А.И. Астровский
доктор физико-математических наук, доцент
БГЭУ (Минск)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НАБЛЮДЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКИМ ФОРМАМ ФРОБЕНИУСА

Разработан и обоснован метод исследования наблюдаемости линейных нестационарных систем со скалярным выходом, основанный на квазидифференцируемости выходных переменных, который позволил получить достаточные условия полной, а также необходимые и достаточные условия дифференциальной и равномерной наблюдаемости. Доказаны необходимые и достаточные условия существования канонических форм Фробениуса для равномерно наблюдаемых систем с квазидифференцируемыми коэффициентами и предложен метод их построения.

The method is proposed for investigating observability in linear time-varying systems, which is based on quasidifferentiation of output variables and allows to obtain sufficient conditions for complete observability, necessary and sufficient conditions for differential and uniform observability. The necessary and sufficient conditions for existence of Frobenius canonical forms in uniformly observed systems with quasidifferentiated coefficients is proved and method for their construction is developed.

В данной работе исследуются свойства наблюдаемости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t) \quad (t \in T). \tag{1}$$

Наблюдаемость наряду с устойчивостью, управляемостью, стабилизируемостью является фундаментальным структурным свойством динамических систем. При изучении многих проблем из теории управляемых движений необходимо знать текущие состояния системы. Это важно, например, когда управляющие воздействия формируются по принципу обратной связи. Однако координаты объектов часто недоступны непосредственному наблюдению (измерению), но вместе с тем имеется информация о состоянии объектов в виде некоторой выходной функции. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении вопроса о возможности однозначного восстановления текущих (или начальных) состояний системы по данным наблюдений. Актуальность задач наблюдения заметно усилилась в последнее время в связи, например, с задачами космической навигации, при проектировании космических навигационных систем и др.

Один из мощных методов исследования структурных свойств динамических систем основан на классической идее А.М. Ляпунова о преобразовании системы к простейшей форме, что в ряде случаев позволяет полностью изучить фундаментальные свойства сложных систем. Успешно этот подход применяется при изучении устойчивости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для систем управления-наблюдения реализация идей А.М. Ляпунова заключается в приведении исходной системы к простейшему (каноническому) виду с помощью подходящей группы линейных преобразований. В качестве канонических систем обычно рассматриваются системы с матрицами в форме Фробениуса, которые в случае одномерной выходной функции эквивалентны линейному скалярному квазидифференциальному уравнению n-го порядка с коэффициентами, зависящими от времени. Выбор таких систем в качестве канонических объясняется тем, что для них основные задачи математической теории систем решаются сравнительно просто. В [1] дано применение канонических форм

Фробениуса к классическим проблемам синтеза нерезонансных систем, управления спектром, стабилизации, асимптотического оценивания состояний и др. Теория канонических форм оказалась эффективной и для стабилизации нелинейных уравнений по линейному приближению. Однако вопрос о преобразовании заданной линейной нестационарной системы наблюдения к канонической форме к настоящему времени полного решения не имеет. Первые работы (L.M. Silverman, H.E. Meadows, W.A. Wolovich, M.Y. Wu) в этом направлении гарантировали приведение системы к канонической форме в предположении равномерной наблюдаемости (управляемости) и дифференцируемости коэффициентов достаточно большое число раз. К настоящему времени теория канонических форм Фробениуса для линейных нестационарных систем управления и наблюдения достаточно полно разработана в так называемом гладком случае [1].

Квазидифференцируемость в теории дифференциальных уравнений. Часто при исследовании линейных нестационарных систем наблюдения (а также систем управления) оказывается, что их коэффициенты не удовлетворяют известным требованиям гладкости, что не позволяет использовать результаты, основанные на классической матрице наблюдаемости [2]. Наши исследования [6, 7] показали, что в таком случае эффективным средством анализа является техника квазидифференцирования, суть которой заключается в следующем.

Пусть $T=[t_0, t_1]$ — отрезок на действительной прямой R, ϑ — целое неотрицательное число. Обозначим через $U_\vartheta(t)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $((\vartheta+1)\times(\vartheta+1))$с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$ $(i, k = 0, 1, \dots, \vartheta)$, удовлетворяющими условию $p_{kk}(t)\neq 0$ $(t\in T)$ $(k=0, 1, \dots, \vartheta)$. Выберем какую-либо матрицу $P(t)$ из множества $U_\vartheta(t)$. Квазипроизводные ${}^0_P w(t)$, ${}^1_P w(t)$, …, ${}^\vartheta_P w(t)$ порядка $0, 1, \dots, \vartheta$ относительно матрицы $P(t)$ для непрерывной функции $w: T\to R$ определяются по следующим рекуррентным правилам [3]:

