В.М. Демиденко
доктор физико-математических наук, профессор
БГЭУ (Минск)

ОПИСАНИЕ БИНАРНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ КРАЙНИХ ЛУЧЕЙ КОНУСА ПОЛУМЕТРИК КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

В пространстве симметричных матриц описано множество всех 0,1-направляющих крайних лучей конуса полуметрик конечных метрических пространств. Описанное множество может использоваться при разработке точных методов решения важной в практическом и теоретическом отношении задачи о мультипотоке во взвешенных сетях.

The set of 0,1-directing extreme rays of the cone of semi-metrics is described in matrix space. This set is used by development of exact methods for a finding of the multicommodity flows in networks. This problem is important in the practical and theoretical relations.

Среди оптимизационных задач дискретной математики важное место в практическом и теоретическом отношении занимает задача о мультипотоках во взвешенных сетях. Эта задача является естественным обобщением широко известной классической задачи о максимальном потоке в сети, которая состоит в нахождении при заданном реберно-взвешенном орграфе $G = (V, E)$ (сети с пропускными способностями $c(x, y) \geq 0$ ребер $(x, y) \in E$) функции $f(x, y)$ (потока в сети) с максимальной величиной потока $\sum_{y\in V}(f(s,y)-f(y,s))=v$, при ограничениях вида

$$\sum_{y\in V}(f(y,t)-f(t,y))=-v, \quad \sum_{y\in V}(f(x,y)-f(y,x))=0\,, \quad 0\leq f(x,y)\leq c(x,y)\,, \tag{1}$$

где s, $t \in V$ — фиксированные вершины (исток и сток), а x — произвольная вершина сети G.

В задаче о мультипотоке во взвешенной сети $G = (V, E)$ с пропускными способностями ребер $c(x, y)$ и выделенным подмножеством ребер $U \subset E$, определяющим истоки и стоки сети, требуется найти семейство потоков $F=\{f_{(s,t)}\,|\,(s,t)\in U\}$, каждый из которых подчинен ограничениям вида (1). Приведенная задача является математической моделью реальных практических задач, связанных с анализом функционирования товаропроводящих сетей с различным ассортиментом поставляемых товаров от производителей к потребителям [1], регулированием транспортных потоков в реальных городских дорожных сетях, созданием коммуникационных сетей с множественными потоками данных.

При рассмотрении задачи о мультипотоке в сети возникают проблемы о допустимости существования семейства потоков F в заданной сети и определения потока максимальной величины для каждой пары вершин $(s, t) \in U$.

Напрямую с решением указанных выше проблем связан так называемый конус полуметрик [2], который определяют расстояния между точками конечных метрических пространств размерности n. Актуальность, теоретическая и практическая значимость исследования этого конуса обусловлена тем, что матрицы с ненулевыми элементами, удовлетворяющие ограничениям (1), образуют конус метрик конечных метрических пространств, который имеет прямое отношение к решению задачи о существовании мультипотока в сети и определению его максимальных составляющих [3], [4]. Кроме этого, нетривиальные неравенства линейной системы, определяющей конус полуметрик, задают фасеты (грани максимальной размерности) многогранника разрезов полного графа и близки к нецелочисленным ограничениям, определяющим многогранник задачи линейных порядков, имеющей различные области практического применения.

Основная задача в исследовании конуса полуметрик состоит в описании множества всех направляющих его крайних лучей. К настоящему времени получено полное описание этого множества [5] в конечных пространствах размерности $n = 4, 5, 6, 7$ и описаны только отдельные его подмножества в общем случае. В данной работе приводится конструктивное описание в явном виде множества всех 0,1-направляющих крайних лучей рассматриваемого конуса, принадлежащих пространству симметрических матриц $R_s^{n\times n}$.

Основные понятия, обозначения и вспомогательные утверждения

Исследованию конуса полуметрик посвящено значительное количество работ [2—9], в которых исследованы его геометрические и структурные свойства с целью описания его крайних лучей, использующихся при разработке точных методов решения задачи о мультипотоках во взвешенных сетях. Ниже приводятся вспомогательные утверждения, позволившие сконструировать алгоритм построения всех 0,1-направляющих крайних лучей конуса полуметрик.

