• организация сети ресурсных центров по сбору и анализу заявок и предложений по подготовке квалифицированных кадров для инновационных организаций, осуществляющих деятельность в России и Беларуси;

• разработка единых образовательных стандартов и системы оценивания, аккредитации учебных достижений;

• создание сетевых учебных заведений.

5. Процессу интеграции национальных систем подготовки кадров для инновационной сферы России и Беларуси во многом способствуют новые подходы и инновационные образовательные технологии, разрабатываемые в специально создаваемых образовательных структурах.

Литература

1. *Воронина, Л.А.* Научно-инновационные сети в России: опыт, проблемы, перспективы / Л.А. Воронина, С.В. Ратнер. — М.: ИНФРА-М, 2010.

2. *Дедков, С.М.* Российско-белорусское академическое научное сотрудничество / С.М. Дедков, В.К. Егоров // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. — Минск, 2012.

3. *Дорина, Е.Б.* Институциональные основы реализации экономической стратегии Беларуси в условиях глобализации и интеграции / Е.Б. Дорина // Вестн. экон. интеграции. — 2009. — № 1. — С. 30—41.

4. *Молчанова, О.П.* Формирование стратегических альянсов для реализации высокотехнологичных социально-ориентированных проектов: сравнительный анализ российского и зарубежного опыта / О.П. Молчанова, А.М. Шестоперов // Интеграл. — 2012. — Т. 2, № 64. — С. 111—116.

5. *Bellman, L.* Knowledge transfer and the integration of research, policy and practice / L. Bellman, J. Webster, A. Jeanes // J. of research in nursing. — 2010. — № 16. — P. 254—270.

Статья поступила в редакцию 19.12.2012 г.

М.П. Дымков
доктор физико-математических наук, профессор
БГЭУ (Минск)

К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СОРБЦИОННЫХ АППАРАТОВ

В данной работе исследуется математическая модель сорбционного аппарата, используемого, в частности, при очистке сточных вод промышленных предприятий. Эта модель представлена в виде непрерывной 2-D-модели типа Россера. Доказано существование и единственность решений в таких моделях, а также получены формулы представления решений задачи управления посредством граничных данных. Рассмотрена линейно квадратичная задача оптимизации и изучена возможность построения оптимального управления в форме обратной связи. Обсуждаются частотные методы решения задачи, а также ее возможные обобщения.

This paper introduces a model for the dynamics of a sorption process from the industrial water supply and sewage treatment industries that is a continuous version of the Roesser state-space model for 2-D discrete *systems. Conditions for unique solvability and the representation formula are then developed together with the solution of an optimization problem using boundary control. The solution of the linear-quadratic optimization problem by state feedback is studied. The frequency method for the problem solution and the feasible problem statement for the further extension are also discussed.*

В последние годы пристальное внимание привлекают так называемые многопараметрические системы управления. В зарубежных публикациях эти объекты называют m-D-системы ($m > 1$, чаще всего $m = 2$) (сокращение английского термина multidimensional systems). Отличительной чертой таких систем является то, что их динамические переменные зависят более чем от одного параметра, так что распространение информации в них осуществляется по многим независимым направлениям. При этом эти направления могут быть представлены в различных комбинациях, а именно, как функции дискретных, непрерывных или смешанных дискретно-непрерывных параметров.

Первоначальные исследования таких моделей мотивировались необходимостью математической формализации многочисленных задач, возникших в практике электрических цепей и обработке многомерных сигналов и их изображений. В первых работах для изучения электрических схем были использованы модели, которые опирались на так называемые передаточные функции, зависящие от двух и более переменных. Наиболее полно развитие теории многопараметрических систем в этот период изложено, по-видимому, в [1], а также ряде обзорных статей, частично опубликованных в Трудах общества IEEE и переведенных затем на русский язык [2].

Всевозрастающий интерес к 2-D-системам объяснялся широким распространением во многих областях естествознания и техники цифровых методов распознавания и обработки изображений, цифровой фильтрации массивов данных и подавления шума, для сжатия и улучшения качества информации, обработки сейсмических, радарных данных и ряда других приложений [3].

