Приложение 2

**Решения линейных дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши**

Что представляют собой собственные значения и для чего они служат? Одно из применений собственных значений связано с решением системы обыкновенных скалярных дифференциальных уравнений (уравнений в форме Коши). Система таких уравнений обычно записывается в векторно-матричной форме. При этом достаточно уметь дифференцировать функции типа xn , sin x, ex.

**П.2.1. Решение скалярного дифференциального уравнения**

Прежде чем рассматривать вычислительные алгоритмы матричных дифференциальных уравнений решим достаточно простую задачу. Очевидно, что производственный процесс с неограниченными запасами сырья и оборудования, трудовыми и финансовыми ресурса-  
ми может быть представлен скалярным дифференциальным уравнением вида

***x(t) = ax(t). (П 2.1)***

Предполагается, что при начальном состоянии t = t0 x (t) = t0 = x0 (возможен частный случай t0 = 0 ). В данном уравнении приняты следующие обозначения: x(t)– выпуск продукции в единицу времени (интенсивность производства); a – некоторый параметр, значения которого могут быть действительными и комплексными (присутствует  
вещественная и мнимая части) числами. В данном случае размерность параметра a равна 1/сек.  
Замечание. Этап записи уравнений математической модели должен завершаться проверкой размерностей слагаемых справа и слева от знака равенства.  
  
Решение такого уравнения осуществляется следующим образом.  
Записывается исходное уравнение в виде  
  
 ***dx (t) / x (t )= a d t*** . (П 2.2)  
Интегрируем правую часть уравнения в пределах от x0 до xN(t) (при этом полагаем, что xN(t) ≠ 0) , а левую часть – от t0 = 0 t0 = 0 до t . В результате запишем  
  
  
 xN(t) t   
ln x(t) = a t ; (П 2.3)   
 0  
 x0  
  
ln x (t) − ln x0 = a t − 0 или, ln (x (t)/ x0 ) = a t или (x(t)/ x0 ) = ea t .  
Окончательно решение исходного уравнения записывается в виде

x (t) = x0 ea t . (П 2.4)

Поведение *x (t)* в данном уравнении зависит от значений и знака параметра а. Допустим, имеем действительное число, которое может быть равно нулю, больше или меньше нуля.  
1. a = 0 ; x (t) = x0 . С точки зрения развития или устойчивости процессы протекают с нулевой скоростью.  
2. a > 0. x(t) = x0ea t . Происходит возрастание x(t) по экспоненте из заданного начального состояния x0 . Процесс развивается с определённой скоростью на некотором интервале времени или процесс является неустойчивым:  
 x (t) → ∞ при t → ∞. (П 2.5)  
3. a > 0. x (t) = x0e−at . Происходит уменьшение (снижение) x(t) по экспоненте из заданного начального состояния. Процесс развивается с определённой скоростью на некотором интервале времени или процесс является устойчивым: x (t) → 0 при t → ∞.  
 В экономике существуют и другие формы процессов, в частности колебательные. Например, изменение курсов валют, стоимости акций и т.д. Такие процессы включают, как минимум, две составляющие – гармоническую составляющую и экспоненциальную. Причём параметры гармонической составляющей обычно неизвестны.  
 Рассмотрим вариант, когда параметр a является комплексным числом, т.е. a = α ± jβ . Решение дифференциального уравнения будет иметь вид

x (t) = x0e(α± jβ)t = x0eα te± jβ t . (П 2.6)

При этом вещественное значение α может быть равно, больше или меньше нуля и определяет скорость изменения экспоненциальной составляющей x(t). Мнимая часть (± jβ) определяет осциллирующую (переменную) составляющую

e± jβ t = cos β t ± jsinβ t. (П 2.7)

Более сложные задачи в математическом отношении возникают при решении векторно-матричных уравнений, описывающих взаимосвязанные экономические объекты или системы.