Пусть … и $x = (x_{ij}) \in \mathbf{R}_s^{n\times n}$. Известно [2], что конус K_n конечных полуметрик совпадает с множеством решений смешанной однородной системы линейных неравенств следующего вида:

$$\mathrm{sli}_1 = \{x_{i,i} = 0,\ x_{i,j} - x_{j,i} = 0,\ \ x_{i,j} \ge 0,\ x_{i,k} - x_{i,j} - x_{j,k} \ge 0 \mid i \ne j \ne k \in \mathbf{N}_{1,n}\} \quad . \tag{1}$$

Рассмотрим бинарные матрицы e_{ij}, $i < j \in \mathrm{N}_{1,n}$, каждая из которых имеет единственный ненулевой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, и определим для любой упорядоченной тройки элементов e_{ij}, $i < j < k \in \mathrm{N}_{1,n}$ матрицы

$$= \ + \ - \ , \quad = \ + \ - \ , \quad = \ + \ - \ . \tag{2}$$

Матрицы вида (2) определяют систему линейных неравенств

$$\mathrm{sli}_2 = \{(f_{ijk}, x) \ge 0,\ (g_{ijk}, x) \ge 0,\ (h_{ijk}, x) \ge 0 | i < j < k \in \mathbf{N}_{1,n}\},$$

где $x = (x_{i,j})$ матрица переменных $x_{ij,}$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$, принадлежащая подпространству $R_t^{n\times n}$ строго треугольных матриц.

Введенная система sli_2 и наличие изоморфизма $\varphi : \mathbf{R}_s^{n\times n} \to \mathbf{R}_t^{n\times n}$ между подпространствами симметрических матриц $\mathrm{R}_s^{n\times n}$ с нулевыми диагональными элементами и строго треугольных матриц $\mathrm{R}_t^{n\times n}$ позволяет перейти к описанию множества бинарных направляющих конуса K_n в матричном пространстве $\mathrm{R}_t^{n\times n}$.

При доказательстве основного утверждения, гарантирующего корректность предложенного алгоритма, используются нижеследующие утверждения, первое из которых устанавливает равносильность систем неравенств (1) и (2) с точностью до изоморфизма φ.

Предложение 1. ***Смешанная однородная система неравенств*** (1) *с точностью до изоморфизма* φ *равносильна однородной системе неравенств*

$$\mathrm{sli}_2 = \{(f_{ijk}, x) \ge 0,\ (g_{ijk}, x) \ge 0,\ (h_{ijk}, x) \ge 0 | i < j < k \in \mathbf{N}_{1,n}\} \ .$$

Доказательство. Возможность перехода от системы (1) к системе (3) обусловлена, во-первых, наличием изоморфизма $\varphi : \mathbf{R}_s^{n\times n} \to \mathbf{R}_t^{n\times n}$ между подпространством симметрических матриц $\mathrm{R}_s^{n\times n}$ с нулевыми диагональными элементами и подпространством строго треугольных матриц $\mathrm{R}_t^{n\times n}$.

Далее наличие в системе неравенств (1) подсистемы линейных уравнений $\{x_{i,i}=0,\ x_{i,j}-x_{j,i}=0 \mid i,j\in \mathbf{N}_{1,n}\}$ позволяет исключить из (1) переменные $x_{ij},\ i\ge j\in \mathrm{N}_{1,n}$, т.е. рассматривать только упорядоченные тройки.

Проверка показывает, что неравенство , определяемое неупорядоченной тройкой $i\ne j\ne k\in \mathrm{N}_{1,n}$, равносильно выполнению трех неравенств вида $(f_{ijk},x)\ge 0,\ (g_{ijk},x)\ge 0,\ (h_{ijk},x)\ge 0$, определяемых упорядоченной тройкой $i<j<k\in \mathrm{N}_{1,n}$. Таким образом, для завершения доказательства предложения 1 достаточно показать, что неравенства $x_{i,j}\ge 0$ являются следствиями системы (2) для любых $i<j\in \mathrm{N}_{1,n}$.

