Приложение 2

**Решения линейных дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши**

Что представляют собой собственные значения и для чего они служат? Одно из применений собственных значений связано с решением системы обыкновенных скалярных дифференциальных уравнений (уравнений в форме Коши). Система таких уравнений обычно записывается в векторно-матричной форме. При этом достаточно уметь дифференцировать функции типа xn , sin x, ex.

**П.2.1. Решение скалярного дифференциального уравнения**

Прежде чем рассматривать вычислительные алгоритмы матричных дифференциальных уравнений решим достаточно простую задачу. Очевидно, что производственный процесс с неограниченными запасами сырья и оборудования, трудовыми и финансовыми ресурса-
ми может быть представлен скалярным дифференциальным уравнением вида

 ***x(t) = ax(t). (П 2.1)***

Предполагается, что при начальном состоянии t = t0 x (t) = t0 = x0 (возможен частный случай t0 = 0 ). В данном уравнении приняты следующие обозначения: x(t)– выпуск продукции в единицу времени (интенсивность производства); a – некоторый параметр, значения которого могут быть действительными и комплексными (присутствует
вещественная и мнимая части) числами. В данном случае размерность параметра a равна 1/сек.
Замечание. Этап записи уравнений математической модели должен завершаться проверкой размерностей слагаемых справа и слева от знака равенства.

Решение такого уравнения осуществляется следующим образом.
Записывается исходное уравнение в виде

 ***dx (t) / x (t )= a d t*** . (П 2.2)
Интегрируем правую часть уравнения в пределах от x0 до xN(t) (при этом полагаем, что xN(t) ≠ 0) , а левую часть – от t0 = 0 t0 = 0 до t . В результате запишем

 xN(t) t
ln x(t) = a t ; (П 2.3)
 0
 x0

ln x (t) − ln x0 = a t − 0 или, ln (x (t)/ x0 ) = a t или (x(t)/ x0 ) = ea t .
Окончательно решение исходного уравнения записывается в виде

 x (t) = x0 ea t . (П 2.4)

Поведение *x (t)* в данном уравнении зависит от значений и знака параметра а. Допустим, имеем действительное число, которое может быть равно нулю, больше или меньше нуля.
1. a = 0 ; x (t) = x0 . С точки зрения развития или устойчивости процессы протекают с нулевой скоростью.
2. a > 0. x(t) = x0ea t . Происходит возрастание x(t) по экспоненте из заданного начального состояния x0 . Процесс развивается с определённой скоростью на некотором интервале времени или процесс является неустойчивым:
 x (t) → ∞ при t → ∞. (П 2.5)
3. a > 0. x (t) = x0e−at . Происходит уменьшение (снижение) x(t) по экспоненте из заданного начального состояния. Процесс развивается с определённой скоростью на некотором интервале времени или процесс является устойчивым: x (t) → 0 при t → ∞.
 В экономике существуют и другие формы процессов, в частности колебательные. Например, изменение курсов валют, стоимости акций и т.д. Такие процессы включают, как минимум, две составляющие – гармоническую составляющую и экспоненциальную. Причём параметры гармонической составляющей обычно неизвестны.
 Рассмотрим вариант, когда параметр a является комплексным числом, т.е. a = α ± jβ . Решение дифференциального уравнения будет иметь вид

 x (t) = x0e(α± jβ)t = x0eα te± jβ t . (П 2.6)

При этом вещественное значение α может быть равно, больше или меньше нуля и определяет скорость изменения экспоненциальной составляющей x(t). Мнимая часть (± jβ) определяет осциллирующую (переменную) составляющую

 e± jβ t = cos β t ± jsinβ t. (П 2.7)

Более сложные задачи в математическом отношении возникают при решении векторно-матричных уравнений, описывающих взаимосвязанные экономические объекты или системы.