**П.2.2. Решение системы двух дифференциальных уравнений**

Рассмотрим модель взаимосвязанных производственных процессов в виде двух дифференциальных уравнений

•x1( ) ( ) ( )t = 4 x1 t − 5 x2 t  
  
,  
x2 ( ) ( ) ( )t = 2 x1 t − 3 x2 t  
•  
, (П 2.8)  
где x1 ( )t – скорость изменения объёма запасов материальных ре-  
сурсов, необходимых для выпуска продукции; x2 (t) – объём выпуска  
продукции в единицу времени (интенсивность производства). Заданы  
начальные условия для уравнений в момент времени t = 0 :  
x1 ( )t = 0 = x10 = 8; x2 (t = 0) = x20 = 5. (П 2.9)  
В векторно-матричной форме данная система уравнений записы-  
вается в виде  
x ( )t = A x (t;), x (t = 0) = x0 , (П 2.10)  
85  
где xT( ) ( )t = [ ]x1 t , x2(t) ; x0T = [x10, x20] = [8, 5]; (П 2.11)  
  
  
−  
=  
2 3  
4 5  
A .  
Уравнение (П 2.10) имеет первый порядок, поскольку производ-  
ные более высокого порядка отсутствуют, и оно является линейным  
относительно искомой функции.  
Анализируя исходные данные, заключаем, что решение задано  
лишь в момент времени t = 0 . Необходимо определить решение  
в любой другой момент времени. При этом необходимо учитывать,  
что решение векторно-матричного уравнения изменяется во времени  
от заданных начальных значений. По аналогии с решением скалярно-  
го уравнения решение векторно-матричного уравнения будет  
определяться экспоненциальной зависимостью (так как это система  
скалярных уравнений). Поскольку x(t) является вектором, то решение  
в общем виде может быть записано как  
x (t) = eλ tz . (П 2.12)  
Обязательным условием является следующее: при решении всех  
скалярных уравнений, входящих в векторно-матричное уравнение,  
показатель λ один и тот же (т.е. одно и то же значение λ одновре-  
менно для всех уравнений). Таким образом, множитель eλ t будет  
являться общим для всех уравнений. Подставляя eλ tz в векторно-  
матричное уравнение, записываем равенство  
λ eλ tz = Aeλ tz. (П 2.13)  
Сокращая множитель eλ t , записываем основное уравнение отно-  
сительно значения λ и вектора z  
λ z = A z. (П2.14)  
Параметр λ называется собственным значением (характеристи-  
ческим числом), а вектор z – собственным вектором (обозначение  
вектора может быть произвольным). Данное уравнение является не-  
линейным, поскольку оно содержит произведение неизвестных λ и z .  
86  
В том случае, когда мы знаем число λ , то уравнение относитель-  
но z становится линейным и можно записать  
(A − λ I) z = 0. (П 2.15)  
Очевидно, что собственный вектор z находится в нулевом про-  
странстве матрицы ( )A − λ I , которая для данного примера имеет вид  
( )   
  
  
− − λ  
− λ −  
− λ =  
2 3  
4 5  
A I . (П 2.16)  
Причём интерес представляет только те значения λ , для которых  
имеется ненулевой собственный вектор z . Запишем ключевое опреде-  
ление собственного значения матрицы: число λ является собствен-  
ным значением матрицы A с соответствующим ненулевым  
собственным вектором тогда и только тогда, когда характеристи-  
ческое уравнение для матрицы A det (A − λ I) = 0 .  
Характеристическое уравнение может быть записано в виде ха-  
рактеристического полинома – алгебраического уравнения, содержа-  
щего в качестве слагаемых элементы с параметром λ в степени  
от 0 до n . Максимальное значение степени λ определяется порядком  
матрицы. В результате решения такого уравнения определяются соб-  
ственные значения матрицы.  
Для рассмотренного примера характеристический полином  
− λ  
− λ −  
2 3  
4 5  
det =λ 2 − λ − 2 . (П 2.17)  
Таким образом, данная матрица A имеет два различных собст-  
венных значения: λ 1= −1, λ 2= 2 . Каждому из этих значений соответ-  
ствует пространство собственных векторов, удовлетворяющих  
уравнению λ z = Az . (П 2.18)  
Вычислим собственные векторы для каждого λ 1, λ 2.  
1.  
λ 1= − ( )  
  
  
−  
− λ =  
2 2  
5 5  
A 1I z   
  
  
=  
0  
z . (П2.19)  
87  
Решением этого уравнения является любой вектор, кратный  
1  
z 1= ; (П 2.20)  
2  
λ 1= .  
( )   
  
  
 =  
  
  
−  
− λ =  
0  
2 5  
2 5  
A 2I z z . (П 2.21)  
Решением этого уравнения является любой вектор, кратный  
  
  
=  
52  
z 2 . (П 2.22)  
Возвратимся к дифференциальному уравнению x( )t = eλ tz .  
Соответственно для пар ( )λ 1, z1 и (λ 2, z2 ) можно записать два реше-  
ния в виде экспоненты (частные решения, при которых не выполня-  
ются начальные условия)  
( )   
  