Пусть $1\le i<j\le n-1$. Убедимся в справедливости равенств

, (4)

из которых и (3) следует, что неравенство $x_{ij}\ge 0$ для указанных индексов является следствием неравенств $(f_{ijn},x)\ge 0,\ (h_{ijn},x)\ge 0$. Действительно, проверка показывает, что

$$(f_{ijn},x)+(h_{ijn},x)=((e_{ij}+e_{in}-e_{jn})+(e_{ij}+e_{jn}-e_{in}),x)=2(e_{ij},x)=2x_{ij}\ge 0.$$

Далее рассмотрим неравенства $(g_{1jn},x)\ge 0,\ (h_{1jn},x)\ge 0$, где $2\le j\le n-1$. Проверка показывает, что

$$(g_{1jn},x)+(h_{1jn},x)=((e_{in}+e_{jn}-e_{ij})+(e_{ij}+e_{jn}-e_{in}),x)=2(e_{jn},x)=2x_{jn}\ge 0. \tag{5}$$

Следовательно, неравенство $x_{jn}\ge 0$ — следствие неравенств $(g_{1jn},x)\ge 0$ и $(h_{1jn},x)\ge 0$ для всех $2\le j\le n-1$. Наконец, из соотношений

$$(f_{1jn},x)+(g_{1jn},x)=((e_{1j}+e_{1n}-e_{jn})+(e_{1n}+e_{jn}-e_{1n}),x)=2(e_{1n},x)=2x_{1n}\ge 0 \tag{6}$$

следует, что $x_{1n}\ge 0$ — следствие неравенств $(f_{1jn},x)\ge 0,\ (g_{1jn},x)\ge 0$. Таким образом, предложение 1 доказано.

Пространством линейности lin.space K_n конуса K_n называется подпространство максимальной размерности пространства $R_s^{n\times n}$, содержащееся в K_n.

Следствие 1. ***Пространство линейности*** *lin.space K_n конуса полуметрик K_n совпадает с нулевым подпространством пространства $R_t^{n\times n}$, т.е. lin.space $K_n=\{O\}$, где O — нулевая матрица.*

Доказательство. Известно, что пространство линейности lin.space K_n совпадет с множеством решений системы линейных уравнений, получающейся заменой в (3) знака неравенства на знак равенства, откуда в силу предложения 1 и соотношений (4—6) следует, что единственным решением полученной из (3) системы линейных уравнений является нулевая матрица.

Следствие 2. ***Ранг системы неравенств*** (3) *равен* $n(n-1)/2$.

Доказательство. Справедливость следствия 2 непосредственно вытекает из предыдущего утверждения.

Описание алгоритма построения бинарных направляющих

В данном разделе приводится описание рекурсивного алгоритма, который пошагово строит direcK_k — множество бинарных направляющих конуса K_k для всех $k=3,\ \ldots,\ n$. Предлагаемый алгоритм с точностью до изоморфизма φ перечисляет все 0,1-направляющие крайних лучей конуса K_n.

Основой алгоритма являются две процедуры дополнения и дублирования последнего столбца … бинарных $(k-1)\times(k-1)$-матриц $x=(x_{ij})$ из direcK_{k-1}, с помощью которых конструируются $k\times k$-матрицы, принадлежащие множеству direcK_k конуса K_k, где T — знак транспонирования. Результатом применения процедуры дополнения к бинарному столбцу $\cdots$ является столбец $x'_{k-1} = (x'_{1k-1}, x'_{2k-1}, \ldots, x'_{k-1k-1},)^{\mathrm{T}}$, где

$$x'_{ik-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{ik-1} = 0, \\ 0, & \text{если } x_{ik-1} = 1. \end{cases} \tag{7}$$

В дальнейшем x'_{k-1} называется дополнением столбца x_{k-1}. Из (7) следует справедливость равенства $(x'_k)' = x_k$, которое определяет процедуру дублирования столбцов бинарных матриц из direcK_{k-1}.

