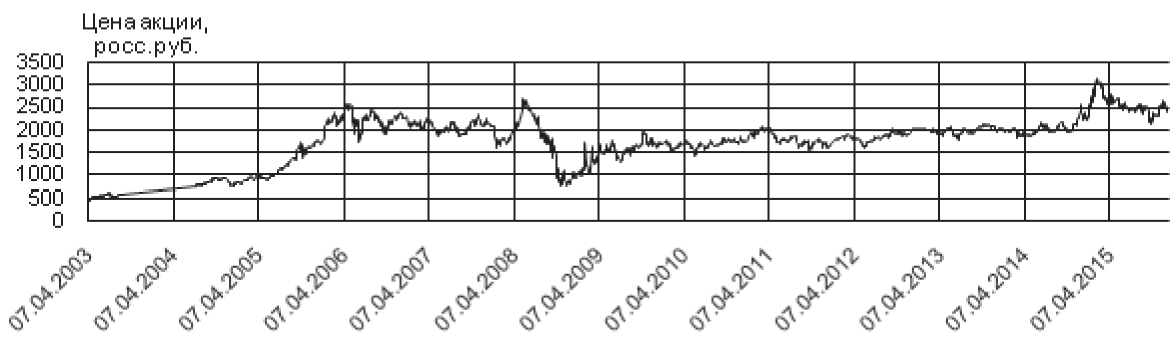

Рис. 3. График временного ряда стоимости акций ПАО «Лукойл»

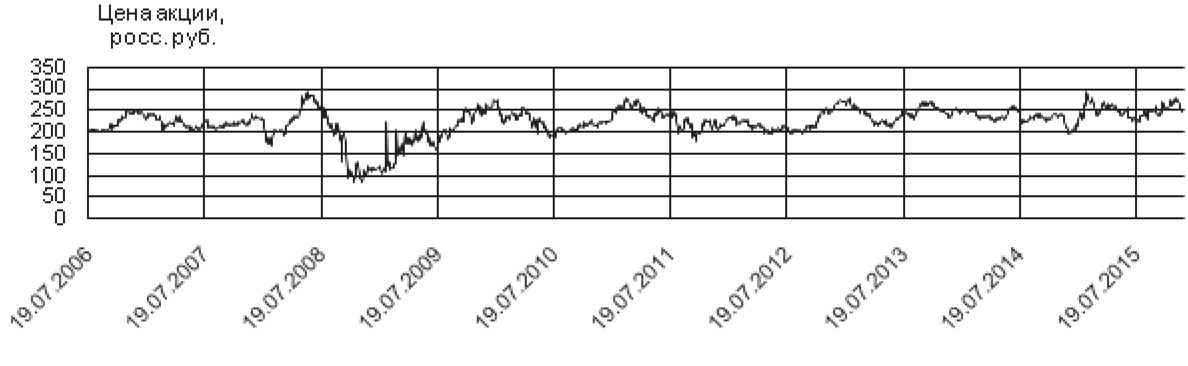

Рис. 4. График временного ряда стоимости акций ОАО «НК «Роснефть»

В рамках нелинейной динамики проанализировать ключевые характеристики временного ряда можно при помощи показателя приблизительной или аппроксимированной энтропии ($ApEn$). Алгоритм конструирования этого показателя так же, как создаваемые в рамках методов нелинейной динамики алгоритмы, подразумевает переход от одномерного представления исходного ряда к многомерному на основе установления размерности вложения.

Аппроксимированная энтропия – это величина, количественно определяющая степень сложности сигнала (Манило, 2006. С. 22). Она была предложена Пинкусом в 1991 г. в виде модифицированной формулы энтропии Экмана-Рюэлля (Eckmann-Ruelle entropy). В настоящее время аппроксимированная энтропия наиболее часто используется для анализа ЭКГ, в частности, для распознавания мерцательной аритмии (Pincus, 1995. C. 110–117).

В работе «Приблизительная энтропия как мера сложности системы» («Approximate entropy as a measure of system complexity») Пинкус отмечает, что показатель $ApEn$ может быть вычислен для любого временного ряда – хаотического или иного. В отличие от показателя Херста, аппроксимированная энтропия позволяет получать надежные и устойчивые оценки вне зависимости от размера выборки, что является несомненным преимуществом. Параметр $ApEn$ не зависит от временных отрезков происхождения данных. Для временных рядов, близких к регулярным, обладающих свойством квазипериодичности, ее значение мало (меньше, чем 0,05), в то время как для непредсказуемых и хаотических рядов без признаков какой-либо цикличности, наоборот, велико (более 0,05).