  
= =  
λ −  
1  
x t e 1tz1 e t ; ( )   
  
  
= =  
λ  
52  
2 t 2t  
x t e e . (П 2.23)  
Кроме того, каждое из этих решений не может быть однозначным  
решением вследствие множества собственных векторов, кратных z1   
и z2 .  
Поскольку исходное уравнение является линейным и однород-  
ным, оно допускает суперпозицию данных решений, т.е. любая ком-  
бинация двух его частных решений вновь будет его решением (более  
общим решением):  
x ( )t = c1eλ 1tz1 + c2eλ 2tz2 . (П 2.24)  
В данное уравнение входят два произвольных параметра  
( c1 и c2 ). Очевидно, что при их выборе должны удовлетворяться на-  
чальные условия x0 при t = 0 , т.е.  
x0 = c1z1 + c2z2 (П 2.25)  
88  
или   
  
  
1 2  
1 5  
  
  
 =  
  
  
85  
12  
cc  
. (П2.26)  
Уравнения (П 2.25) и (П 2.26) позволяют получить c1 = 3 и c2 = 1   
и записать результирующее решение исходного векторно-матричного  
уравнения (исходной системы уравнений):  
( )   
  
  
 +  
  
  
=  
−  
52  
1  
x t 2e t e2t . (П2.27)  
Запишем отдельно каждую компоненту вектора x(t):  
x1 (t) = 3e−t + 5e2t ; (П2.28)  
x2 (t) = 3e−t + 2e2t .  
Начальные условия по данным уравнениям проверяются доста-  
точно просто, путём подстановки t = 0 .  
Собственные векторы и собственные значения используются  
не только для определения решения дифференциального уравнения.  
Они приобретают особую важность при оценке свойств экономиче-  
ской системы, представленной математической моделью в виде век-  
торно-матричного дифференциального уравнения. К свойствам  
экономической системы можно отнести, например, устойчивость  
протекающих в них процессов или выявление определённых  
колебаний рынка для получения максимальной прибыли.  
Собственные значения и собственные векторы появляются  
естественно и автоматически при решении дифференциального ли-  
нейного уравнения вида  
x(t) = Ax(t). (П2.29)  
Такое уравнение имеет частное экспоненциальное решение,  
в котором собственное значение дает скорость, с которой растёт  
или убывает собственный вектор. Другие решения будут комбина-  
циями этих частных решений, составленными таким образом,  
чтобы удовлетворялись начальные условия. Основным уравнением  
для получения такого решения является λz = Az . Однако большая  
часть векторов z не будет удовлетворять такому уравнению, незави-  
симо от того, является ли λ собственным значением или нет. Обычно  
вектор z меняет направление после умножения на A , так что вектор  
Az в большинстве случаев не будет кратным z . Это означает,  
89  
что только специальные числа λ являются собственными значения-  
ми и только специальные векторы являются собственными вектора-  
ми. Разумеется, если A кратна единичной матрице, то ни один  
из векторов не будет изменять своего направления и все они будут  
собственными. Но в обычном случае собственных векторов мало  
и они направлены в разные стороны. В теории управления использу-  
ется следующее объяснение применимости собственных векторов:  
собственные векторы сравниваются с «гармониками» (модами) систе-  
мы уравнений (или системы управления, которая записывается этими  
уравнениями). Поскольку собственные векторы независимы друг  
от друга, можно наблюдать поведение каждого вектора в отдельности,  
а затем комбинировать эти «гармоники» для отыскания итогового ре-  
шения, удовлетворяющего некоторым граничным условиям (обычно  
начальным условиям). Используя специально сконструированную  
матрицу из собственных векторов – модальную матрицу, можно диа-  
гонализировать исходную матрицу. Этот приём широко используется  
в различных экономических и технических задачах. Запишем условия,  
при которых параметр λ будет собственным значением для матрицы  
A :  
1. Существует ненулевой вектор, обеспечивающий равенство  
A z = λ z; матрица ( )A − λ I вырождена. Для определения вырожденно-  
сти матрицы вычисляется ее определитель. Этот определитель есть  
многочлен от λ степени n , называемый характеристическим много-  
членом матрицы A . Уравнение det (A − λ I)= 0 есть характеристиче-  
ское уравнение, и его корни λ 1, ... λ n (которые могут быть, а могут  
и не быть вещественными числами и среди которых могут оказаться  
или не оказаться совпадающие корни) являются собственными значе-  
ниями матрицы A .  
2. Характеристический полином det (A − λ I) = 0.  
При небольшой размерности матрицы, для которой вычисляются  
собственные значения, записать характеристический многочлен  
не представляет трудности. В случае большого порядка матрицы A  
для записи характеристического многочлена используется алгоритм  
Бохера.  
П.2.3. Общее решение дифференциальных матричных уравнений  
При исследовании многомерных процессов в экономических сис-  
темах математические модели обычно записываются в виде векторно-  
матричных уравнений и целесообразно использовать теорию матриц.  
90  
Аналогично, как и в скалярном случае, решение однородного матрич-  
ного дифференциального уравнения записывается в виде матричной  
экспоненты. Например, x(t) = A x(t) с начальными условиями  
при t = 0, x( )t = 0 = x0 , где x(t)− n - мерный вектор; A − n × n матрица.  
Очевидно, что решение этого уравнения можно записать в виде  
x(t) = (e A t )x0 . (П2.30)  
Одним из вариантов приближенного решения этого уравнения  
является разложение e A tв ряд  
e A t = I + A t + (2!)−1(At)2 +K . (П2.31)  
Рассмотрим вариант более точного решения на примере. Допустим  
матрица A равна  
  