Изучение нового круга задач можно осуществлять с использованием различных формальных представлений используемых объектов. В теории цифровой обработки сигналов основной упор делается на описание соответствия между входом и выходом системы посредством передаточной функции, в то время как современная теория управления опирается главным образом на представления в пространстве состояний. Это различие в определенной мере можно объяснить тем, что в каждой области необходимо найти ответы на поставленные вопросы. В первом случае интересуются большей частью проблемами реализации систем с заданным внешним поведением, что и предопределяет необходимость в описании соответствия «вход-выход». Методы теории управления, основанные на представлении объектов в пространстве состояний посредством динамических систем, позволяют проанализировать качество этих объектов, определить наиболее рациональные режимы их функционирования и синтезировать в итоге оптимальные замкнутые системы управления. При первом подходе основные методы исследования опираются на классические разделы алгебры, прежде всего на теорию полиномов от нескольких переменных. Следует отметить, что теория полиномов от двух и более переменных, а также другие алгебраические объекты, вовлеченные позже в рамках данного подхода, существенно сложнее случая одной переменной. Это обстоятельство является серьезным препятствием для алгебро-геометрических методов. Весьма объективно трудности и проблемы этого подхода изложены в обзоре [4]. По-видимому, в [5, 6] были впервые предложены различные модели дискретных 2-D-систем управления, определенные непосредственно в пространстве состояний. Эти модели могут быть объединены в виде некоторого операторного уравнения, заданного в пространствах функций, определенных на целочисленной решетке. Для случая дискретных многопараметрических систем имеется довольно обширная литература. С историей становления теории таких систем и основных направлений исследований можно познакомиться, например в монографии [7].

Важный класс многопараметрических систем составляют так называемые многошаговые (в англоязычной литературе их называют repetitive processes), в которых распространение информации имеет специфический характер. Теория таких систем хорошо изложена в работе [8]. Эти системы нашли широкое применение при моделировании многих технических задач, например итеративных схемах с обучением в робототехнике, конструировании устройств конвейерного типа и др. Некоторые результаты из последних исследований, имеющих как теоретический, так и практический интерес, приведены в [9, 10].

Предметом данной работы являются многопараметрические (2-Д)-системы с непрерывным изменением параметров динамических переменных. Такого типа системы использовались, например, для моделирования МГД процессов, прокачки веществ в газопроводах [11, 12] и др.

Одна из моделей процесса очистки сточных вод и водоснабжения промышленных предприятий [13] может быть представлена в форме непрерывной 2-Д-модели Россера [14], или как еще называют в математической литературе в виде уравнений в частных производных типа Гурса [15]. Доказано существование и единственность решений, а также получена формула для представления решений в таких системах. Изучена возможность управления процессом очистки (сорбции загрязняющих веществ) посредством граничных управлений, моделирующих закладку сорбентов в начальный период. Рассмотрена линейно квадратичная задача оптимального управления, доказано существование и единственность оптимального решения. Также изучается возможность представления оптимального управления в форме обратной связи. В заключительной части работы обсуждаются возможности частотных методов решения задачи и направления дальнейших исследований в данной области.

Математическая модель и формулировка задачи

В данной работе рассматривается математическая модель отдельного сорбционного аппарата, полученная на основе уравнений неравновесной динамики сорбции с линейной изотермой [13, 15]. При некоторых предположениях процесс сорбции одиночным аппаратом может быть представлен в виде следующей непрерывной 2-D-системы:

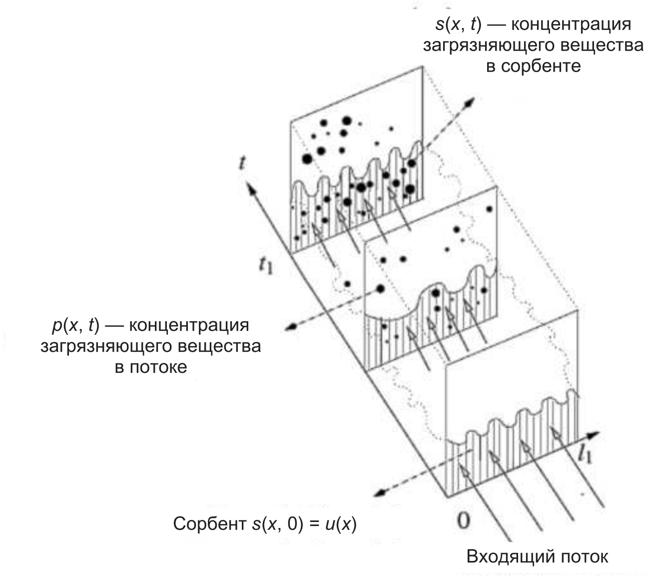
$$\begin{aligned} \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} &= p(x,t)-s(x,t), \quad 0\le t\le t_1, \\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} &= s(x,t)-p(x,t), \quad 0\le x\le l_1, \end{aligned} \tag{1}$$