Описание алгоритма построения direcK_n.

Шаг 1. Построение direcK_2.

Выписываем матрицу $x_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и полагаем direc .

Шаг 2. Построение direcK_3.

Дополняем direcK_2 нулевой 2×2-матрицей $x_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Просматриваем последовательно матрицы из direc $\cup$ и строим на основе каждой $x_i^{(2)}$ две 3×3-матрицы $x_{2i-1}^{(3)}$, $x_{2i}^{(3)}$, $i = 1, 2$, полагая третью строку в каждой 3×3-матрице нулевой и записывая в третий столбец матрицы $x_{2i-1}^{(3)}$ дополнение последнего столбца матрицы $x_i^{(2)}$, а в третий столбец матрицы $x_{2i}^{(3)}$ — последний столбец матрицы $x_i^{(2)}$. В результате получаем direcK_3, дополненное нулевой матрицей, т.е. direc $\cup$, где

$$x_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Удаляя из direc $\cup$ нулевую матрицу $x_4^{(3)}$, получим direcK_3.

Шаг 3. Построение direcK_4.

Дополняем direcK_3 нулевой 3×3-матрицей $x_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и, просматривая последовательно матрицы из direc $\cup$, строим на основе каждой $x_i^{(3)}$ две 4×4-матрицы $x_{2i-1}^{(4)}$, $x_{2i}^{(4)}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Четвертая строка в каждой конструируемой 4×4-матрице полагается нулевой, а в третий столбец матриц $x_{2i-1}^{(4)}$ и $x_{2i}^{(4)}$ записывается, соответственно, дополнение последнего столбца матрицы $x_i^{(3)}$ и последний столбец матрицы $x_i^{(3)}$. В результате получаем множество direcK_4, дополненное нулевой матрицей, т.е.

direc $\cup$,

где

$$x_1^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_2^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_3^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_4^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$x_5^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_6^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_6^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг k ($k = 4, \ldots, n$). Построение direcK_k.

Просматриваем последовательно матрицы из direc $\cup$ и строим на основе каждой x_i^{k-1} по две $k{\times}k$-матрицы $x_{2i-1}^{(k)}$, $x_{2i}^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$. Все элементы последней k-й строки каждой $k{\times}k$-матрицы полагаются равными нулю. В последний столбец матрицы $x_{2i-1}^{(k)}$ записываются соответствующие элементы дополнения последнего столбца матрицы $x_i^{(k-1)}$, а элементы последнего столбца матрицы $x_{2i}^{(k)}$ полагаются равными соответствующим элементам последнего столбца матрицы $x_i^{(k-1)}$. В результате получаем direc $\cup$, где $x_{2^k}^{(k)}$ — нулевая $k{\times}k$-матрица. Удаляя ее из построенного множества матриц, получим direcK_k.

На n-м шаге алгоритм выписывает все 0,1-направляющие крайних лучей конуса полуметрик K_n.

Предложение 2. ***Число матриц, порождающих direcK_n,*** равно $2^{n-1} - 1$.

Доказательство. Справедливость предложения 1 вытекает непосредственно из способа построения множества направляющих direcK_n конуса полуметрик.

3. Обоснование корректности алгоритма.

Корректность алгоритма построения множества направляющих крайних лучей конуса K_n устанавливают следующие два утверждения.

Предложение 3. ***Любая матрица, принадлежащая множеству direcK_n,*** является решением однородной системы линейных неравенств (3).

Доказательство. Рассмотрим любую матрицу $x \in$ direcK_n и убедимся в справедливости неравенств $(f_{ijk}, x) \geq 0$, $(g_{ijk}, x) \geq 0$ и $(h_{ijk}, x) \geq 0$ для произвольной упорядоченной тройки $1 \leq i < j < k \leq n$.

