О СВЯЗИ ПРОСТОТОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С СИСТЕМОЙ С УДВОЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Мусафиров Э.В., к.ф.-м.н.
УО «Пинский филиал БГЭУ»

Многие процессы реального мира, в том числе и в экономике, моделируются с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Большинство из этих дифференциальных систем невозможно проинтегрировать в квадратурах. В таких случаях можно проводить качественное исследование свойств решений систем дифференциальных уравнений по виду самих дифференциальных систем. В частности это иногда удается сделать с помощью отражающей функции (ОФ), введенной профессором В.И. Мироненко.

ОФ, являясь выражением симметрии решений дифференциальных систем, позволяет улавливать эти симметрии. Что дает возможность решать такие задачи качественной теории дифференциальных уравнений, как вопросы существования и устойчивости периодических решений, существования решений краевых задач, вопросы глобального поведения семейств решений дифференциальных систем.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathrm{R}, x \in \mathrm{R}^n \tag{1}$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью и решениями $\varphi(t;t_0,x_0)$. Для каждой такой системы определяется ОФ $F(t,x) := \varphi(-t;t,x)$, определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t=0$. Если система (1) 2ω-периодична по t и F – ее ОФ, то $F(-\omega,x) := \varphi(\omega;-\omega,x)$ – отображение за период $[-\omega,\omega]$ (отображение Пуанкаре) этой системы. Функция $F(t,x)$ есть ОФ системы (1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой основным соотношением (ОС), $F_t + F_x X(t,x) + X(-t,F) = 0$, с начальным условием $F(0,x) \equiv x$.

ОФ линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

где $P(t)$ – непрерывная $n \times n$-матрица, также линейна, т.е. ОФ этой системы представима в виде $F(t,x) \equiv F(t)x$. Матрица $F(t)$ в этом случае называется отражающей матрицей (ОМ) системы (2).

Множество всех систем вида (1) разбивается на классы эквивалентности таким образом, что каждый класс характеризуется некоторой ОФ, называемой ОФ класса. При изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у данной дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения отражающих функций).

Это легко сделать, когда отражающая функция данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда отражающая функция неизвестна. Например, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет система $\dot{x} = -\frac{1}{2}F_x^{-1}F_t$, где $F(t,x)$ – ОФ этой системы, которая называется простой.

Для системы (2) справедливо следующее:

Теорема 1. Система (2) проста тогда и только тогда, когда матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны и существует дифференцируемая матрица подобия $S(t)$, для которой $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$, $S(0) = E$ и $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$.

Следствие 1. Если система (2) проста и $F(t)$ – ее ОМ, то $F(-t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = 2P(t)x$.

Доказательство. Пусть система (2) проста, тогда из теоремы 1 следует, что $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Умножим это тождество на (-1) и заменим t на $(-t)$, получим $-\dot{F}(-t) \equiv 2P(t)F(-t)$. Таким образом, матрица $F(-t)$ – матрица, составленная из столбцов-решений системы $\dot{x} = 2P(t)x$. А так как $F(0) = E$, то матрица $F(-t)$ является фундаментальной для системы $\dot{x} = 2P(t)x$. Следствие доказано.

Пример 1. Рассмотрим систему (2),

где $P(t) \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & (\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)e^{-\cos t} \\ -(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)e^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}$.

Для этой системы рассмотрим матрицу $S(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -e^{-\cos t}\sin t \\ e^{\cos t}\sin t & 1 + \sin t \end{pmatrix}$.

Проверкой убедимся, что $S(0) = E$, $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$ и $\dot{S}(t) \equiv -2P(-t)S(t)$. Тогда по теореме 1 рассматриваемая система является простой. Заметим также, что $S(t)$ – ОМ рассматриваемой системы. Тогда по следствию 1 $x = c_1(1 + \sin t) + c_2 e^{-\cos t}\sin t$, $y = -c_1 e^{\cos t}\sin t + c_2(1 - \sin t)$ – общее решение системы $\begin{cases} \dot{x} = (\cos t + \sin^3 t)x + e^{-\cos t}(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t)y, \\ \dot{y} = -e^{\cos t}(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t)x - (\cos t + \sin^3 t)y. \end{cases}$