где l_1 — протяженность, а t_1 — длительность одного цикла работы рассматриваемого сорбционного аппарата. Здесь переменная $s(x,\ t)$ обозначает плотность адсорбированного (извлеченного) вещества, т.е. концентрация загрязняющего вещества в сорбенте, а $p(x,\ t)$ — концентрация загрязняющего вещества в потоке в точке x в момент времени t. Граничные условия для этой системы зададим в виде

$$p(0,t)=\psi(t), 0\le t\le t_1, s(x,0)=u(x), 0\le x\le l_1, \tag{2}$$

где $\psi(t), 0\le t\le t_1$ является заданной непрерывной функцией, а $u(x)$, $0\le x\le\ l_1$ есть функция управления, которая обозначает концентрацию сорбента по всей длине аппарата, загружаемого в начальный момент времени $t = 0$. Таким образом, граничные данные

$u(x)$ выступают в качестве искомых параметров управления сорбционным аппаратом (см. рисунок).



Иллюстративная схема сорбционного аппарата

В этой работе рассматривается задача нахождения такой функции управления $u(x)$, которая вместе с соответствующим решением $s(x, t)$ и $p(x, t)$ уравнений (1) с граничными условиями (2) минимизирует показатель качества вида

$$J(u) = \int_0^{l_1} |u(x)|^2 dx + \int_0^{l_1}\int_0^{t_1}\left[|p(x,t)|^2 + \left|\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}\right|^2 \right] dx\, dt. \qquad (3)$$

Таким образом, цель оптимизационной задачи (1)—(3) заключается в минимизации расхода сорбента и концентрации загрязняющих веществ в потоке.

Отметим, что функция управления $u(x)$ в модели сорбционного аппарата присутствует в граничных условиях, так что управление процессом очистки входящего потока осуществляется посредством граничных данных.

Существование и единственность решения

Введем следующие обозначения: $C(K)$ — пространство непрерывных функций, определенных на множестве K; $AC(K)$ — пространство абсолютно непрерывных функций на K; $L^2(K)$ — пространство измеримых и интегрируемых с квадратом функций на K; $C^1(\Pi)$, $\Pi := L \cdot T$ — пространство дифференцируемых функций $f(x, t)$, определенных в некоторой открытой области $\Omega \supset \Pi$ с непрерывными частными поизводными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Лемма 1. Система уравнений (1)—(2) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $p(x,\ t)$ $s(x,\ t)$ для любых начальных данных $\psi(\cdot)\in C[0,t_1]$ и управлении $u(\cdot)\in L^2[0,l_1]$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что если абсолютно непрерывная функция $p(x,\ t)$ является решением интегрального уравнения

$$p(x,t)=e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t e^{\xi+\eta}p(\xi,\eta)d\xi d\eta+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-x}\psi(t), \tag{4}$$

то $p(x,\ t)$ и функция

$$s(x,t)=\int_0^t e^{\eta-t}p(x,\eta)d\eta+e^{-t}u(x) \tag{5}$$

удовлетворяют (1) и (2).

Далее осталось доказать, что уравнение (4) имеет решение. Можно показать, что оператор T, заданный формулой

$$(Tf)(x,t)=\int_0^x\int_0^t e^{\xi+\eta}f(\xi,\eta)d\xi d\eta+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-x}\psi(t), \tag{6}$$

является сжимающим [17] в пространстве Соболева $W_2^1(\Pi)$ для любых функций $\psi(\cdot)\in C[0,t_1]$ и $u(\cdot)\in L^2[0,l_1]$. Тогда по теореме о неподвижной точке интегральное уравнение (6) имеет единственное решение $p(x,\ t)$, и, следовательно, функция $s(x,\ t)$ единствеными образом определяется фомулой (5). Лемма доказана.

Ниже получим формулу для представления решения. С этой целью рассмотрим параметрическое интегральное уравнение вида

$$p(x,t)=\mu e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t e^{\eta+\xi}p(\eta,\xi)d\eta d\xi+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-x}\psi(t), \tag{7}$$

относительно неизвестной функции $p(x,\ t)$, где μ является скалярным параметром. Это уравнение типа Вольтерра, правая часть которого, как видно из доказательства леммы, является сжимающим опратром при любых $\psi(\cdot)\in C[0,t_1]$ и $u(\cdot)\in L^2[0,l_1]$. Следовательно, согласно теореме о неподвижной точке [17], это уравнение имеет единственное решение.