  
−  
−  
=  
1 2  
2 1  
A . (П2.32)  
Прежде всего мы определим собственные значения λ 1, λ 2   
и собственные векторы z 1, z2 и запишем:  
( )   
  
  
 = −  
  
  
= λ =  
1  
1  
1  
Az1 1z1 A ; (П2.33)  
( )  
  
  
−  
= −  
  
  
−  
= λ =  
1  
1  
3  
1  
1  
Az2 2z 2 A . (П2.34)  
Наилучший способ – это записать общее решение и согласовать  
его с начальными условиями:  
( )   
  
  
−  
 +  
  
  
= λ + λ = − −  
1  
1  
1  
3  
1 1 2 2 1 2  
1 t 2 t t t  
x t c e z c e z c e c e ; (П2.35)  
  
  
  
  
−  
 =  
  
  
= + =  
12  
12  
0 1 1 2 2  
1 1  
1 1  
cc  
cc  
x c z c z s ,  
(П2.36)  
где матрица S составлена из собственных векторов z1 и z2 .  
91  
Из последнего уравнения можно записать вектор (из коэффици-  
ентов c1, c2 : )  
0  
1  
12  
S x  
cc  
−  
 =  
  
  
. (П2.37)  
Тогда в матричной форме общее решение x(t) записывается  
( ) 3 1 0 1 0  
12  
3  
0  
0  
0  
0  
1 1  
1 1  
S x Se S x  
e  
e  
S  
cc  
e  
e  
x t t  
t  
t  
t  
t  
− Λ −  
−  
−  
−  
−  
=  
  
  
  
  
 =  
  
  
  
  
  
  
  
  
−  
= .  
(П2.38)  
В результате основной формулой для решения векторно-  
матричного однородного дифференциального уравнения будет  
следующее уравнение:  
x(t) = SeΛ tS−1 x0 . (П2.39)  
В итоге имеем разные уравнения, позволяющие решить исходное  
дифференциальное уравнение. Докажем равенство правых частей  
данного уравнения и уравнения  
x(t) = e A t x0 (П2.40)  
Т.е. необходимо доказать равенство  
t A t  
SeΛ S−1 = e . (П2.41)  
Рассмотрим первоначально матричный экспотенциал и его раз-  
ложение в ряд  
e A t = I + At + (2!)−1(At)2 +K . (П2.42)  
Производная матричного экспоненциала равна  
A t A(I At ( ) ( )At ) Ae A t  
dt  
de  
= + + 2! −1 2 +K = . ( П2.43)  
92  
Таким образом, подтверждается, что выражение (e At x0 ) является  
решением дифференциального уравнения при условии  
t = 0 × ( )t = 0 = x0 и оно удовлетворяет уравнению  
0  
0  
Ae x  
dt  
de A t x A t  
= (П2.44)  
(в левой части уравнения – производная от матричной экспоненты  
равна Ae A t и в правой – производная от бесконечного ряда равна  
тому же выражению).  
В соответствии с известным уравнением A = SΛS−1 можно  
записать  
Ak = (SΛS−1 )(SΛS−1 )K (SΛS−1 )= SΛkS−1 . (П2.45)  
Поэтому бесконечный ряд для матричной экспоненты принимает  
вид (с учётом равенства I = SS−1 )  
e A t=I+ SΛS \_1t+( )2! −1SΛ2S−1t2+K S(I+Λt+(2!)−1Λ2t2+...)S−1=SeΛ tS−1 .  
(П2.46)  
Окончательно можно сделать следующее заключение: если мат-  
рица A приводится к диагональному виду A = SΛS−1 , то дифферен-  
циальное уравнение d x / dt = Ax имеет решение  
x( )t = e A t x0 = SeΛ tS−1 x0 . (П2.47)  
Столбцы матрицы S являются собственными векторами матрицы  
A , так что  
( ) [ ][ ] [ ]  
  