Строгое неравенство $(f_{ijk}, x) < 0$ для любой бинарной матрицы $x = (x_{ij})$ выполняется тогда и только тогда, когда ее элементы удовлетворяют соотношениям $x_{ij} = x_{ik} = 0$ и $x_{jk} = 1$. Следовательно, при выполнении равенств для любой матрицы x из direcK_n при построении k-го столбца, начиная с j-го столбца должно быть проделано либо равное 0 либо четное число замен столбцов на дополнительные столбцы. Так как в противном случае будет иметь место $x_{ik} = 1$, что противоречит первоначальному предположению $x_{ij} = x_{ik} = 0$. Но при указанном числе замен столбцов на дополнительные при построении k-го столбца получим $x_{jk} = 0$, так как $x_{jj} = 0$. Таким образом, для матриц из direcK_n из равенств $x_{ij} = x_{ik} = 0$ следует $x_{jk} = 0$, что влечет $(f_{ijk}, x) = 0$.

Если для матрицы из direcK_n выполняются соотношения $x_{ij} = 0$, $x_{ik} = 1$ либо $x_{ij} = 1$, $x_{ik} = 0$, то, как показывает проверка, независимо от того, какое значение принимает x_{jk}, выполняется неравенство $(f_{ijk}, x) \geq 0$.

Убедимся теперь в справедливости неравенства $(g_{ijk}, x) \geq 0$ для всех матриц x из $\mathrm{direc}K_n$. Предположим, что для некоторой тройки $1 \leq i < j < k \leq n$ существует матрица $x \in \mathrm{direc}K_n$, такая что $x_{ik} = x_{jk} = 0$ и $x_{ij} = 1$. Для таких и только таких бинарных матриц выполняется неравенство $(g_{ijk}, x) < 0$. В силу построения множества $\mathrm{direc}K_n$ и равенства $x_{ij} = 1$ при формировании k-го столбца данной матрицы x должно быть сделано, начиная с j-го столбца, нечетное число замен столбцов на дополнительные, так как в противном случае $x_{ik} = 1$. Однако при указанном числе замен должно выполняться равенство $x_{jk} = 1$, так как $x_{jj} = 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $(g_{ijk}, x) \geq 0$ для любой матрицы $x \in \mathrm{direc}K_n$.

Наконец, если существует матрица $x \in \mathrm{direc}K_n$, такая что $(h_{ijk}, x) < 0$, то должны выполняться равенства $x_{ij} = x_{jk} = 0$ и $x_{ik} = 1$. Во всех других случаях для бинарных матриц справедливо неравенство $(h_{ijk}, x) \geq 0$. Так как $x_{ij} = 0$ и $x_{ik} = 1$, то при построении k-го столбца, начиная с $(j+1)$-го столбца, должно быть выполнено нечетное число замен столбцов на дополнительные столбцы, что влечет справедливость равенства $x_{jk} = 1$, так как $x_{jj} = 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенств $(h_{ijk}, x) \geq 0$ для матриц $x \in \mathrm{direc}K_n$. Таким образом, предложение 3 доказано.

Основной результат, устанавливающий корректность алгоритма построения множества 0,1-направляющих крайних лучей конуса K_n, формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Множество матриц* $\mathrm{direc}\ K_n \subset R_t^{n \times n}$ *совпадает с множеством всех 0,1-направляющих крайних лучей конуса полуметрик* K_n.

Доказательство. Приведем краткое доказательство теоремы 1. Для произвольной бинарной матрицы и любой тройки чисел возможен один из нижеследующих восьми случаев:

1)	2)
3)	4)
5)	6)
7)	8)

Нетрудно убедиться в том, что для бинарных матриц , являющихся решениями системы неравенств (3), из приведенных случаев возможными являются только 1), 2), 3), 5) и 8), так как в случаях 4), 6) и 7) произвольная бинарная матрица x не является решением системы (3). Действительно, непосредственная проверка показывает, что в случаях 4), 6) и 7), соответственно, выполняются следующие равенства: $(g_{ijk}, x) = -1$, $(h_{ijk}, x) = -1$,$(f_{ijk}, x) = -1$.