Решение интегрального уравнения (7) можно представить в виде степенного ряда относительно параметра μ

$$p(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,t)\mu^n, \tag{8}$$

где

$$p_n(x,t)=e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t K_n(x,t,\xi,\eta)p_0(\xi,\eta)d\xi d\eta,\quad n=1,2,... \tag{9}$$

$$p_0(x,t)=e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz,$$

а ядра   определяются реккурентной формулой

$$K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)=\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{t}K_n(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau,$$
$$K_1(x,t,\xi,\eta)=e^{\xi+\eta},\quad n=0,1,2,\ldots. \tag{10}$$

Можно проверить, что решения интегральных уравнений (10) имеют вид

$$K_{n+1}(x,t,\xi,\eta)=e^{-(x+t)}e^{\xi+\eta}\frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{(t-\eta)^n}{n!},\quad 0\le x,\xi\le l_1,\quad 0\le t,\eta\le t_1. \tag{11}$$

Так как функции $p_n(x, t)$ ограничены в области Π, то степенной ряд (8) при любом конечном значении параметра μ является абсолютно и равномерно сходящимся. Кроме того, при любом конечном значении параметра μ и $t \ge \tau$ ряд

$$R(x,t,\xi,\eta,\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x,t,\xi,\eta)\mu^n \tag{12}$$

абсолютно и равномерно сходится к резольвенте . Можно показать, что резольвента удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(x,\xi,t,\eta,\mu)=e^{\xi+\eta}+\mu\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{t}R(z,\tau,\xi,\eta)dzd\tau, \tag{13}$$

которое эквивалентно следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta,\mu)}{\partial x}=\mu\int_{\eta}^{t}R(x,\tau,\xi,\eta,\mu)d\tau, \tag{14}$$

с начальными условиями вида

$$+ \qquad\qquad + \tag{15}$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой допустимой функции $u(x)$ система управления, описываемая уравнениями (1) и (2), имеет единственное решение $(p(x, t), s(x, t))$ вида

$$p(x,t)=e^{-x}\psi(t)+e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz+e^{-(x+t)}[\int_0^x\int_0^t e^{-\xi}R(x,t,\xi,\eta)\psi(\eta)d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^x e^z u(z)[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta]dz], \tag{16}$$
$$s(x,t)=\int_0^t e^{\eta-t}p(x,\eta)d\eta+e^{-t}u(x),$$

где функция находится из соотношений (13) и (15) при $\mu = 1$.

Доказательство. Действительно, положив $\mu = 1$ в формулах (16)—(19) и учитывая (11), можно убедиться, что решения $p(x, t)$ и $s(x, t)$ уравнений (1) и (2) задаются формулами (16). Теорема доказана.

Условия оптимальности

В данном разделе доказано существование и единственность решения оптимизационной задачи (1)—(2). На основе операторного подхода получено представление оптимального управления.

Теорема 2. Для любых начальных данных $\psi(\cdot) \in C[0, t_1]$ задача оптимизации (1)—(3) имеет единственное решение $u^0(\cdot) \in L^2[0, l_1]$.

Доказательство. В пространствах функций и $AC(\Pi)$ введем скалярные произведения формулами

$$(u, v)_2 \triangleq \int_0^{l_1} u(x)v(x)dx, \quad \forall\, u, v \in L^2[0, l_1] \tag{17}$$

и

$$(\phi, \psi)_1 \triangleq \int_0^{l_1}\int_0^{l_1} \varphi(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int_0^{l_1}\int_0^{l_1} [\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}]dxdt. \tag{18}$$

Определим оператор $\mathsf{L} : L^2[0, l_1] \to AC(\Pi)$ формулой

$$(\mathsf{L}u)(x,t) = e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz + \int_0^x e^z u(z)[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}R(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta]dz, \tag{19}$$

и еще один оператор $\mathsf{F} : C[0, t_1] \to AC(\Pi)$ зададим соотношением

$$(\mathsf{F})(x,t) \;=\; e^{-x}\psi(t) + \;\; e^{-(x+t)}\int_0^x\int_0^t e^{-\xi}R(x,t,\xi,\eta)\psi(\eta)d\xi d\eta. \tag{20}$$

Тогда с помощью введенных операторов решение $p \in AC(\Pi)$ для первого уравнения из (1) с начальными данными (2) можно записать в виде

$$\mathsf{L} \quad \mathsf{F} \tag{21}$$

Теперь показатель качества (2) с помощью введенных операторов может быть представлен в виде

$$\mathsf{L} \quad \mathsf{F} \quad \mathsf{L} \quad \mathsf{F}$$

$$\mathsf{LL} \quad \mathsf{E} \qquad\qquad \mathsf{LF} \qquad\qquad \mathsf{FF} \tag{22}$$

где E означает тождественный оператор в , а $\mathsf{L}^* : AC(\Pi) \to L^2[0, l_1]$ есть сопряженный оператор для оператора L относительно введеных выше скалярных произведений, конкретный вид которого будет установлен ниже.

