

Докажем, что рассматриваемая цепь квазиобратима. Для этого разобьем интенсивности переходов следующим образом:

$$q^A(0, 1) = c, \quad (4)$$

$$q^I(n, n+1) = a, \text{ при } n > 0, \quad (5)$$

$$q^D(n, 0) = b, \text{ при } n > 0, \quad (6)$$

$$q^{AD}(n, n) = c, \text{ при } n > 0. \quad (7)$$

Описанная таким образом цепь представляет собой модель блуждающих заявок, пытающихся захватить узел. Они могут захватить пустой узел, но должны двигаться дальше, если он уже занят. В пределах узла состояние цепи Маркова увеличивается за счет внутренних изменений, происходящих с интенсивностью a (возможно моделирование рождения других заявок), до тех пор, пока не произойдет катастрофа (интенсивность b). Согласно формулам (1) и (2) найдем интенсивности $\alpha(n)$ и $\beta(n)$. Произведя необходимые подстановки ((4) и (5) в (1); (3), (5) и (7) в (2)), получим, что $\alpha(n) = c$ ($n \geq 0$) и $\beta(n) = c$ ($n \geq 0$). Таким образом, квазиобратимость цепи установлена.

Рассмотрим сеть, склеенную из узлов, описываемых данной цепью Маркова. Согласно теореме Келли [1], стационарное распределение такой сети представляется в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы.

Литература

1. Kelly F.P. Networks of Quasireversible Nodes // Adv. Appl. Probab. – Comp. Sci.: Proc. of the ORSA-TIMS BRS. Boston. 1981.
2. Chao X., Miyazawa M.A. Probabilistic Decomposition Approach to Quasi-Reversibility and its Application in Coupling of Queues // Preprint: New Jersey Inst. of Technology, Science University of Tokyo. 1996. P.1.

Павлов П.А.

Филиал УО «БГЭУ» (Пинск)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СИСТЕМ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

Основные понятия и определения, используемые в данной статье, взяты из [Коваленко Н.С., Самаль С.А. Вычислительные методы реализации интеллектуальных моделей сложных систем. Мн.: Беларуская навука, 2004. 166 с.]

В настоящее время возрастающую роль приобретают многопроцессорные системы на базе распределенной обработки. В связи с этим особую актуальность приобретают задачи построения и исследования математических моделей

эффективной организации конкурирующих процессов при распределенной обработке.

Определение 1. Систему конкурирующих процессов будем называть *одинаково распределенной*, если времена выполнения всех блоков Q_j , $j = \overline{1, s}$, программного ресурса каждым из i -х процессов, $i = \overline{1, n}$, равны между собой, т. е.

$$t_{11} = t_{12} = \dots = t_{1s} = t'_1, \quad t_{21} = t_{22} = \dots = t_{2s} = t'_2, \quad \dots, \quad t_{n1} = t_{n2} = \dots = t_{ns} = t'_n,$$

где $(t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ — времена выполнения каждого блока Q_j , $j = \overline{1, s}$, всеми n процессами. Суммарное время выполнения каждого из блоков Q_j n процессами обозначим через

$$T^n = \sum_{i=1}^n t'_i.$$

Определение 2. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов назовем *стационарной*, если $t'_1 = t'_2 = \dots = t'_n = t$.

Для систем одинаково распределенных конкурирующих процессов для вычисления минимального общего времени с учетом накладных расходов $\varepsilon > 0$ всех трех базовых режимов имеет место следующая формула:

$$T(p, n, s, \varepsilon) = T_\varepsilon^n + (s-1)t_{\max}^\varepsilon, \quad \text{где } T_\varepsilon^n = \sum_{i=1}^n t_i^\varepsilon, \quad t_{\max}^\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq n} t_i^\varepsilon, \quad t_i^\varepsilon = t'_i + \varepsilon, \quad (1)$$

а в случае *стационарной одинаково распределенной системы* минимальное общее время определяется по формулам:

$$\bar{T}_\varepsilon = \begin{cases} (n+s-1)t_\varepsilon, & p \geq \min\{n, s\}; \\ (kn+p-1)t_\varepsilon, & p < \min\{n, s\}, \quad s = kp, \quad k > 1; \\ ((k+1)n+r-1)t_\varepsilon, & p < \min\{n, s\}, \quad s = kp+r, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq r < p. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $t_\varepsilon = T^n / n + \varepsilon$, $T^n = nt$.

Определение 3. Одинаково распределенную систему конкурирующих процессов будем называть *эффективной* при фиксированных p , $s \geq 2$, если величина $\Delta_\varepsilon(n) = sT^n - T(p, n, s, \varepsilon) \geq 0$, где sT^n — время выполнения s блоков всеми n процессами в последовательном режиме.

Теорема 1. Для любой эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при $\varepsilon > 0$ и $s \leq p$ существует стационарная более эффективная одинаково распределенная система.

