УДК 330.4

N. Holod
O. Buinevich
BSEU (Minsk)

COMPROMISE PLANS DEVELOPMENT OF MULTI-PURPOSE OBJECTIVES

The article describes algorithms of constructing compromise plans of the economic efficiency at the enterprise by using criteria systems and compromise methods.

Keywords: *multi-purpose objectives; a suboptimal plan; criteria de-escalation; additive and multiplicative criteria; the problem of normalization; a method of concessions; extreme value of function.*

Н. И. Холод
доктор экономических наук, профессор
О. А. Буйневич
БГЭУ (Минск)

РАЗРАБОТКА КОМПРОМИССНЫХ ПЛАНОВ МНОГОЦЕЛЕВЫХ ЗАДАЧ

В статье рассматриваются алгоритмы построения компромиссных планов экономической эффективности работы предприятий на основе использования системы критериев и компромиссных методов задач.

Ключевые слова: *многокритериальные задачи; субоптимальный план; свертывание критериев; аддитивный и мультипликативный критерии; проблема нормализации; метод уступок; экстремальные значения функций.*

Экономическую эффективность предприятия количественно можно измерить при помощи системы экономических показателей. Однако найденное оптимальное значение конкретного показателя не означает, что какое-либо из предприятий работает лучше. Только система показателей может дать полную характеристику эффективности производства.

Задачи, при решении которых учитывается множество показателей или критериев системы, получили название многокритериальных (многоцелевых). Термин «многокритериальные задачи» часто идентифицируют с термином «задачи векторной оптимизации». Вместе с тем эти определения имеют различия: при решении задачи многокритериальной оптимизации имеем, как правило, систему разнородных критериев, а для задачи векторной оптимизации — однородные критерии, для решения которых используется метод Парето.

Также необходимо отличать эти задачи от многоэкстремальных, которым присущи не разные критерии, а наличие у целевой функции не только глобального (возможно, и не единственного), но и локальных экстремумов.

Многокритериальная задача задается множеством G допустимых решений и набором целевых функций f_1, ..., f_n, принимающих действительные значения. Сущность данного типа задач состоит в том, что необходимо найти такое $X \in G$, которое минимизирует (максимизирует) значения всех функций f_i, $i = 1, ..., n$. Очень редко существует такое решение, которое минимизирует (максимизирует) все целевые функции, поэтому содержание многокритериальной задачи состоит в выработке таких концепций оптимальности, доказательстве их реализуемости и нахождении этих реализаций.

В общем случае математическая формулировка задачи многокритериальной оптимизации с множеством допустимых решений $G \in R^n$ и векторной целевой функцией $f(X) = (f_1(X), \ldots, f_n(X))$, где $f_1(X)$ — локальная оценка решения X по 1-му критерию, или критерию f_1; $f_n(X)$ — локальная оценка решения X по n-му критерию, или критерию f_n, может быть записана следующим образом:

$$f_k(X) \xrightarrow[X \in G]{} extr,\ k = \overline{1, n}.$$

Любой скалярный критерий вида

$$f_k(X) \to \max_{X \in G}$$

можно заменить эквивалентным скалярным критерием

$$-f_k(X) \to \min_{X \in G}.$$

С математической точки зрения данный тип задач не имеет идеального метода решения — каждый их них обладает преимуществами и недостатками.

Планирование сильно осложняется множественностью целей, особенно при разнонаправленных целях. Также планирование может быть затруднительным в случае, когда при приближении к одним целям система удаляется от других. Возникает задача согласования целей. К примеру, при решении задачи по критериям максимума прибыли и минимума издержек производства имеем два различных плана. Задачи могут быть как линейные, так и нелинейные. Цель решения таких экономических задач — найти план, при котором система критериев была бы наилучшей, т.е. она должна быть эффективной, компромиссной или субоптимальной. Если имеем все равнозначные критерии, то эффективным будем считать тот план, при котором отклонения от оптимумов по каждому критерию равны, и для его отыскания используем метод равных и наименьших отклонений. Для задач, у которых критерии неравнозначны, применяем метод уступок.