Так как для оператора $L^*L + E$ существует обратный оператор, то можно определить функцию управления в операторной форме следующим образом:

$$u^0 = -(L^*L + E\,)^{-1}L^*F\varphi. \tag{23}$$

Для того чтобы доказать, что u^0 является оптимальным решением рассматриваемой оптимизационной задачи, достаточно убедиться в справедливости неравенства $J(u) - J(u^0) \geq 0$ для всех допустимых управлений $u \in L^2[0, l_1]$. Обозначим $\Gamma = (L^*L + E)$. Тогда с учетом формулы (23) получаем следующее представление для приращения функционала качества:

$$J(u) - J(u^0) = \Gamma((u - u^0), (u - u^0))_2.$$

Так как оператор $\Gamma = L^*L + E > 0$ является положительным, то справедливо следующее неравенство:

$$J(u) - J(u^0) = ((\mathrm{L}^*\mathrm{L} + \mathrm{E})(u - u^0),(u - u^0))_2 > 0$$

для всех допустимых u, $u \neq u^0$. Это означает, что функция u^0, определенная в (23), действительно является единственным оптимальным управлением. Тогда, согласно (21), функция $p^0 = \mathrm{L}u^0 = \mathrm{F}\varphi$ является оптимальным решением системы уравнений (1), (2), соответствующим найденному оптимальному управлению u^0.

Теорема доказана.

Известно, что одной из привлекательных и трудных задач в теории и практике управления динамическими системами является представление оптимального управления в так называемой форме обратной связи [3]. Ниже дается одно из возможных представлений оптимального решения в задаче управления одиночным сорбционным аппаратом.

Теорема 3. Оптимальное управление в задаче (1)—(3) может быть представлено в виде

$$u^0(z) = e^z[\int_0^{l_1} e^{-t}\frac{\partial p^0(z,t)}{\partial z}dt + \int_z^{l_1}\int_0^{l_1}(e^{-(x+t)}p^0(x,t) +$$
$$+(t - e^{-(x+t)})\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial x} + (x - z - e^{-(x+t)})\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t} +$$
$$+\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}[p^0(x,t)R(x,t,\xi,\eta) + \frac{\partial p^0(x,t)}{\partial x}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial x} +$$
$$+\frac{\partial p^0(x,t)}{\partial t}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}]d\xi d\eta)dxdt],$$

где является решением уравнений (13) и (15) при $\mu = 1$, а $p^0(x, t)$ есть оптимальное решение уравнений (1) и (2).

Доказательство. Из равенства (23) имеем

$$\mathrm{L}\ \mathrm{L}\quad \mathrm{F}\quad \mathrm{E} \qquad (24)$$

и, следовательно, используя (21), получаем, что элемент $p \in AC(\Pi)$ можно записать в виде

$$\mathrm{L}\quad \mathrm{F}$$

Тогда соотношения (24) можно переписать в виде L E откуда имеем

$$\mathrm{L} \qquad (25)$$

По определению сопряженного оператора для любых элементов $u \in L_2[0,l_1], \varphi \in AC(\Pi)$ и заданных скалярных произведений в пространствах функций и $AC(\Pi)$ должно выполняться условие

$$(\varphi,\mathrm{L}u)_1 = (\mathrm{L}^*\varphi,u)_2. \qquad (26)$$

Тогда с учетом вида скалярных произведений (17), (18) имеем

$$(\varphi,\mathrm{L}u)_1 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_1}(\varphi(x,t),(\mathrm{L}u)(x,t))dxdt +$$
$$+\int_0^{l_1}\int_0^{l_1}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial(\mathrm{L}u)(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial(\mathrm{L}u)(x,t)}{\partial t}dxdt, \qquad (27)$$

где

$$(\mathsf{L}u)(x,t) = e^{-(x+t)}\int_0^x e^z u(z)dz + \int_0^x e^z u(z)[\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)} R(x,t,\xi,\eta)d\xi d\eta]dz. \tag{28}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial(\mathsf{L}u)(x,t)}{\partial t} = e^{-t}u(x) + (t - e^{-(x+t)})\int_0^x e^z u(z)dz$$
$$+\int_0^x e^z u(z)(\int_x^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t}d\xi d\eta)dz.$$