Алгоритм конструирования показателя, предложенный Пинкусом, носит итеративный характер и состоит из нескольких этапов, при этом показатель ApEn зависит от параметров τ, r и N. Пинкус предложил принять значение τ от 2 до 6 и r, – 0,1 или 0,25, умноженное на SD_x, где SD_x – стандартное отклонение исходной выборки:

$$SD_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left[x(n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\right]^2}.$$

Первоначально в качестве размерности вложения примем $\tau = 2$, а $r = 0{,}25 \cdot SD_x$.

1. Для исходных данных $x(1), x(2), \ldots, x(N)$, где N – длина исходной выборки данных, формируем последовательность векторов $X(1), \ldots, X(N-\tau+1)$, определяемые выражением $X(i) = [x(i), x(i+1), \ldots, x(i+\tau-1)], i = 1, \ldots, N-\tau+1$.

2. Определим расстояние между $X(i)$ и $X(j)$, $d[X(i), X(j)]$ как максимальную абсолютную разность между их соответствующими скалярными элементами, т. е.

$$d[X(i), X(j)] =$$
$$= \max_{k=0,\tau}[|x(i+k-1) - x(j+k-1)|].$$

3. Вычислим $C_i^{\tau}(r) = N_i^{\tau}(r)/(N-\tau+1)$, где $N_i^{\tau}(r)$ – количество значений $d[X(i), X(j)]$, удовлетворяющих выражению

$$d[X(i), X(j)] \le r, (j = 1, \ldots, N-\tau+1).$$

4. Определяем значение $\Phi^{\tau}(r)$ как сумму $C_i^{\tau}(r)$, нормированную на $(N-\tau+1)$:

$$\Phi^{\tau}(r) = \frac{1}{N-\tau+1} \cdot \sum_{i=1}^{N-\tau+1} \ln C_i^{\tau}(r).$$

5. Увеличим значение τ до $\tau+1$. Повторяя шаги 1–4, найдем значения $C_i^{\tau+1}(r)$, $\Phi^{\tau+1}(r)$.

6. Аппроксимированная энтропия определяется как величина

$$ApEn(\tau, r) = \lim_{N\to\infty}[\Phi^{\tau}(r) - \Phi^{\tau+1}(r)].$$

Для ограниченной выборки длины N:

$$ApEn(\tau, r, N) = \Phi^{\tau}(r) - \Phi^{\tau+1}(r).$$

Аппроксимированная энтропия обладает способностью распознавать смешанные процессы с детерминированными и случайными компонентами. Таким образом, аппроксимированная энтропия позволяет оценить степень зашумленности детерминированного сигнала в смешанном процессе, что является свойством, полезным для анализа временных рядов финансовых активов, поскольку многие из них содержат как детерминированную, так и стохастическую компоненты.

С помощью написанной авторами программы был рассчитан показатель $ApEn$ для $\tau \in [2;6]$, $r = 0{,}25 \cdot SD$. По индексам курсовой стоимости акций компаний получились следующие результаты:

- ПАО «Сбербанк России» – $2{,}819 \cdot 10^{-6}$;
- ГМК «Норильский никель» – $2{,}438 \cdot 10^{-6}$;
- ПАО «Лукойл» – $4{,}392 \cdot 10^{-6}$;
- ОАО «НК «Роснефть» – $1{,}064 \cdot 10^{-5}$.

Полученные значения меньше $5 \cdot 10^{-2}$, что говорит о наличии квазипериодичности, невысокой степени непредсказуемости и низком уровне хаотичности рассматриваемых временных рядов.

Методический подход к определению оптимальной размерности вложения на основе метода Грассбергера-Прокаччиа

Как отмечалось ранее, при переходе от одномерного временного ряда к многомерному (ряду векторов) каждый вектор многомерного ряда образуется из определенного числа τ последовательных значений исходного одномерного временного ряда. Важнейшей задачей на этапе данного перехода является определение числа τ – длины вектора задержек.

Очень часто τ устанавливается эмпирически, что далеко не всегда позволяет точно оценить размерность вектора задержек. Одним из подходов к определению величины τ является метод Грассбергера-Прокаччиа.