$$
{}^0_P w(t) = p_{00}(t)w(t),\ {}^1_P w(t) = p_{11}(t)\frac{d({}^0_P w(t))}{dt} + p_{10}(t)({}^0_P w(t)), \dots,
$$

$$
{}^k_P w(t) = p_{kk}(t)\frac{d({}^{k-1}_{\ \ P} w(t))}{dt} + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)({}^i_P w(t)) \ \ (k = 2, 3, \dots, \vartheta). \tag{2}
$$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (2) выполнимы и приводят к непрерывным функциям. Семейство всех непрерывных функций, обладающих непрерывными квазипроизводными относительно заданной матрицы $P\in U_\vartheta(t)$, обозначим через $C_P^\vartheta(T)$.

Постановка задачи. Равномерная наблюдаемость. Пусть на отрезке $T=[t_0, t_1]$ задана линейная нестационарная система наблюдения

$$
\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t),\ \ y(t) = c(t)x(t)\ \ (t\in T), \tag{3}
$$

в которой $(n\times n)$-матрица $A(t)$ и n-вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T. Отождествим каждую такую систему (3) с парой (A, c), а множество всех их обозначим через Σ_n. В классической постановке [2] задача полной наблюдаемости формулируется как проблема наличия взаимооднозначного соответствия между выходными функциями $y(t)=y(t, x_0)$ и порождающими их начальными условиями $x_0\in R^n$. При конструировании систем регулирования, как правило, регулятор строится в виде функции текущего состояния $x(t)$. Поэтому знание вектора $x(t)$ является необходимой предпосылкой создания эффективных систем регулирования. Хорошо известно, что если матрица наблюдаемости $S(t)$ [2] системы (3) невырождена в некоторой точке $\sigma\in T$ (и стало быть, система (3) полностью наблюдаема на T), то по значению выходного сигнала и его производных в момент σ алгебраическим путем можно найти вектор $x(\sigma)$. Однако определение $x(t)$ в точках t, отличных от σ, приводит к непростой задаче интегрирования нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ясно, что проблемы интегрирования можно избежать, если потребовать невырожденность матрицы $S(t)$ при всех $t \in T$. Указанное требование ранее [4, 5] было использовано как чисто техническое средство, позволяющее строить канонические формы систем наблюдения, и положено в основу определения равномерной наблюдаемости. Ниже приводится определение равномерной наблюдаемости в терминах выходной функции [1].

Определение 1. Система (3) называется равномерно наблюдаемой на T, если при любом $x_0 \in R^n$ функция $y(t) = y(t, x_0)$ принадлежит пространству $C^{n-1}(T, R)$ и отображение $x(t) \to (y(t), y^{(1)}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ инъективно для каждого $t \in T$.

Для исследования свойства равномерной наблюдаемости системы (3) введем оператор $L : \Sigma_n \to \Sigma_n$, действующий по правилу

$$L(A, c) = (A, cA + \frac{dc}{dt}).$$

По индукции можно найти любую степень L^k оператора L, область определения которого обозначим через D_k. Каждую систему $(A, c) \in D_k$ назовем системой класса k. Пусть система (A, c) имеет класс $(n-1)$. Тогда для $t \in T$ определены n-вектор-функции строки

$$s_i(t) = s_{i-1}(t)A(t) + \frac{ds_{i-1}(t)}{dt}, \; s_0(t) = c(t) \; (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4}$$

из которых составим $(n{\times}n)$-матрицу $S(t)$.

Справедлив следующий критерий равномерной наблюдаемости [1].

Теорема 1. Пара $(A, c) \in \Sigma_n$ равномерно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда она имеет класс $n-1$ и $\operatorname{rank} S(t) = n$ $(\forall t \in T)$.

Установим связь равномерной наблюдаемости с вопросом существования разрешающих операций в классе обобщенных функций или (по другой терминологии) распределений. Пусть δ_σ — дельта-функция (распределение) Дирака, сосредоточенная в точке $\sigma \in T$. Рассмотрим систему класса $n-1$. На выходах $y = y(t)$ такой системы определены обобщенные функции $\delta_\sigma = \delta_\sigma^{(0)}, \delta_\sigma^{(1)}, \ldots, \delta_\sigma^{(n-1)}$, ($\delta_\sigma^{(i)}$ — i-я производная распределения δ_σ), при этом для каждого индекса выполняется равенство $\delta_\sigma^{(i)}(y) = s_i(\sigma)x(\sigma)$. Поэтому справедливо соотношение $S_i(\sigma)x(\sigma) = \theta_\sigma(y)$ где $\theta_\sigma(y)$ — n-вектор-столбец с элементами $\delta_\sigma(y)$, $\delta_\sigma^{(1)}(y)$, $\delta_\sigma^{(n-1)}(y)$, Значит в случае равномерной наблюдаемости однозначно восстанавливается состояние $x(\sigma) = S^{-1}(\sigma)\theta_\sigma(y)$. Однако указанная формула имеет чисто теоретическое значение, поскольку распределения $\delta_\sigma^{(i)}$ не могут быть точно реализованы. Пусть задана некоторая δ-последовательность $\{\delta_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$. Для каждой выходной функции $y(t)$ системы (A, c) определим величины