  
=  
λ  
λ −  
λ  
λ  
nt  
n t  
t  
t Контрольное задание № 1

I. Определить скорость изменения запасов продукции и интенсивности производства в функции непрерывного времени при определённых условиях взаимодействия процессов производстваи формирования запасов продукции. При выполнении задания целесообразно использовать следующие обозначения:  
x 1(t) – скорость изменения запасов продукции, руб./час.;  
x 2(t) – интенсивность производства (скорость выпуска продукции),руб./час.  
Процессы производства и создания запасов продукции представляются дифференциальными уравнениями:  
 **X / 1(t) = a X1(t)− b X1(t),  
 X/ 2(t) = cX1(t)− dX2(t),** (П.4.1)  
где a , c - безразмерные величины; b , d – коэффициенты, имеющие размерность времени. Для данной задачи a = 0,6; b = 0,4 час; c = 0,8; d =0,2 час.  
Результатом выполнения I раздела задания является:  
1. Представить систему дифференциальных уравнений (П.4.1) в виде векторно-матричного уравнения:  
 ***X(t) = A X(t),*** (П.4.2)  
где A – матрица соответствующей размерности.

2. Записать решение уравнения (П.4.2).  
Общее решение уравнения (П.4.2) может быть записано в виде векторного уравнения  
 ***X(t) = c1e λ 1t z1 + c2eλ 2 t z2*** , (П.4.3)  
где c1 , c2 – постоянные интегрирования; λ 1,λ 2 - собственные значения (характеристические числа) матрицы A ; z1, z2 - собственные векторы (характеристические векторы) матрицы A .  
Для вычисления собственных значений λ 1,λ 2 матрицы A необходимо решить характеристическое уравнение  
 ***det(A − Iλ ) = 0*** . (П.4.4)  
Собственные векторы определяются из уравнений  
  
 ***A z 1 = z1 λ1;*** (П.4.5)  
 ***A z2 = z2 λ2***.  
  
Постоянные интегрирования c1 , c2 определяются из уравнения (П.4.3) при равенстве t = t0 = 0 и соответствующих начальных значениях X(t0) = 0 = X0 .

Для данной задачи X10 = 6 руб./час; X20 = 4 руб./час.  
Таким образом, векторное уравнение (П.4.3) записывается в виде системы скалярных уравнений

***X***1 ***(t) = c1e λ 1t z****1****1 + c2eλ 2 t z2***1

***X***2 ***(t) = c1e λ 1t z1***2***+ c2eλ 2 t z2***2  (П.4.6)  
3. После необходимых вычислений построить зависимости (П.4.6) в графическом виде при изменении непрерывного времени от *t0* = 0 до *t* = 1 час.  
**II.** Определить скорость изменения запасов продукции и интенсивности производства в функции дискретного времени.  
Для записи дискретного уравнения взаимосвязанных процессов производства и формирования запасов использовать уравнение (П.4.2), в котором производная dX(t)/ dt представляется отношением ∆X (*t) / ∆ t.* При решении данной задачи интервал ∆t дискретности принимается равным значению 0,1 час.  
Результатом выполнения II раздела задания является:  
1. Запись последовательности дискретных уравнений вида

***Xk+1 = BXk*** (П.4.7)  
при изменении ***k*** от 0 до 10.  
2. Построение зависимости ***X1k , X2k*** в графическом виде при изменении ***k*** от 0 до 10 на одном рисунке с зависимостями ***X1 (t), X2 (t ).***  
3. Предоставление комментария о возможности аппроксимации непрерывных функций (П.4.6) дискретными функциями (П.4.7).  
**Примечание**. Обязательными условиями при решении задачи являются:  
- значение интенсивности производства должно быть больше или равным значению скорости изменения запасов продукции;  
- начальные значения интенсивности производства и скорости изменения запасов продукции не равны нулю.