Основными методами решения задач многокритериальной оптимизации, кроме названных, являются:

1) методы, основанные на свертывании критериев в единый;

2) методы целевого программирования;

3) методы, в основе которых лежат человеко-машинные процедуры принятия решений.

Методы, основанные на свертывании критериев из локальных критериев, можно сформировать в один. Наиболее распространенным считается метод линейной комбинации частных критериев.

При использовании методов решения многокритериальных задач возникает ряд специфических проблем. Например, локальные критерии зачастую имеют различные единицы и масштабы измерения, поэтому возникает проблема нормализации. Операция, при которой критерии приводятся к единому масштабу и безразмерному виду, получила название нормирования. Самым популярным способом нормирования является замена абсолютных значений критериев их безразмерными относительными величинами

$$f_n(\overline{x}) = \left| \frac{f_n^* - f_n(\overline{x})}{f_n^*} \right|,$$

где f_n^* — оптимальная величина n-го критерия.

За нормирующие величины можно принимать директивные значения критериев, заданные заказчиком. Значения критериев, заложенные в техническом задании, считаются наилучшими.

В зависимости от свертки критериев в один различают следующие их виды: аддитивный, мультипликативный, интегральный.

Аддитивный критерий рассчитывается путем сложения нормированных значений частных критериев. В общем виде обобщенный критерий можно представить целевой функцией

$$F(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{F_i(\overline{x})}{F_i^*(\overline{x})} = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\overline{x}) \to \max,$$

где n — количество объединенных частных критериев; c_i — весовой коэффициент i-го частного критерия; $F_i(\overline{x})$ — числовое значение i-го частного критерия; $F_i^*(\overline{x})$ — i-й нормирующий делитель; $f_i(\overline{x})$ — нормированное значение i-го частного критерия.

Проиллюстрируем аддитивный критерий на условном примере.

Требуется определить оптимальный вариант реализации сельскохозяйственной продукции частными критериями, оценить варианты реализации по максимальной прибыли и качеству. Исходные данные для определения оптимального варианта реализации продукции приведены в табл. 1.

Таблица 1. Данные по реализации сельскохозяйственной продукции

Критерий F_i	Весовой коэффициент	Значение критериев для вариантов		
		В1	В2	В3
Прибыль F_1, млн р.	0,6	80	120	200
Качество F_2, %	0,4	70	90	50

Источник: составлено авторами.

Целевая функция на основе аддитивного критерия представится в виде

$$F(\overline{x}) = c_1 \frac{F_1(\overline{x})}{F_1^*(\overline{x})} + c_2 \frac{F_2(\overline{x})}{F_2^*(\overline{x})} \to \max.$$

В качестве делителей возьмем наилучшие значения частных критериев

$$F_1^*(\overline{x}) = 200 \text{ млн р.}, \; F_2^*(\overline{x}) = 90 \;\%.$$

Значение обобщенных критериев для каждого варианта:

$$f_1(\overline{x}) = \left(0{,}6 \cdot \frac{80}{200} + 0{,}4 \cdot \frac{70}{90}\right) = 0{,}55;$$

$$f_2(\overline{x}) = \left(0{,}6 \cdot \frac{120}{200} + 0{,}4 \cdot \frac{90}{90}\right) = 0{,}76;$$

$$f_3(\overline{x}) = \left(0{,}6 \cdot \frac{200}{200} + 0{,}4 \cdot \frac{50}{90}\right) = 0{,}82.$$

Максимальное значение обобщенного аддитивного критерия соответствует 3-му варианту, значит, этот вариант является оптимальным.

Одним из недостатков этого метода является то, что весовые коэффициенты назначаются руководством предприятия. Чтобы показать это, поменяем весовые коэффициенты местами: $c_1 = 0{,}4$, $c_2 = 0{,}6$. В итоге получим

$$f_1(\overline{x}) = \left(0{,}4 \cdot \frac{80}{200} + 0{,}6 \cdot \frac{70}{90}\right) = 0{,}63;$$

$$f_2(\overline{x}) = \left(0{,}4 \cdot \frac{120}{200} + 0{,}6 \cdot \frac{90}{90}\right) = 0{,}84;$$

$$f_3(\overline{x}) = \left(0{,}4 \cdot \frac{200}{200} + 0{,}6 \cdot \frac{50}{90}\right) = 0{,}73.$$

При изменении частных критериев отметим, что теперь оптимальным является второй вариант.