$$\gamma_j^{(i)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\sigma - \tau)\delta_j^{(i)}(\tau)d\tau \;\; (\mathrm{i} = 0, 1, \ldots, n-1;\; j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

из которых составим n-вектор-столбец $z_j(\sigma) = (\gamma_j(\sigma), \gamma_j^{(1)}(\sigma), \ldots, \gamma_j^{(n-1)}(\sigma))$.

Определение 2. Систему (A, c) назовем аппроксимативно наблюдаемой в классе δ-последовательностей, если при любом $x_0 \in R^n$ выходная функция $y(t)$ принадлежит пространству $C^{n-1}(T, R)$ и существует такая непрерывная, не зависящая от x_0, обратимая при каждом $\sigma \in T$ $(n\times n)$-матрица $M(\sigma)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $m_0 = m(x_0, \sigma, \delta)$, обладающий свойством $Px(\sigma, x_0) - M(\sigma)z_j(\sigma)\, P < \varepsilon$ при $j \geq m_0$, где $P\cdot P$ некоторая норма в R^n.

Теорема 2. Система $(A, c) \in \Sigma_n$ аппроксимативно наблюдаема в классе δ-последовательностей тогда и только тогда, когда она равномерно наблюдаема.

Системы класса (P, q). Свойство равномерной наблюдаемости в смысле определения 1 требует определенную гладкость коэффициентов, что сужает класс рассматриваемых систем. С целью ослабления этого требования в данной работе используется техника квазидифференцирования [3]. Это позволяет построить матрицу наблюдаемости для более широкого класса систем и получить конструктивные условия различных типов наблюдаемости.

Определим линейный функционал $\Delta_\sigma = {}_P^0\Delta_\sigma$ на $C_P^\vartheta(T)$ равенством $\Delta_\sigma(w) = p_{00}(\sigma)w(\sigma)$, а его квазипроизводные ${}_P^j\Delta_\sigma$ зададим соотношениями ${}_P^j\Delta_\sigma(w) = (-1)^j({}_P^jw(\sigma))$. Легко заметить, что отображение Δ_σ является аналогом дельта-функции Дирака δ_σ, сосредоточенной в точке σ, в которую оно и превращается, когда матрица $P(t)$ единична.

Пусть $P(t)$ — заданная матрица из множества $U_\vartheta(t)$. Будем говорить, что система наблюдения (3) имеет P-класс q $0 \leq q \leq \vartheta$, и при этом писать $(A, c) \in \{P, q\}$, если каждая выходная функция этой системы принадлежат множеству $C_P^q(T)$, т.е. имеют непрерывные квазипроизводные до порядка включительно.

Лемма 1. Система (3) имеет P-класс q тогда и только тогда, когда существуют и непрерывны строки $s_k(t)$, определяемые формулами

$$s_0(t) = p_{00}(t)c(t),\ s_1(t) = p_{11}(t)(s_0(t)A(t) + \frac{ds_0(t)}{dt}) + p_{10}(t)s_0(t), \ldots,$$

$$s_k(t) = p_{kk}(t)(s_{k-1}(t)A(t) + \frac{ds_{k-1}(t)}{dt}) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(t)s_j(t)\ (k = 2, 3, \ldots, q). \tag{1.6}$$

Составим из строк $s_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots, q)$ матрицу

$$S^{(q)}(t) = \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ \ldots \\ s_q(t) \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что для любого решения $x(t)$ системы (3) и соответствующего ему выхода $y(t)$ выполняется равенство

$$Y(t) = S^{(q)}(t)x(t),$$

где $Y(t)$ — столбец, образованный элементами ${}_P^0y(t),\ {}_P^1y(t),\ \ldots,\ {}_P^qy(t)$.