Вычисляя аналогичным образом частную производную $\frac{\partial(\mathsf{L}u)(x,t)}{\partial x}$ и подставляя затем найденные производные в (27), поменяв при этом порядок интегрирования, получим, что сопряженный оператор $\mathsf{L}^*: AC(\Pi) \to L^2[0,l_1]$ имеет следующий вид:

$$(\mathsf{L}^*\varphi)(z) = e^z[\int_0^{t_1} e^{-t}\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z}dt + \int_z^{l_1}\int_0^{t_1}(e^{-(x+t)}\varphi(x,t) +$$
$$+(t - e^{-(x+t)})\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x} + (x - z - e^{-(x+t)})\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} +$$
$$+\int_z^x\int_0^t e^{-(\xi+\eta)}(\varphi(x,t)R(x,t,\xi,\eta) + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial x} +$$
$$+\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial R(x,t,\xi,\eta)}{\partial t})d\xi d\eta)dxdt].$$

Используя полученную формулу сопряженного оператора в соотношении (28), получим требуемое в теореме представление оптимального управления.

Теорема доказана.

Частотные методы решения задачи

Еще один из способов решения задач (1)—(3) может быть основан на трансформировании задачи в так называемую частотную область, когда фазовые переменные и функции управления посредством подходящих интегральных преобразований преобразуются в рациональные функции двух, вообще говоря, комплексных переменных. В этом случае дальнейшее исследование опирается на возможность факторизации рациональных функций от многих переменных [1].

Для реализации этого подхода используем интегральное преобразование Лапласа, которое для каждой действительной функции $f(x)$, $x > 0$, такой что для некоторых положительных констант M, a преобразует в комплексно значную функцию $F(z)$, $z \in C$ следующего вида:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-xz} f(x)dx$$

(C обозначает множество комплексных чисел).

Обратное преобразование Лапласа осуществляется по формуле

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{xz}F(z)dz, \quad \text{где } k > a.$$

(Здесь комплексное число i, называемое еще мнимой единицей, удовлетворяет по определению, уравнению $i^2 = -1$).

Дифференцируя равенство (4), можно получить следующее интегродифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}=\int_0^t e^{\eta-t}p(x,\eta)d\eta - p(x,t)+e^{-t}u(x) \tag{29}$$

с граничным условием вида

Предположим теперь, что функция $p(x, t)$ удовлетворяет всем свойствам, гарантрирующим существование преобразования Лапласа по обеим переменным x, t. Применим преобразование Лапласа к уравнению (29) по переменной x. Тогда получим следующее уравнение:

$$(z+1)P(z,t)=\int_0^t e^{\eta-t}P(z,\eta)d\eta + e^{-t}U(z)-\psi(t), \; z\in C \tag{30}$$

с начальным условием , где $U(z)$ есть преобразование Лапласа функции управления $u(x)$.

Далее, применяя опять преобразование Лапласа по переменной t в полученном интегральном уравнении (30), будем иметь следующее, уже алгебраическое, уравнение:

$$(z+1)P(z,\omega)=\frac{P(z,\omega)}{\omega+1}+\frac{U(z,\omega)}{z+1}+\Psi(\omega), \; z,\omega\in C.$$

Откуда окончательно получим

$$P(z,\omega)=\frac{U(z,\omega)}{z\omega+\omega+z}+\frac{\omega+1}{z\omega+\omega+z}\Psi(\omega), \; z,\omega\in C. \tag{31}$$

Найденная функция $P(z, \omega)$ есть решение дифференциальной системы уравнений (1)—(2), представленное в частотной области. В ряде случаев удается факторизовать полученную функцию двух комплексных переменных. Это позволяет достаточно просто вычислить обратное преобразование Лапласа, и, следовательно, найти в исходном фазовом пространстве требуемое решение $p(x, t)$, а также, используя формулу (5), и функцию $s(x, t)$, соответственно.

Отметим, что для минимизации на решениях системы уравнений (1)—(2) квадратичных функционалов вида (3) часто используют тождество Парсеваля, в соответствии с которым нормы функции и ее образы в частотной области $F(z)$ совпадают. Кроме того, так как рассматриваемый процесс осуществляется на конечных интервалах по обеим переменным, то соответствующие комплексно значные образы в частотной области принадлежат специальным пространствам так называемых целых функций экспоненциального типа. Эти пространства, в свою очередь, обладают рядом замечательных свойств, которые могут быть успешно использованы при решении задач оптимизации. Некоторые примеры решения такого типа задач можно найти, например, в [7].

В данной работе функционирование одиночного сорбционного аппарата моделируется с помощью непрерывной 2-D модели Россера. Изучена задача оптимизации расхода сорбента и получено представление оптимального управления в операторном и координатном видах. Дальнейшие исследования направлены на обобщение полученных результатов на процессы сорбции посредством многозвенных устройств, составленных по определенным схемам из нескольких однотипных одиночных сорбционных аппаратов, что представляет значительный интерес для приложений.