Для определения оптимальной размерности вложения в соответствии с данным методом последовательно осуществляется представление одномерного ряда в виде многомерного:

$$X_{\tau\times(N-\tau+1)} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{\tau+1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_{N-\tau+1} \\ x_{N-\tau+2} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \right)$$

для разных размерностей вложения $\tau = 2,3,4\ \ldots$. Для каждого τ последовательно вычисляется корреляционный интеграл $C_{\tau,N}(l)$, алгоритм расчета которого рассмотрен ранее. После установления величины $C_{\tau,N}(l)$ для заданного τ рассчитывается корреляционная размерность:

$$d_c = \lim_{l\to 0} \lim_{N\to\infty} \frac{\ln C(l)}{\ln l}.$$

Аналитическими приемами получить предельное значение параметра d_c затруднительно, однако имеется возможность воспользоваться геометрической схемой его приближенной оценки как тангенса угла наклона $\ln C(l)$к$\ln l$. С увеличениемτ будет получаться новое значение тангенса угла наклона, который после достижения определенного уровня перестает меняться. Предельное значениеτ, при котором тангенс угла наклона становится константой, и будет оптимальной размерностью вложения в соответствии с алгоритмом Грассбергера-Прокаччиа.

Важно отметить, что сходимость тангенса угла наклона к константе при определенном значении размерности вложения служит критериальной оценкой степени хаотичности исследуемого временного ряда. При достижении сходимости тангенса угла к постоянной величине последняя принимается в качестве оценки корреляционной размерности d_c, а временной ряд признается нехаотическим. В соответствии с теоремой Такенса-Мане, размерность фазового пространства динамической системы, породившей исходный временной ряд, не превышает $(2d_c + 1)$, поэтому если конечномерное представление системы существует, то с увеличением τ тангенс угла будет стремиться к конечной величине d_c.

В рамках разработанного авторами программного обеспечения алгоритма Грассбергера-Прокаччиа по установлению оптимальной размерности вложения для временных рядов курсовой стоимости акций рассматриваемых компаний компьютерное время вычислений только по одному ряду составило 2 часа. При этом для одного временного ряда с длиной 2000 наблюдений объем вычислений достигает 250 000 операций.

Для рассматриваемых в статье компаний получились следующие результаты:

- ПАО «Сбербанк России» d_c=1,7429 при $\tau = 4$;
- ГМК «Норильский никель» d_c=1,7194 при $\tau = 3$;
- ПАО «Лукойл» d_c=1,7331 при $\tau = 4$;

- ОАО «НК «Роснефть» d_c=1,6846 при $\tau = 3$.

Прогнозирование динамики временных рядов финансовых активов на основе алгоритма сингулярного спектрального анализа

Рассчитанная оптимальная размерность вложения позволяет перейти к методу сглаживания и прогнозирования временных рядов: сингулярному спектральному анализу (ССА). Данный метод также основан на теореме Такенса и предполагает переход от одномерного представления исходного ряда $x_t = x_1, x_2 \dots x_N$ к многомерному:

$$X_{\tau\times(N-\tau+1)} = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{\tau+1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_{N-\tau+1} \\ x_{N-\tau+2} \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}\right),$$

где N – число элементов исходного ряда;

τ– оптимальная размерность вложения.

Для метода ССА следующим шагом будет обработка матрицы X с использованием методов факторного анализа, в частности, метода главных компонент. Целью его применения является снижение размерности имеющегося пространства запаздываний и переход к новым, информативно более обоснованным переменным – главным компонентам. Отличительной особенностью применения метода главных компонент в реализации схемы ССА является то, что он позволяет одновременно обработать всю матрицу X.

Для перехода к главным компонентам по данным, представленным в виде X, строится корреляционная матрица, которая затем раскладывается на собственные значения и собственные векторы матрицы C :

$$C = \frac{1}{N} X \cdot X' = V \cdot \Lambda \cdot V'.$$

Здесь Λ – диагональная матрица собственных значений, а $V = (V^1, V^2, \dots, V^\tau)$ – ортогональная матрица, составленная из нормированных собственных векторов. В конечном счете получим матрицу главных компонент:

$$Y = V' \cdot X = (Y_1, Y_2, \dots, Y_\tau).$$

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau$ можно рассматривать как вклад главных компонент $Y_1, Y_2, \dots, Y_\tau$ в общее информационное содержание исходного временного ряда. По полученным главным компонентам можно полностью восстановить исходную матрицу

$$X: X = \sum_{i=1}^{\tau} V^i Y_i,$$

а по матрице X, в свою очередь, появляется возможность восстановить исходный временной ряд $(x_i)_{i=1}^N$.

Предположим, из τ компонент для дальнейшего анализа оставлены лишь первые r. Тогда для восстановления исходной матрицы X можно использовать первые r собственных векторов V^i. В таком случае

$$\tilde{X} = (V^1, V^2, \dots, V^r) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_r \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} V^i Y_i,$$

где $\tilde{X}$ – восстановленная матрица, имеющая r столбцов и τ строк.