Пусть система (3) имеет P-класс q. Скажем, что она наблюдаема в множестве функционалов (разрешающих операций) ${}_P^0\Delta_\sigma,\ {}_P^1\Delta_\sigma,\ \ldots,\ {}_P^q\Delta_\sigma$, если по элементам ${}_P^k\Delta_\sigma(y)$ $(k = 0, 1, \ldots, q)$ однозначно находится вектор $x(\sigma)$. Когда наблюдаемость имеет место при произвольном $\sigma \in T$, то систему (3) назовем равномерно наблюдаемой. Поэтому система (3) P-класса q вполне наблюдаема на T, если для некоторого $\sigma \in T$ верно условие rank $S^{(q)}(\sigma) = n$ и дифференциально наблюдаема на T, когда rank $S^{(q)}(t) = n$ для почти всех $t \in T$. Очевидно, критерием равномерной наблюдаемости системы (3) P-класса q служит равенство rank $S^{(q)}(t) = n$ при каждом $t \in T$.

Обозначим через $P_n(A, c)$ семейство всех матриц $P(t)$ из множества $U_n(t)$, относительно которых все выходные функции системы (3) $(n - 1)$ раз непрерывно квазидифференцируемы. Для любой матрицы $P \in P_n(A, c)$ определим матрицу наблюдаемости $S_p(t)$ по формулам (7) при $q = n - 1$.

Лемма 2. При каждом $t \in T$ все матрицы $S_p(t)$ ($P \in P_n(A, c)$) одновременно либо вырождены, либо невырождены.

Из леммы 2 следует, что условия наблюдаемости системы (3) не зависят от выбора матрицы $P \in P_n(A, c)$.

Системы в форме Хессенберга. При использовании техники квазидифференцирования возникает нетривиальная проблема нахождения хотя бы одного элемента $P(t)$ множества $U_9(t)$, относительно которого выходные функции системы наблюдения q раз квазидифференцируемы. Ниже указан один класс систем наблюдения со скалярным выходом, для которых эта проблема легко решается.

Говорят, что линейная система

$$\frac{dx(t)}{dt} = H(t)x(t),\ y(t) = g(t)x(t)$$

имеет верхнюю форму Хессенберга, если непрерывные на отрезке T ($n\times n$)-матрица $H(t)$ и n-вектор-строка $g(t)$ задаются следующим образом:

$$H(t) = \begin{pmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) & \dots & r_{1,n-1}(t) & r_{1n}(t) \\ r_{21}(t) & r_{21}(t) & r_{23}(t) & \dots & r_{2,n-1}(t) & r_{2n}(t) \\ 0 & r_{32}(t) & r_{33}(t) & \dots & r_{3,n-1}(t) & r_{3n}(t) \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n-1,n-1}(t) & r_{n-1,n}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{n,n-1}(t) & r_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$g(t) = (0, 0, \dots, 0, r_{10}(t)).$$

Пусть

$$r_{k,k-1}(t) \neq 0\ (t \in T),\ (k = 1, 2, \dots, n). \tag{8}$$

Определим $(n + 1)\times(n + 1)$-матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} r_{10}^{-1}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r_{nn}(t)r_{n,n-1}^{-1}(t) & r_{n,n-1}^{-1}(t) & \dots & 0 & 0 \\ -r_{n-1,n}(t)r_{n-1,n-2}^{-1}(t) & -r_{n-1,n-1}(t)r_{n-1,n-2}^{-1}(t) & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ -r_{2n}(t)r_{21}^{-1}(t) & -r_{2,n-1}(t)r_{21}^{-1}(t) & \dots & r_{21}^{-1}(t) & 0 \\ r_{1n}^{-1}(t) & r_{1,n-1}^{-1}(t) & \dots & -r_{11}^{-1}(t) & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

которая, очевидно, принадлежит множеству $U_n(t)$.

Лемма 3. Если выполняются условия (8), то пара (H, g) в верхней форме Хессенберга (7) имеет Q-класс n, и каждая ее выходная функция $y(t)$ удовлетворяет квазидифференциальному уравнению ${}_Q^n y(t) = 0$.

Таким образом, в случае системы наблюдения с матрицами (7), обладающей свойством (9), без труда находится матрица $Q \in U_n(t)$, относительно которой все выходные функции n раз квазидифференцируемы.

Условия существования верхней формы Хессенберга для пары (A, c). Пусть ς_n — совокупность всех невырожденных при каждом $t \in T$ ($n\times n$)-матриц $G(t)$ принадлежащих классу $C^1(T, R^{n\times n})$. Действие группы ς_n на паре (A, c) из Σ_n зададим правилом $G(A, c) =$

$= (G^{-1}AG - G^{-1}\dfrac{dG}{dt}, cG)$, $G \in \varsigma_n$, которое в терминах пространства состояний системы (3) означает замену переменных $x(t)$ по формуле $x(t) = G(t)z(t)$. Символом $O(A, c)$ обозначим орбиту системы $(A, c) \in \Sigma_n$ относительно группы ς_n.