Мультипликативный критерий обладает аналогичными с аддитивным критерием недостатками. Обобщенный критерий в этом случае имеет вид

$$f(\overline{x}) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} c_i F_i \to \max(\min),$$

где $\prod$ — знак произведения.

Для приведенного условного примера рассчитаем наилучший вариант реализации продукции определенного качества, используя мультипликативный метод:

$$f_1(\overline{x}) = 0{,}6 \cdot \frac{80}{200} + 0{,}4 \cdot \frac{70}{90} = 0{,}0747;$$

$$f_2(\overline{x}) = 0{,}6 \cdot \frac{120}{200} + 0{,}4 \cdot \frac{90}{90} = 0{,}144;$$

$$f_3(\overline{x}) = 0{,}6 \cdot \frac{200}{200} + 0{,}4 \cdot \frac{50}{90} = 0{,}133.$$

Отметим, что оптимальным является такой же вариант, как и по аддитивному методу, а именно третий. Этому варианту соответствует наибольшая величина произведения частных нормированных критериев.

Интегральный критерий исследован на следующем примере.

Пусть требуется из четырех вариантов системы, характеризуемой производительностью П (шт./мин) и стоимостью В (ден. ед.), которые приведены в табл. 2, выбрать наилучший вариант по интегральному критерию.

Таблица 2. Исходные данные

Параметр	Вариант системы			
	1-й	2-й	3-й	4-й
П, шт./мин	20	30	60	50
В, ден. ед.	100	400	500	200

Источник: составлено авторами.

Целевую функцию на основе аддитивного критерия представим в виде

$$F_i = c_1 \frac{П_i}{П_i^*} - c_2 \frac{В_i}{В_i^*} \to \max,$$

где c_1, c_2 — весовые коэффициенты; $П_i^*$, $В_i^*$ — нормирующие значения производительности и стоимости соответственно. Так, для производительности нормирующий коэффициент равен 60 шт./мин, а для стоимости — 500 ден. ед.

Знак минус перед вторым членом аддитивного критерия показывает, что рост стоимости снижает значение критерия.

Для определения интегрального критерия F_i выберем три ситуации:

1. Важна только производительность ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$).
2. Производительность и стоимость одинаково важны ($c_1 = 0,5$, $c_2 = 0,5$).
3. Важна только стоимость ($c_1 = 0$, $c_2 = 1$).

Весовые коэффициенты, нормируемые значения производительности, стоимости по вариантам представим в табл. 3.

Таблица 3. Значения нормируемых показателей и весовые коэффициенты

Ситуация	Весовой коэффициент		Вариант системы			
	c_1	c_2	1-й	2-й	3-й	4-й
1-я	1	0	0,33	0,5	1	0,83
2-я	0,5	0,5	0,7	–0,15	0	0,22
3-я	0	1	–0,2	–0,8	–1	–0,4

Источник: составлено авторами.

Для определения интегрального критерия имеем зависимость

$$F_i = c_1 \frac{П_1}{60} - c_2 \frac{В_1}{500}.$$

Для первой ситуации первого варианта имеем

$$F_1 = 1 \cdot \frac{20}{60} - 0 \cdot \frac{100}{500} = 0{,}33.$$

Для первой ситуации второго варианта имеем

$$F_1 = 1 \cdot \frac{30}{60} - 0 \cdot \frac{400}{500} = 0{,}5.$$

Очевидно, что для первой ситуации имеем элементы первой строки табл. 3.

Аналогично для второй ситуации по всем вариантам имеем для интегрального критерия элементы второй строки. И нормированные коэффициенты третьей строки есть значения интегрального критерия ситуации 3.