Одна из возможных постановок задачи для этого случая может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим сеть из n штук последовательно соединенных аппаратов, каждый из которых имеет длину l_1. Пусть t_1 обозначает продолжительность одного цикла работы сорбционных аппаратов, $k = 1, 2, 3, \ldots$ — последовательность циклов работы аппаратов. В последующем удобно будет использовать «локальные» время t и расстояние для каждого аппарата на k-м цикле так, что «глобальное» время равно $(k-1)t_1$, а x есть расстояние от начала i-го аппарата до рассматриваемой точки аппарата. Обозначим через $s_{ik}(x, t)$ концентрацию загрязняющих веществ в сорбенте i-го аппарата на k-м цикле в точке x в момент времени t. Соответственно, через $p_{ik}(x, t)$ обозначим концентрацию загрязняющих веществ в поступающем на k-м цикле в i-й аппарат потоке в точке x в момент времени t. Тогда математичскую модель сети аппаратов можно представить в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_{ik}(x,t)}{\partial t} &= p_{ik}(x,t) - s_{ik}(x,t), \quad 0 \le t \le t_1, \\
\frac{\partial p_{ik}(x,t)}{\partial x} &= s_{ik}(x,t) - p_{ik}(x,t), \quad 0 \le x \le l_1, \\
i = 1,2,\ldots,n; \quad & k = 1,2,3,\ldots.
\end{aligned} \qquad (32)$$

Для согласования начальных и граничных данных необходимо учесть способ соединения аппаратов в сеть [16]. Эти условия для системы уравнений (32) в нашем случае можно описать следующим образом:

$$p_{ik}(0,t) = \psi_{ik}(t), \quad s_{ik}(x,0) = \varphi_{ik}(x),$$
$$0 \le t \le t_1,\ 0 \le x \le l_1, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где

$$\psi_{ik}(t) = \begin{cases} \psi_i(t), \text{ если } i = 1, \\ p_{i-1k}(t), \text{ если } i = 2,\ldots,n, \end{cases} \qquad 0 \le t \le t_1,\ k = 1, 2,\ldots$$

$$\varphi_{ik}(t) = \begin{cases} u_i(t), \text{ если } k = 1, \\ s_{i+1k-1}(x, t_1), \text{ если } i < n, k > 1, \\ \nu k(x), \text{ если } i = n \end{cases} \qquad 0 \le x \le l_1,\ k = 1, 2,\ldots .$$

Здесь $\psi_k(t), 0 \le t \le t_1$ — заданная непрерывная функция, описывающая входной поток, поступающий для очистки на k-м цикле; $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — подлежащая определению концентрация сорбента, закладываемого в начальный момент $t = 0$ в i-й аппарат в начале операционного цикла при $k = 1$; $\nu_k(x), 0 \le x \le l_1$, — подлежащая определению концентрация сорбента, добавляемая в n-й аппарат на каждом цикле $k = 1, 2, \ldots$ в целях регенерации израсходованного в нем сорбента. Введенные начальные данные соответствуют круговой циркуляции потока, подлежащего очистке цепью последовательно соединенных аппаратов.

Задача заключается в нахождении функций управления $u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\nu_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$, удовлетворяющих условию

$$0 \le u_i(x) \le 1,\ 0 \le \nu_k(x) \le 1,\ i=1,...,n,\ \ 0 \le x \le l_1,\ k=1,2,...$$

и минимизирующих функционал качества вида

$$J(u) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_1} |u_i(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{t_1} |p_{ik}(l_1,t)|^2 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l_1} |\nu_k(x)|^2 dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_1} \int_0^{t_1} \left[|\ p_{ik}(x,t)\ |^2 + \left| \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \right|^2 \right] dx\ dt.$$

Таким образом, цель оптимизационной задачи заключается в минимизации расхода сорбента в сети аппаратов и концентрации загрязняющих веществ в потоке.

Литература

1. *Bose, N.K.* Applied Multidimensional System Theory / N.K. Bose. — New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

2. *Морф, М.* Новые результаты теории двумерных систем / М. Морф, Б.С. Леви, С.Ю. Гуп // ТИЭР. — 1997. — Т. 65, № 6. — 157—176.

3. *Прэтт, У.* Цифровая обработка изображений / У. Прэтт. — М.: Наука, 1995. — 720 с.