Легко проверить, что если система (A, c) имеет P-класс q, то такой же P-класс имеет и любая система орбиты (поскольку множество всех выходов пары (A, c) инвариантно относительно действия группы ς_n). Поэтому, когда в орбите $O(A, c)$ содержится система в верхней форме Хессенберга, то каждая выходная функция $y(t)$ пары (A, c) n раз квазидифференцируема относительно матрицы (9) и удовлетворяет однородному квазидифференциальному уравнению ${}_{Q}^{n}y(t) = 0$. Следовательно, наличие в орбите $O(A, c)$ пары в верхней форме Хессенберга позволяет сравнительно просто решить вопрос о квазидифференцируемости выходных функций системы (A, c). Сказанное выше приводит к необходимости исследования вопроса о возможности преобразования системы (A, c) к верхней форме Хессенберга. Как показывают примеры, это бывает не всегда. Однако если во множестве $O(A, c)$ содержится какая-либо система в форме Хессенберга, то в нем имеется и бесконечное множество таких систем.

Лемма 4. Две системы (A, c) и (B, d) из Z_n принадлежат одной и той же орбите относительно действия группы ς_n тогда и только тогда, когда их множества выходов $Y_T(A, c)$ и $Y_T(B, d)$ совпадают.

Лемма 5. Если в орбите содержится пара в верхней форме Хессенберга со свойством (1.8), то совокупность $O_H^0(A,c)$ всех хессенберговых систем с этим свойством, расположенных в $O(A,c)$, описывается соотношением

$$O_H^0(A, c) = \{G(H, g) : G \in \varsigma_\Delta\},$$

где ς_Δ — подгруппа группы ς_n, состоящая из всех верхнетреугольных невырожденных матриц.

Критерий существования системы в верхней форме Хессенберга в орбите $O(A,c)$ доставляет следующая теорема.

Теорема 3. Множество $O(A,c)$ содержит пару в верхней форме Хессенберга (H, g), удовлетворяющую условию (8), тогда и только тогда, когда все выходные функции $y(t)$ системы n раз квазидифференцируемы относительно некоторой матрицы $P \in U_n(T)$ и только они удовлетворяют однородному квазидифференциальному уравнению ${}_{P}^{n}y(t) = 0$.

Критерий существования верхней формы Хессенберга, описываемой теоремой 3, не является конструктивным, поскольку не дает способа построения матрицы $P(t)$. Поэтому ниже получены более эффективные признаки непустоты множества $O_H^0(A,c)$. Для формулировки этих условий зададим скалярные функции $b_{ij}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = i - 1; i, \dots, n$) и n-вектор-строки $p_l(t)$ ($l = 1, 2, \dots, n$) следующим образом. При $i = 1$, $j = 0$, $l = n$ положим $b_{10}(t) = \| c(t) \|$, $p_n(t) = c(t)\, \| c(t) \|^{-1}$, а для остальных индексов определим их при ($k = 0, 1, \dots, n - 2$) по рекуррентным правилам:

$\dots$

$$b_{n-k,n-k-1}(t) = \| p_{n-k}(t)A(t) + \dot p_{n-k}(t) - \sum_{i=n-k}^{n} b_{n-k,i}(t)\, p_i(t) \|,$$

$$p_{n-k-1}(t) = (p_{n-k}(t)A(t) + \dot p_{n-k}(t) - \sum_{i=n-k}^{n} b_{n-k,i}(t)\, p_i(t))\, b_{n-k,n-k-1}^{-1}(t).$$

Теорема 4. В орбите $O(A,c)$ пары $(A,\ c)$ содержится система $(H,\ g)$ в верхней форме Хессенберга со свойством (8) тогда и только тогда, когда при каждом $t \in T$ и n-вектор-функции $p_{n-k}(t)$ непрерывно дифференцируемы на T, при этом элементы $r_{ij}(t)$ пары $(H,\ g)$ определяются соотношениями ,

… …

$$r_{1i}(t) = (p_1(t)A(t) + \dot{p}_1(t))p_i'(t)\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а матрица $G(t)$ преобразования $(A,c) \to G^*(A,c) = (H,g)$ может быть выбрана ортогональной.

Существенную роль при изучении классов эквивалентности играют полные инварианты группы преобразований ς_n на множестве систем наблюдения. Для того чтобы их определить, обозначим через часть множества , состоящую из равномерно наблюдаемых систем и пусть $\mathsf{R}_n = \mathsf{R} \cap \mathsf{D}_n$, т.е. — это множество равномерно наблюдаемых систем класса n. На множестве зададим отображение f по правилу

$$f : \mathsf{R}_n \to C(T, \mathsf{R}^n), \quad f(A,c)(t) = s_n(t)S^{-1}(t), \tag{10}$$

где $S(t)$ — матрица наблюдаемости пары $(A,\ c)$, а векторная функция $s_n(t)$ находится из рекуррентных соотношений, аналогичных формулам (8).