Далее показывается, что произвольная бинарная матрица, не принадлежащая множеству $\mathrm{direc}K_n$, в каждом из случаев 1), 2), 3), 5) и 8) не может быть бинарной направляющей крайнего луча конуса K_n.

Наконец, доказывается справедливость того, что матрицы из $\mathrm{direc}K_n$ образуют множество направляющих крайних лучей конуса K_n. Известно [10], что множество направляющих крайних лучей любого конуса совпадает с множеством фундаментальных решений соответствующей однородной системы линейных неравенств. В свою очередь фундаментальные решения обращают в равенства соответствующие им экстремальные подсистемы, ранг которых на единицу меньше ранга всей системы, определяющей конус.

Доказательство того, что множество матриц $\mathrm{direc}K_n$ совпадает с множеством фундаментальных решений системы (3) проводится посредством выделения в ней для каждой матрицы $x \in \mathrm{direc}K_n$ экстремальных подсистем sli Ì sli , т.е. таких подсистем, каждое неравенство которых обращается матрицей x в равенство. Далее устанавливается справедливость равенства rang (sli , что завершает доказательство теоремы 1.

Для конуса полуметрик конечных метрических пространств построено множество всех бинарных направляющих его крайних лучей. Данное множество может использоваться при разработке точных методов решения задачи о мультипотоке во взвешенных сетях, а также — для построения отдельных подмножеств крайних лучей данного конуса более общего вида.

Литература

1. Задачи маршрутизации транспортных средств и их применение в логистических цепях поставок товаропроводящих сетей / В.М. Демиденко [и др.] // Экономика, моделирование, прогнозирование: сб. науч. тр. / под ред. М.К. Кравцова [и др.]. — Минск: НИЭИ М-ва экономики Респ. Беларусь, 2012. — Вып. 6. — С. 94—106.

2. *Avis, D.* On the extreme rays of the metric cone / D. Avis // Can. J. Math. — 1980. — Vol. 32. — P. 126—144.

3. *Iri, M.* On an extension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multicommodity flows / M. Iri // J. Oper. Soc. Japan. — 1971. — Vol. 13. — P. 129—135.

4. *Lomonosov, M.V.* On a system of flows in a network / M.V. Lomonosov // Prob. Pered. Inform. — 1978. — Vol. 14. — P. 60—73.

5. *Grishukhin, V.P.* Lifting of facets of polyhedra / V.P. Grishukhin // Optimization. — 1986. — Vol. 17. — P. 487—499.

6. *Deza, A.* The isometries of the cut, metric and hypermetric cones / A. Deza, B. Goldengorin, D.V. Pasechnik // J. Algebraic Combinatorics. — 2006. — Vol. 23. — P. 197—203.

7. *Deza, M.* Cones of partial metrics / M. Deza, E. Deza // Contributions in Disc. Math. — 2010. — Vol. 6, № 1. — P. 26—47.

8. *Avis, D.* On the directed cut cone and polytope / D. Avis, C. Meagher // Manuscript Draft. — 2011. — № MAPR-D-11-00057. — P 14.

9. *Deza, M.* The hypermetric cone is polyhedral / M. Deza, V.P. Grishukhin, M. Laurent // Combinatorica. — 1993. — Vol. 13, № 4. — P. 397—411.

10. *Черников, С.Н.* Линейные неравенства / С.Н. Черников; под ред. В.С. Чарина, В.В. Донченко. — М.: Наука, 1968. — 488 с.

Статья поступила в редакцию 26.12.2012 г.

Е.В. Демченко
кандидат экономических наук, доцент
А.А. Носова
БГЭУ (Минск)

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ

В статье рассматриваются современные подходы к определению дефиниции «образовательная услуга», предлагается авторское определение, особый акцент сделан на обособление категорий «образовательная услуга» и «образование». Базируясь на учете специфики образовательных