Теперь исходный временной ряд, воссозданный из этой матрицы, определится как $\tilde{x}_{i+s-r,r-i+1}$. Последовательная процедура получения $(\tilde{x}_i)_{i=1}^N$ называется ССА-сглаживанием исходного временного ряда $(x_i)_{i=1}^N$ по первым r компонентам (Лоскутов, 2008. С. 55).

Прогнозирование по методу ССА предполагает построение ряда на один временной шаг вперед эквивалентно построению нового вектора в пространстве запаздываний. У такого вектора будет единственная неизвестная координата, а остальные – известны из построения. Эта единственная неизвестная координата находится из условия минимизации проекции данного вектора на r-мерную гиперплоскость. Таким образом, задача прогнозирования сводится к задаче минимизации по одной переменной и решается аналитически, что позволяет получить прогнозное значение последующего элемента ряда (Истомин, 2007. С. 47).

Окончательное выражение для прогнозируемого $(N + 1)$-значения будет выглядеть как

$$X^{N+1} = \frac{V_\tau V_*' Q}{1 - V_\tau V_\tau'},$$

где

$$V_* = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & \cdots & v_1^r \\ v_2^1 & v_2^2 & \cdots & v_2^r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{\tau-1}^1 & v_{\tau-1}^2 & \cdots & v_{\tau-1}^r \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} x_{N-\tau+2} \\ x_{N-\tau+3} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix},$$

$$V_\tau = (v_\tau^1, v_\tau^2, \dots, v_\tau^r).$$

Для предсказания последующих значений временного ряда в простейшем случае требуется лишь изменить соответствующим образом матрицу Q и вновь умножить ее на величину $V_\tau V_*' / \left(1 - V_\tau V_*'\right)$, что приведет к частичному или полному повторению алгоритма ССА и изменению матриц V_τ и V_*.

По исследуемым временным рядам индексов акций четырех компаний в соответствии с алгоритмом ССА нами был построен ретроспективный прогноз с горизонтом в 12 дней (см. таблицу). В качестве τ использовалась оптимальная размерность вложения для соответствующего ряда, рассчитанная ранее в соответствии с алгоритмом Грассбергера-Прокаччиа. Первоначально каждый из временных рядов подвергался сглаживанию, а далее осуществлялся ретропрогноз с автоматическим перерасчетом всего алгоритма после добавления полученного прогнозного значения к исходным данным.

Ретроспективные прогнозные величины курсовой стоимости акций компаний сравни-вались с фактическими их значениями. Согласно данным таблицы, максимальное среднее абсолютное отклонение прогноза от фактического значения составило 3,8 для ПАО «Лукойл».

Созданный набор математических моделей и инструментальных средств, основанных на методологии исследования порожденными динамическими системами временных рядов экономических индикаторов, позволяет установить их нелинейный характер, оценить степень регулярности, хаотичности и предсказуемости, а также выявить квазипериодичность поведения. Определение соответствующих количественных характеристик временных рядов дает возможность перейти к прогнозированию на основе сингулярного спектрального анализа, способствующего увеличению его точности. Предложенный авторами набор математических и инструментальных методов обработки длинных временных рядов финансовых индикаторов целесообразно применять к ря-

Таблица

Ретроспективный прогноз курсовой стоимости акций компаний

Период	Сбербанк России			Норильский Никель			Лукойл			Роснефть		
	Факт	Прогноз	Отклонение, %	Факт	Прогноз	Отклонение, %	Факт	Прогноз	Отклонение, %	Факт	Прогноз	Отклонение, %
17.12.2015	103,8	98,6	5,0	9450,0	8869,9	6,1	2427,0	2440,7	0,6	258,7	246,8	4,6
18.12.2015	98,8	100,0	1,2	9229,0	9033,9	2,1	2327,1	2429,0	4,4	250,8	249,4	0,5
21.12.2015	98,7	100,3	1,6	9048,0	8986,4	0,7	2338,7	2431,7	4,0	245,6	248,0	1,0
22.12.2015	99,8	100,3	0,5	9220,0	8949,2	2,9	2327,0	2425,7	4,2	248,2	247,7	0,2
23.12.2015	103,0	99,6	3,3	9410,0	9007,5	4,3	2317,0	2431,3	4,9	253,7	248,3	2,1
24.12.2015	101,4	100,2	1,2	9344,0	8965,2	4,1	2325,3	2426,3	4,3	251,6	247,4	1,7
25.12.2015	101,3	100,0	1,3	9344,0	8975,8	3,9	2310,2	2427,1	5,1	245,8	247,5	0,7
28.12.2015	100,2	100,0	0,2	9350,0	8983,8	3,9	2309,9	2425,3	5,0	246,0	247,4	0,6
29.12.2015	101,8	99,9	1,9	9189,0	8967,9	2,4	2353,6	2425,7	3,1	255,0	247,0	3,1
30.12.2015	101,3	100,0	1,2	9150,0	8977,2	1,9	2345,9	2423,7	3,3	253,3	247,0	2,5
04.01.2016	98,0	99,9	2,0	8922,0	8973,3	0,6	2310,2	2423,5	4,9	251,0	246,8	1,7
05.01.2016	98,9	99,9	1,0	9085,0	8970,0	1,3	2380,0	2422,4	1,8	253,2	246,6	2,6
Среднее отклонение			1,7			2,8			3,8			1,8