Теорема 5. Отображение (10) является полным инвариантом действия группы ς_n на множестве .

Из теоремы 5 следует, что между множествами и R_n/ς_n существует взаимооднозначное соответствие. Иной способ характеризации орбит группы ς_n на множестве заключается в том, чтобы каждой орбите поставить во взаимооднозначное соответствие некоторую систему по возможности простой (канонической) структуры. Учитывая хорошо известные результаты для автономных систем и канонические формы неавтономных систем с бесконечно дифференцируемыми матрицами, представляется естественным в качестве канонических выбирать пары $(A^0,\ c^0)$ в форме Фробениуса

$$A^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_0(t) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1(t) \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad c^0 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что если $\alpha_0, \alpha_1 \in C(T,\mathsf{R}), \alpha_j \in C^{j-1}(T,\mathsf{R}) \quad (j = 2,3,\ldots,n-1),$ то система $(A^0,\ c^0)$ принадлежит классу $(n-1)$, и ее матрица наблюдаемости $S_0(t)$ невырождена при всех $t \in T$. Следовательно, пара $(A^0,\ c^0)$ равномерно наблюдаема.

Обозначим через $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ компоненты n-вектор-функции , построенной по системе $(A,c) \in \mathsf{R}_n$. Введем в рассмотрение подмножество множества , элементы $(A,\ c)$ которого обладают свойством

$$f_j(A,c) \in C^{j-1}(T,\mathsf{R}) \quad (j = 1,2,\ldots,n).$$

Из доказательства теоремы 5 следует, что множество инвариантно относительно действия группы ς_n. Пусть — совокупность всех систем $(A^0,\ c^0)$ с функциями α_j из множества $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Следующая теорема, основанная на анализе соотношения , показывает, что множество орбит $\mathrm{R}_n^0 / \varsigma_n$ параметризуется системами из K_n^0.

Теорема 6. Любая система из множества принадлежит классу и в каждой орбите $O \in R_n^0 / G_n$ существует одна и только одна система (A^0, c^0) с $\alpha_j \in C^j(T, R)$ $(j = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

Метод построения канонической формы. Опишем метод нахождения канонической формы для заданной пары $(A, c) \in \Sigma_n$. Для этого по параметрам систем (A, c) и (A^0, c^0) построим дифференциальное уравнение

$$\dot{Q}(t) = A^0(t)Q(t) - Q(t)A(t) \quad (t \in T) \tag{12}$$

относительно $(n \times n)$-матрицы $Q(t)$, которая подчиняется условию

$$c^0 Q(t) = c(t) \quad (t \in T). \tag{13}$$

Обозначим через $q_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ строки матрицы $Q(t)$. Несложно убедиться, что условия (12), (13) равносильны при $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ соотношениям

$$\cdot \tag{14}$$

$$\dot{q}_1(t) + q_1(t)A(t) - \alpha_0(t)c(t) = 0 \quad (t \in T). \tag{15}$$

Пусть множество всех непрерывных на отрезке T n-вектор-строк; σ — перестановка компонент строки $\ldots$, действующая по следующему правилу $\ldots$ и p — проекция на первую координатную ось: $p\nu = \nu_1$. Определим последовательность операторов $V_k : \Sigma_n \times C_n \to C_n$ $(k = 1, 2, \ldots)$ следующим образом:

$$\cdot$$

$$\ldots$$

Очевидно, область определения каждого оператора V_k непуста.

Далее важное значение имеет случай $k = n$. Поэтому приведем простое описание области определения , выраженное в терминах квазидифференцирования. Для любой функции $\nu \in C_n$ зададим нижнетреугольную $((n + 1)(n + 1))$-матрицу

$$P(\nu(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\nu_1(t) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\nu_2(t) & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ -\nu_n(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Лемма 6. Тройка (A, c, ν) принадлежит области определения оператора V_n тогда и только тогда, когда каждая выходная функция $y(t)$ системы (A, c) n раз непрерывно квазидифференцируема относительно матрицы $P(t) = P(\nu(t))$.

Рассмотрим уравнение

$$\tag{17}$$

относительно $\nu \in C_n$. Из соотношений (14), (15) и построения оператора $V_n(A, c, \nu)(t)$ легко вытекает, что если система (A, c) обладает канонической формой, то n-вектор-функция … является решением этого уравнения. Поэтому справедливы следующие признаки отсутствия канонической формы.