Значения критерия F_i, полученные для трех ситуаций и четырех вариантов системы, приведены в табл. 3. Отметим, что наибольшее значение критерия зависит не только от параметров вариантов, но и от принятых весовых коэффициентов. Для первой ситуации лучшим является вариант 3, второй — 4, третьей — 1.

Очевидно, что вариант 2 для каждой из трех рассмотренных ситуаций является худшим.

Таким образом, вариант, выбранный как лучший, является им лишь в смысле принятого критерия при заданных нормирующих значениях параметров и субъективных весовых коэффициентах. При изменении критерия, значений нормирующих параметров, весовых коэффициентов лучшими могут оказаться другие варианты.

Для решения многокритериальных задач существуют более совершенные методы, которые называются компромиссными: метод уступок и метод равных наименьших относительных отклонений. Рассмотрим их подробнее.

Алгоритм метода уступок выглядит следующим образом:

1. Расположить критерии задачи по их значимости: наиболее важный считается первым.
2. Решить задачу по первому критерию, экстремальное значение которого f_1^* целевой функции f_1.

3. Сделать уступку по первому критерию на величину

$$f_1 = k_1 f_1^*,\ 0 < k_1 < 1.$$

4. Ввести в задачу еще одно ограничение $f_1 \ge k_1 f_1^*$.

5. Решить задачу по второму критерию, т.е. отыскать экстремальное значение f_2^* целевой функции f_2.

6. Сделать уступку по второму критерию на величину

$$f_2 = k_2 f_2^*,\ 0 < k_2 < 1.$$

7. Ввести в задачу дополнительное ограничение $f_2 \ge k_2 f_2^*$.

8. Расширенную задачу с двумя дополнительными ограничениями решить по третьему критерию и т.д.

9. Поиск решения заканчивается, когда решение получено по всем критериям. Окончательный план будет наиболее эффективным. При этом получаем экстремальное значение наименее важного критерия при условии гарантированных значений предшествующих критериев.

Для применения метода уступок в экономике рассмотрим задачу использования ресурсов.

Предприятие имеет два вида ресурсов — A_1 и A_2 в количестве 15 и 12 ед. соответственно, из которых производится два вида продукции — $П_1$ и $П_2$. Оно может обеспечить выпуск каждого вида продукции в количестве не более 4 ед. продукции $П_1$ и 3 ед. продукции $П_2$. Для производства единицы продукции $П_1$ необходимо 2 ед. ресурса A_1 и 6 ед. ресурса A_2, для производства единицы продукции $П_2$ необходимо 3 ед. ресурса A_1 и 1 ед. ресурса A_2. При реализации единицы продукции $П_1$ и $П_2$ прибыль составляет 3 и 4 ден. ед., а затраты — 1 и 2 ден. ед. соответственно. Необходимо найти план выпуска продукций $П_1$ и $П_2$, который обеспечивал бы получение максимальной прибыли при минимальных затратах, считая, что прибыль предпочтительнее, ее отклонение от максимального значения $\Delta f_1 = 25\ \%$.

Обозначив искомый план через $\overline{X} = (x_1; x_2)$, где x_1 — количество единиц продукции $П_1$, а x_2 — количество единиц продукции $П_2$, математически задача представится в виде

$$f_1 = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$$
$$f_2 = x_1 + 2x_2 \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15; \\ 6x_1 + x_2 \ge 12; \\ x_1 \le 4; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
$$\Delta f_1 = 25\ \%.$$

Используя алгоритм метода уступок и методы линейного программирования, получим компромиссный план по двум критериям: $f_1^* = 16$; $f_2^* = 6$; $\overline{X} = (x_1; x_2) = (4; 1)$.

При решении задачи по методу уступок имеем различные отклонения критериев от экстремальных значений. Можно потребовать, чтобы в компромиссном плане относительные отклонения всех критериев от своих экстремальных значений были равны и минимальны. При этом предполагается, что в допустимых решениях задачи не существует плана, оптимизирующего все критерии.