Доказательство. Согласно определения 3, условие эффективности одинаково распределенной системы конкурирующих процессов имеет вид

$$\Delta_\varepsilon(n) = (s-1)(T^n - t_{\max}^n) - (n+s-1)\varepsilon \geq 0, \quad (3)$$

или в случае стационарной одинаково распределенной системы:

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(n) = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \geq 0, \text{ где } t = T^n / n. \quad (4)$$

Покажем, что $\bar{\Delta}_\varepsilon(n) > \Delta_\varepsilon(n)$. Для этого рассмотрим разность $\bar{\Delta}_\varepsilon(n) - \Delta_\varepsilon(n) = (s-1)(t_{\max}^n - t)$. Случай, когда $\bar{\Delta}_\varepsilon(n) - \Delta_\varepsilon(n) \leq 0$, будет иметь место только, если $t_{\max}^n \leq t$. Последнее невозможно, так как из того, что одинаково распределенная система не является стационарной, следовало бы $\sum_{i=1}^n t_i' < nt = T^n$, а по условию $\sum_{i=1}^n t_i' = T^n$. Получили противоречие $T^n < T^n$, что и доказывает теорему.

Теорема 2. Одинаково распределенная система $n \geq 3$ конкурирующих процессов в многопроцессорной системе с $p \geq 3$ процессорами будет эффективной при $n = s \neq 3$, $s \leq p$ и $\varepsilon \leq \min_{1 \leq i \leq n} t_i'$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $sn \geq 2(n+s-1)$.

Доказательство. Теорема основывается на анализе следующих неравенств. Согласно формуле (3) условие эффективности равносильно неравенству:

$$\frac{T^n - t_{\max}^n}{\varepsilon} \geq \frac{n+s-1}{s-1}.$$

В силу условия теоремы $\varepsilon \leq \min_{1 \leq i \leq n} t_i'$ имеет место неравенство

$$\frac{T^n - t_{\max}^n}{\varepsilon} \geq n-1.$$

Кроме того, условие теоремы $sn \geq 2(n+s-1)$ равносильно следующему неравенству:

$$n-1 \geq \frac{n+s-1}{s-1}.$$

Сформулируем необходимые и достаточные условия (критерии) существования эффективной системы одинаково распределенных конкурирующих процессов в зависимости от величины накладных расходов $\varepsilon > 0$.

Теорема 3. Для существования эффективной одинаково распределенной системы конкурирующих процессов при заданных $p \geq 3$, T^n , $\varepsilon > 0$ в случае $s \leq p$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\varepsilon \leq \begin{cases} \varphi(1 + \sqrt{s}), & \text{если } \sqrt{s} - \text{целое;} \\ \max\{\varphi(1 + [\sqrt{s}]), f(2 + [\sqrt{s}])\}, & \text{если } \sqrt{s} - \text{нецелое.} \end{cases}$$

Здесь $\varphi(x) = \frac{(s-1)T^n(x-1)}{x(x+s-1)}$, $[x]$ – наибольшее целое, не превосходящее x .

Доказательство. Необходимость следует из определения 3 и теоремы 1. Действительно, в силу формулы (4) условие эффективности имеет вид:

$$\bar{\Delta}_\varepsilon(n) = sT^n - \bar{T}_\varepsilon = (s-1)(T^n - t) - (n+s-1)\varepsilon \geq 0,$$

что равносильно следующему неравенству:

$$\varepsilon \leq \frac{(s-1)T^n(n-1)}{n(n+s-1)}. \quad (5)$$

Введя функцию $\varphi(x) = (s-1)T^n(x-1)/x(x+s-1)$, $x > 0$, легко показать, что она достигает максимума при $x = 1 + \sqrt{s}$.

Выбрав $n = x = 1 + \sqrt{s}$, если $\sqrt{s}$ – целое, или $n = x \in \{1 + [\sqrt{s}], 2 + [\sqrt{s}]\}$, если $\sqrt{s}$ – нецелое, получим эффективную систему одинаково распределенных процессов, что и доказывает необходимость.

Достаточность следует из (7), поскольку $\varphi(x)$ достигает наибольшего значения при $n = x = 1 + \sqrt{s}$, если $\sqrt{s}$ – целое, или при $n = x \in \{1 + [\sqrt{s}], 2 + [\sqrt{s}]\}$, если $\sqrt{s}$ – нецелое.

Панфилова Е.П.

Филиал УО «БГЭУ» (Бобруйск)

О ПРОБЛЕМЕ УЧЕТА СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ВО ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ ПРИ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ИНФЛЯЦИИ В РЕСПУБЛИКЕ БЕЛАРУСЬ

При построении эконометрических моделей инфляции основное внимание уделяется проблемам идентификации моделей, отбору экзогенных показателей, но почти не обращается внимания на формальный анализ структуры исходных статистических временных рядов.

Нередко предполагается, что структуру ряда можно описать моделью, содержащей небольшое число параметров по сравнению с количеством наблюдений, которую можно использовать для прогнозирования. Примером таких моделей служит построенная ранее в системе STATISTICA с использованием модуля «Прогнозирование временных рядов» (Time Series & Forecasting) модель ARIMA (p, k, q) для ряда помесечных данных индекса потребительских цен в Республике Беларусь с января 1995 по август 2003 года.

В тоже время макроэкономические временные ряды могут содержать структурные изменения, вызванные различными причинами. В современной