Теорема 7. Пара $(A,c)\in\Sigma_n$ не имеет канонической формы, если либо множество $D_{A,c}(V_n)=\{v\in C_n:(A,c,v)\in D(V_n)\}$ пусто, либо уравнение (17) неразрешимо.

Теорема 8. Если уравнение (17) разрешимо, но его решение не единственно, то система (A, c) не имеет канонической формы.

Пусть для системы (A, c) уравнение (17) построено. Обозначим через $Q_n(A, c)$ подмножество множества $P_n(A, c)$, состоящее из элементов, относительно которых каждая выходная функция системы (A, c) n раз непрерывно квазидифференцируема. В силу леммы 6 множество $Q_n(A, c)$ не пусто. Выберем какую-либо матрицу $P\in Q_n(A, c)$ и предположим, что пара $(A,c)\in\Sigma_n$ равномерно наблюдаема относительно $P(t)$. В силу леммы 2 она будет равномерно наблюдаемой и при любой $P\in Q_n(A, c)$. Поэтому далее будем говорить просто о равномерной наблюдаемости.

Пусть пара $(A,c)\in\Sigma_n$ фиксирована и $P\in Q_n(A, c)$. Обозначим через часть множества Σ_n, состоящую из всех равномерно наблюдаемых систем класса $\{P, n\}$. Очевидно, семейство инвариантно относительно действия группы G_n, т.е. вместе с каждой парой $(B,d)\in \mathrm{R}_n^P$ множеству принадлежит и элемент , $G\in G_n$. Для любой системы $(B,d)\in \mathrm{R}_n^P$ сформируем ее матрицу наблюдаемости $S_P(t)$ и зададим отображение

$$f_P:\mathrm{R}_n^P\to C(T,\mathrm{R}^n),\quad f_P(B,d)(t)=s_n(t)S_P^{-1}(t). \tag{18}$$

Лемма 7. Отображение f_P является полным инвариантом действия группы G_n на множестве .

С помощью теорем 7, 8 и леммы 7 доказана.

Теорема 9. Равномерно наблюдаемая система (A, c) имеет каноническую форму, если и только если уравнение разрешимо (и тогда его решение единственно).

В случае равномерной наблюдаемости пары (A, c) вопрос о канонической форме исчерпывающим образом описывается уравнением (17). Однако пока нет каких-либо методов отыскания его решений. Поэтому далее описана рекуррентная процедура построения строки $\nu(t)$, удовлетворяющей уравнению (17), основанная в какой-то части на модификации способа нахождения формы Хессенберга. Кроме того, в процессе реализации указанной процедуры построена нижнетреугольная матрица $P(t)$, относительно которой все выходы системы (A, c) n раз квазидифференцируемы и с помощью которой можно построить матрицу наблюдаемости, идентифицирующую свойство равномерной наблюдаемости.

Предположим, что для системы (3) каноническая форма существует. Это значит, что найдется такая матрица $G\in G_n$, что

. (19)

С помощью метода ортогонализации Грама-Шмидта запишем $G(t)$ в виде произведения D ортогональной непрерывно дифференцируемой матрицы $G_0(t)$ и верхнетреугольной непрерывно дифференцируемой матрицы $G_\Delta(t)$. Обозначим через $p_n(t)$, $p_{n-1}(t)$, …, $p_1(t)$ соответственно первую, вторую, …, n-ю строки матрицы (штрих означает транспонирование), а через $g_{ij}(t)$ — элементы матрицы $G_\Delta(t)$. Очевидно, функции $p_i(t)$ и $g_{ij}(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ii}(t)\neq 0,\ \|p_i(t)\|=1,\ p_i(t)p_j'(t)=0\ (i,j=1,2,\dots,n;\ i\neq j). \tag{20}$$

Используя разложение D, представим равенство (19) следующим образом:

$$(G_o'(t)A(t)+\dot{G}'_o(t))G_o(t)G_\Delta(t) = G_\Delta(t)A^0(t)+\dot{G}_\Delta(t), \quad c(t)G_o(t) = c^0 G_\Delta^{-1}(t). \tag{21}$$

Простой анализ тождества с учетом ограничений (20) приводит к соотношениям

$$\| c(t) \| \neq 0, \quad p_1(t) = c(t)\, \| c(t) \|^{-1}, \quad g_{nn}(t) = \| c(t) \|^{-1}. \tag{22}$$