4. A behavioural approach to the pole structure of 1D and nD linear systems / J. Wood [et al] // SIAM J. of Control and Optimization. — 2000. — Vol. 32, № 8. — 627—661.

5. *Roesser, R.P.* A state-space model for linear image processing / R.P. Roesser // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — Vol. AC-20. — № 1. — P. 1—10.

6. *Fornasini, E.* Doubly indexed dynamical systems: state-space models and structural properties, Mathematical Systems Theory / E. Fornasini and G. Marchesini. — 1978. — Vol. 12. —P. 59—72.

7. *Дымков, М.П.* Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М.П. Дымков. — Минск: БГЭУ, 2005. — 363 с.

8. *Rogers, E.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / E. Rogers, K. Galkowski, D.H. Owens // Springer Verlag, LNCIS. — 2007. — № 349.

9. Constrained optimal control theory for differential linear repetitive processes / M. Dymkov [et al] // SIAM J. on Control and Optimization. — Vol. 47, № 1. — 2008. — P. 396—420.

10. Optimal control of non-stationary differential linear repetitive processes / S. Dymkov [et al] // Integral Equations and Operator Theory. — 2008. — Vol. 60. — P. 201—216.

11. *Dymkou, V.* Spectral methods for wall bounded MHD / V. Dymkou, A. Potherat // J. of Theoretical and Computational Fluid Dynamics. — 2009. — Vol. 23, № 6. — P. 535—555.

12. *Dymkou, S.* T-P A. Perdicou'lis Graph and 2-D systems approach in gas transport network modeling / S. Dymkou, G. Jank // International J. of Tomography and Statistics, Special Issue on Control Applications of Optimization: Applications of optimal control, robust control and stabilization, applications in industry. — 2007. — Vol. 6. — P. 21—27.

13. *Смирнов, А.Д.* Сорбционная очистка воды / А.Д. Смирнов. — Л.: Химия, 1982.

14. Modeling and Control of a Sorption Process using 2 D Systems Theory / M. Dymkov [et al] // Proceedings of the 2011, International Conference on Multidimensional (nD) systems (NDS-2011), 5 pages, Poitiers, France, September, 2011.

15. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1977.

16. *Бондаренко, Л.Н.* Математическая модель каскада сорбционных аппаратов / Л.Н. Бондаренко // Мат. моделирование. — 1997. — Т. 9, № 11. — С. 23—32.
17. *Плотников, В.* Устойчивость нелинейных Гурса-Дарбу систем / В. Плотников, В. Сумин // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 845—856.

Статья поступила в редакцию 12.12.2012 г.

Л.Л. Ермолович
доктор экономических наук, профессор
БГЭУ (Минск)

ОСНОВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЗАЦИИ ОЦЕНКИ ПЛАТЕЖЕСПОСОБНОСТИ ОРГАНИЗАЦИЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ И РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

В статье исследуются вопросы оценки платежеспособности организации в Республике Беларусь и Российской Федерации. Проведена сравнительная характеристика состава показателей платежеспособности и методик их расчета. По результатам сравнительного анализа с научной и практической точек зрения обоснована целесообразность формирования показателей платежеспособности организации по оплаченной выручке, а также задолженности по обязательствам.

The paper discusses the questions of appraising organizations' solvency in the Republic of Belarus and Russian Federation. A comparison is made of the solvency indicators and techniques of their calculation. Based on the comparative analysis from the scientific and practical points of view the expediency is substantiated of forming organization's solvency indicators according to paid revenue and those of debt according to liabilities.

Согласно ст. 17 и 18 Договора о создании Союзного государства между Российской Федерацией и Республикой Беларусь, к важнейшим направлениям его деятельности можно отнести создание единых правовых основ общего рынка [1]. К числу последних относится гармонизация состава показателей платежеспособности и методик их расчета, применяемых организациями Республики Беларусь и Российской Федерации.

Особая актуальность исследования оценки платежеспособности организаций Союзного государства обусловлена значимостью этого показателя в условиях постоянно увеличивающихся объемов экспортно-импортных операций между организациями Республики Беларусь и Российской Федерации. Это требует использования в Союзном государстве единых методологических принципов формирования показателей платежеспособности организаций-партнеров, соблюдение которых послужит основой разработки единых методик расчета названных показателей.

При заключении договоров на поставку продукции, выполнение работ и оказание услуг между организациями Республики Беларусь и Российской Федерации каждая из сторон должна убедиться в платежеспособности бизнес-партнера. Вместе с тем состав показателей платежеспособности и методики их расчета, изложенные в нормативных документах Республики Беларусь и Российской Федерации, резко отличаются друг от друга.