Источник. Авторская разработка.

дам с перечисленными выше свойствами. В частности, эти свойства оказались характерными для временных рядов котируемых на Московской фондовой бирже курсовой стоимости «голубых фишек».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

Барышева Е.Н. 2012. Модели оценки финансовых показателей с учетом их стохастичности и хаотичности. *Вестник Самарского государственного университета*. № 4. С. 115–126. [Barysheva E.N. 2012. Models of assessment of financial performance taking into account their stochasticity and a randomness. *Vestnik Samara Gosudarstvennyi Universitet*. No 4. PP. 115–126. (In Russ.)]

Горшенин В.Ф. 2014. Цикличность развития нелинейных экономических систем. *Вестник Челябинского государственного университета*. № 15. С. 32–39. [GorsheninV.F. 2014. Recurrence of development of nonlinear economic systems. *Vestnik Chelyabinsk Gosudarstvennyi Universitet*. No 15. PP. 32–39. (In Russ.)]

Истомин И.А. 2007. *Новые подходы к исследованию временных рядов*. Москва: РГБ. [Istomin I.A. 2007. New approaches to a research of temporary ranks. Moscow:Russian State Library. (In Russ.)]

Лоскутов А.Ю. 2008. *Анализ временных рядов*. Москва: Московский государственный университет. [Loskutov A.Y. 2008. *Analysis of temporary ranks*. Moscow: Moscow State University. (In Russ.)]

МанилоЛ.А. 2006. Автоматическое распознавание мерцательной аритмии с использованием оценок аппроксимированной энтропии. *Информационно-управляющие системы*. № 1. С. 21–27. [Manilo L.A. 2006. Automatic recognition of a ciliary arrhythmia with use of estimates of the approximated entropy. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*. No 1. PP. 21–27. (In Russ.)]

Читая Г.О., Белявский С.С. 2014. Обобщенная модель динамики функционирования малой городской системы. *Экономика, моделирование, прогнозирование*. № 8. С. 181–186. [Chitaya G.O., Belyavskiy S.S. 2014. The generalized model of dynamics of functioning of small city system. *Ekonomika, modelirovanie, prognozirovanie*. No 8. PP. 21–27. (In Russ.)]

Molnar S. 1997. *Bottlenecks on the way towards fractal characterization of network traffic: Estimation and interpretation of the Hurst parameter*. Performance and Management of Complex Communication Network. PP. 111–133.

Molnar S.1998. *How to characterize Hursty traffic?* Budapest: Technical University of Budapest.

Pincus S. 1995. Approximate entropy as a measure of system complexity. *Chaos*. No 5. PP. 110–117.

In citation: *Belorusskii Ekonomicheskii Zhurnal*. 2016. No 4. P. 132–141.

Belarusian Economic Journal. 2016. No 4. P. 132–141.

MATHEMATICAL MODELS OF ANALYSIS AND FORECAST OF FINANCIAL ASSETS DYNAMICS

Gigla Chitaya[1], Artem Tarasyuk[1]

Author affiliation: [1] Belarussian State Economic University (Minsk, Belarus).

Corresponding author: Artem Tarasyuk (artemtarasiuk@gmail.com).

ABSTRACT. The papers substantiates the creation and realization of a set of mathematical models and instrumental means of processing long temporal sets of financial assets generated by nonlinear dynamics of dependencies in their structure. Grounded and instrumentally supported are the computational procedures of applying methods of analysis of nonlinear dynamics of financial assets, assessment of the degree of their temporal sets randomness, as well as identifying hidden cyclic recurrence with the help of algorithm of singular spectral analysis complemented by the Grassberger-Procaccia method and raising the preciseness of forecasting exchange rate value of the issuing companies' shares.

KEYWORDS: financial assets, quasi-periodicity, nonlinearity, multi-dimensional set of vectors, embedding dimension.

JEL-code: C69, G11.

Received 1.03.2016

■ ■ ■