Положим $B(t) = (G_o'(t)A(t)+\dot{G}'_o(t))G_o(t)$ и обозначим через $b_{ij}(t)$ элементы этой матрицы. Если для системы (A, c) существует каноническая форма Фробениуса, то, учитывая свойства матриц $G_0(t)$ и $G_\Delta(t)$ можно рекуррентно определить функции $b_{ij}(t)$, $p_i(t)$ следующим образом:

$$b_{10}(t) = \| c(t) \|, \quad p_1(t) = c(t)\, \| c(t) \|^{-1} \tag{23}$$

при $i = 1$, $j = 0$, а при $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, задав их соотношениями

$$b_{n+1-i,n+1-j}(t) = (p_i(t)A(t)+\dot{p}_i(t))\,p_j'(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, i), \tag{24}$$

$$b_{n+1-i,n-i}(t) = \| p_i(t)A(t)+\dot{p}_i(t)-\sum_{k=1}^{i} b_{n+1-i,n+1-k}(t)\,p_k(t) \|, \tag{25}$$

$$p_{i+1}(t) = b_{n+1-i,n-i}^{-1}(t)\Big(p_i(t)A(t)+\dot{p}_i(t)-\sum_{k=1}^{i} b_{n+1-i,n+1-k}(t)\,p_k(t)\Big),$$

$$b_{1j}(t) = (p_n(t)A(t)+\dot{p}_n(t))\,p_{n+1-j}'(t) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

а также элементы матрицы $G_\Delta(t)$:

$$g_{nn}(t) = \frac{1}{\| c(t) \|}, \quad g_{i-1,i-1}(t) = \frac{g_{ii}(t)}{b_{i,i-1}(t)}. \tag{27}$$

$$g_{i,j+1}(t) = \sum_{k=1}^{j} b_{ik}(t)\,g_{kj}(t) - \dot{g}_{ij}(t), \tag{28}$$

где вычисления осуществляются последовательно для наборов индексов

… … …

Следовательно, можно определить функции

$$v_k(t) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{n+1-k,j}(t)\,g_{jn}(t) - \sum_{j=1}^{k-1} g_{n+1-k,n+1-j}(t)\,v_j(t) - \dot{g}_{n+1-k,n}(t)}{g_{n+1-k,n+1-k}(t)} \tag{29}$$

…

Теорема 10. Система (A, c) обладает канонической формой тогда и только тогда, когда построенные функции $g_{ij}(t)$, $p_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(j = i, i+1, \ldots, n)$ непрерывно дифференцируемы на T и при любом $t \in T$ выполняются условия

… (30)

коэффициенты $\alpha_j(t)$ ($j = 0, 1, \ldots, n - 1$) в этом случае находятся по формулам ,
($j = 0, 1, \ldots, n - 1$), где — функции (30).

Пусть функции $b_{ij}(t)$ найдены и верны неравенства (30). Используя функции $b_{ij}(t)$ по формуле (9), легко находится матрица $P(t)$, относительно которой существуют квазипроизводные выходных функций системы (A, c).

Теорема 11. Если выполняются условия теоремы 10, то каждая выходная функция системы (A, c) n раз непрерывно квазидифференцируема по матрице (A, c).

Предложен метод исследования наблюдаемости, основанный на квазидифференцируемости выходных переменных и позволивший существенно ослабить известные требования гладкости коэффициентов. Доказано, что свойство равномерной наблюдаемости эквивалентно аппроксимативной наблюдаемости, т.е. возможности с помощью -последовательностей сколь угодно точно оценивать текущее состояние системы без дифференцирования выходной функции. Доказаны необходимые и достаточные условия существования канонических форм Фробениуса для равномерно наблюдаемых систем с квазидифференцируемыми коэффициентами, а также разработан и обоснован метод их построения. Полученные результаты могут найти применение при конструировании систем автоматического регулирования, проектировании навигационных систем, построении управления типа обратной связи в условиях неопределенности, создании эффективных методов анализа и проектирования систем управления и др.

Литература

1. *Гайшун, И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем / И.В. Гайшун. — Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1999. — 409 с.

2. *Красовский, Н.Н.* Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

3. *Дерр, В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В.Я. Дерр // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. — 1999. — Вып. 1(16). — С. 3—105.

4. *Silverman, L.M.* Controllability and observability in time-variable linear systems / L.M. Silverman, H.E. Meadows // SIAM J. Control. — 1967. — Vol. 5, № 1. — P. 64—73.

5. *Silverman, L.M.* Transformation time-variable systems to canonical (phase-variable) form / L.M. Silverman // IEEE Trans. Autom. Control. — 1966. — Vol. AC-11, № 2. — P. 300—303.

6. *Астровский, А.И.* Один способ построения канонических форм Фробениуса линейных нестационарных систем наблюдения / А.И. Астровский, И.В. Гайшун // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 10. — С. 1479—1487.

7. *Астровский, А.И.* Квазидифференцируемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения / А.И. Астровский, И.В. Гайшун // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 423—431.

Статья поступила в редакцию 17.12.2012 г.