Условие равенства отклонений запишем в виде:

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \ldots = \left|\frac{f_m - f_m^*}{f_m^*}\right|,$$

где f_k^* — экстремальное значение функции $f_k (k = \overline{1, m})$.

Если все критерии задачи максимизируются, условия равенства записываются в виде

$$q_1 f_1 = q_k f_k,$$

где $q_k = \dfrac{1}{f_k^*}$; $k = \overline{1, m}$; m — число критериев задачи.

Для случая, когда один критерий максимизируется, а второй минимизируется, условие равенства отклонений запишется в виде

$$q_1 f_1 + q_k f_k = 2.$$

С учетом равных и наименьших отклонений строится замещающая задача, т.е. к системе ограничений данной задачи добавляются дополнительные условия

$$\begin{cases} q_1 f_1 = q_k f_k; \\ q_1 f_1 + q_k f_k = 2; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j - f_1 = 0; \\ \qquad \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j - f_k = 0, \end{cases}$$

где оптимизирующие критерии f_1, f_2, ..., f_k включены в число неизвестных.

В качестве целевой функции можно взять любой из критериев, например f_1:

$$F = f_1 \to \max.$$

Проиллюстрируем метод равных и наименьших относительных отклонений на примере линейной экономической задачи.

Обозначим искомый план через $\overline{X} = (x_1; x_2)$, где x_1 — количество рукавиц первого типа, шт.; x_2 — количество рукавиц второго типа, шт. Тогда математическая модель задачи запишется в виде

$$f_1 = x_1 + 2x_2 (\max);$$
$$f_2 = 30x_1 + 10x_2 (\max)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; \\ x_2 \le 4; \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0.$$

Решив задачу, получаем $f_1^* \max = 10$, $f_2^* \max = 150$.

Относительные отклонения для функций f_1 и f_2

$$\rho_1 = \left|\frac{10 - x_1 - 2x_2}{10}\right|; \rho_2 = \left|\frac{150 - 30x_1 - 10x_2}{150}\right| = \left|\frac{15 - 3x_1 - x_2}{15}\right|.$$

Для построения дополнительного ограничения замещающей задачи приравниваем относительные отклонения:

$$\left|\frac{10 - x_1 - 2x_2}{10}\right| = \left|\frac{15 - 3x_1 - x_2}{15}\right|.$$

После упрощения выражения $\rho_1 = \rho_2$ получаем дополнительное ограничение

$$3x_1 - 4x_2 = 0, \text{ или } x_2 = \frac{3}{4}x_1.$$

Замещающая задача имеет вид

$$f_2 = 30x_1 + 10x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_2 \le 4; \\ 2x_1 + x_2 \le 10; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решив задачу симплексным методом, получаем компромиссный план $\overline{X}$ = = (3,429; 2,574), для которого $f_1 = 8{,}571$; $f_2 = 128{,}571$.

Итак, по методу равных наименьших относительных отклонений план производства рабочих рукавиц первого типа — 3,429 тыс. ед., второго — 2,571 тыс. ед., прибыль составит 8,571 тыс. ден. ед., а выручка — 128,571 тыс. ден. ед. при относительном отклонении $\rho_1 = \rho_2 = 0{,}143$. Это означает, что обе целевые функции отклоняются от своих оптимальных значений на 14,3 %.

Таким образом, из вышеизложенного может быть сделан вывод о целесообразности построения компромиссных планов, позволяющих учитывать множество функционирующих экономических показателей для оценки эффективности работы предприятия. В случаях, когда компромиссное решение необходимо получить для большого числа критериев, можно использовать средства прикладных пакетов программ (в частности, пакет MatLab).

Литература

1. *Ногин, В. Д.* Принятие решений при многих критериях : учеб. пособие / В. Д. Ногин. — СПб. : ЮТАС, 2007. — 104 с.

Nogin, V. D. Decision-making in many criteria : tutorial / V. D. Nogin. — SPb. : UTAS, 2007. — 104 p.

2. *Кузнецов, А. В.* Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие для вузов / А. В. Кузнецов. — 2-е изд. — Минск : Выш. шк., 2001.

Kyznecov, A. V. Guide to the solution of mathematical programming problems : tutorial for universities / A. V. Kyznecov. — 2nd ed. — Minsk : High school, 2001.

3. *Холод, Н. И.* Математические методы анализа и планирования / Н. И. Холод. — Минск : Ураджай, 1989.

Holod, N. I. Mathematical methods of analysis and planning / N. I. Holod. — Minsk : Harvest, 1989.

4. *Кини, Р. Л.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа. — М. : Радио и связь, 1981. — 560 с.

Kini, R. L. Decision-making in many criteria: preferences and substitution / R. L. Kini, H. Raifa. — M. : Radio and communications, 1981. — 560 p.

5. *Штойер, Р.* Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления, приложения / Р. Штойер. — М. : Наука, 1982.

Shtoyer, R. Multi-criteria optimization: theory, computation, applications / R. Shtoyer. — M. : Science, 1982.

6. *Беляков, В. В.* Многокритериальная оптимизация / В. В. Беляков, М. Е. Бушуева, В. И. Сагунов. — Н. Новгород : Нижегород. гос. техн. ун-т, 2001. — 317 с.

Belyakov, V. V. Multi-criteria optimization / V. V. Belyakov, M. E. Byshyeva, V. I. Sagynov. — N. Novgorod : Nizhny Novgorod State Techn. Univ., 2001. — 317 p.

7. *Лотов, А. В.* Многокритериальные задачи принятия решений : учеб. пособие / А. В. Лотов, И. И. Поспелова. — М. : МАКС Пресс, 2008. — 197 с.

Lotov, A. V. Multi-criteria decision making : tutorial / A. V. Lotov, I. I. Pospelova. — M. : MAX Press, 2008. — 197 p.

Статья поступила в редакцию 05.12.2016 г.

УДК 332.142

Zh. Tsaurkubule
Baltic International Academy (Riga, Latvia)

PROBLEMS OF DEVELOPMENT OF SMALL BUSINESS IN CONTEMPORARY MARKET ECONOMY OF LATVIA

Small enterprises represent the basis of economic development. They are far more flexible and responsive to frequent changes that occur in the contemporary global environment than large.

The article analyses significance of small business to the economies of EU and Latvia (more than 97 % of all registered enterprises are small and medium enterprises), also the most frequent problems of small enterprises in the EU and Latvian market. The results of the analysis show that these problems are usually generic and that the most important ones are: lack of financial resources (at the stage of formation of enterprises); lack of working capital, capacity for permanent development of products and services, quality management, high level of corruption in the country; tax laws and applicable tax rates,inadequate administrative regulations, limited purchasing power, etc.

Keywords: *European union; EU economy; Latvia; small business; small enterprises; development; advantages; market economy; development problems; system approach.*

Ж. Л. Цауркубуле
доктор инженерных наук, ассоциированный профессор
Балтийская международная академия (Рига, Латвия)

ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ МАЛОГО БИЗНЕСА В СОВРЕМЕННОЙ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ ЛАТВИИ

Малые предприятия являются основой экономического развития. Они гораздо более гибкие и восприимчивые к частым изменениям, происходящим в современной глобальной среде, чем крупные.

В статье анализируется значимость малого бизнеса для экономики ЕС и Латвии (более 97 % всех зарегистрированных предприятий являются малыми и средними), а также наиболее частые проблемы малых предприятий в ЕС и латвийском рынке. Результаты анализа показывают, что эти проблемы, как правило, имеют общий характер и наиболее важные из них: отсутствие финансовых ресурсов (на стадии становления предприятий); отсутствие оборотного капитала, способностей к постоянному развитию продукции и услуг, качественного управления, высокий уровень коррупции в стране; налоговое законодательство и соответствующие налоговые ставки, неадекватные административные правила, ограниченная покупательная способность населения и т.д.

Ключевые слова: *Европейский союз; экономика ЕС; Латвия; малый бизнес; малые предприятия; развитие; преимущества; рыночная экономика; проблемы развития; системный подход.*