**П.2.2. Решение системы двух дифференциальных уравнений**

Рассмотрим модель взаимосвязанных производственных процессов в виде двух дифференциальных уравнений

 •x1( ) ( ) ( )t = 4 x1 t − 5 x2 t

,
x2 ( ) ( ) ( )t = 2 x1 t − 3 x2 t
•
, (П 2.8)
где x1 ( )t – скорость изменения объёма запасов материальных ре-
сурсов, необходимых для выпуска продукции; x2 (t) – объём выпуска
продукции в единицу времени (интенсивность производства). Заданы
начальные условия для уравнений в момент времени t = 0 :
x1 ( )t = 0 = x10 = 8; x2 (t = 0) = x20 = 5. (П 2.9)
В векторно-матричной форме данная система уравнений записы-
вается в виде
x ( )t = A x (t;), x (t = 0) = x0 , (П 2.10)
85
где xT( ) ( )t = [ ]x1 t , x2(t) ; x0T = [x10, x20] = [8, 5]; (П 2.11)


−
=
2 3
4 5
A .
Уравнение (П 2.10) имеет первый порядок, поскольку производ-
ные более высокого порядка отсутствуют, и оно является линейным
относительно искомой функции.
Анализируя исходные данные, заключаем, что решение задано
лишь в момент времени t = 0 . Необходимо определить решение
в любой другой момент времени. При этом необходимо учитывать,
что решение векторно-матричного уравнения изменяется во времени
от заданных начальных значений. По аналогии с решением скалярно-
го уравнения решение векторно-матричного уравнения будет
определяться экспоненциальной зависимостью (так как это система
скалярных уравнений). Поскольку x(t) является вектором, то решение
в общем виде может быть записано как
x (t) = eλ tz . (П 2.12)
Обязательным условием является следующее: при решении всех
скалярных уравнений, входящих в векторно-матричное уравнение,
показатель λ один и тот же (т.е. одно и то же значение λ одновре-
менно для всех уравнений). Таким образом, множитель eλ t будет
являться общим для всех уравнений. Подставляя eλ tz в векторно-
матричное уравнение, записываем равенство
λ eλ tz = Aeλ tz. (П 2.13)
Сокращая множитель eλ t , записываем основное уравнение отно-
сительно значения λ и вектора z
λ z = A z. (П2.14)
Параметр λ называется собственным значением (характеристи-
ческим числом), а вектор z – собственным вектором (обозначение
вектора может быть произвольным). Данное уравнение является не-
линейным, поскольку оно содержит произведение неизвестных λ и z .
86
В том случае, когда мы знаем число λ , то уравнение относитель-
но z становится линейным и можно записать
(A − λ I) z = 0. (П 2.15)
Очевидно, что собственный вектор z находится в нулевом про-
странстве матрицы ( )A − λ I , которая для данного примера имеет вид
( ) 


− − λ
− λ −
− λ =
2 3
4 5
A I . (П 2.16)
Причём интерес представляет только те значения λ , для которых
имеется ненулевой собственный вектор z . Запишем ключевое опреде-
ление собственного значения матрицы: число λ является собствен-
ным значением матрицы A с соответствующим ненулевым
собственным вектором тогда и только тогда, когда характеристи-
ческое уравнение для матрицы A det (A − λ I) = 0 .
Характеристическое уравнение может быть записано в виде ха-
рактеристического полинома – алгебраического уравнения, содержа-
щего в качестве слагаемых элементы с параметром λ в степени
от 0 до n . Максимальное значение степени λ определяется порядком
матрицы. В результате решения такого уравнения определяются соб-
ственные значения матрицы.
Для рассмотренного примера характеристический полином
− λ
− λ −
2 3
4 5
det =λ 2 − λ − 2 . (П 2.17)
Таким образом, данная матрица A имеет два различных собст-
венных значения: λ 1= −1, λ 2= 2 . Каждому из этих значений соответ-
ствует пространство собственных векторов, удовлетворяющих
уравнению λ z = Az . (П 2.18)
Вычислим собственные векторы для каждого λ 1, λ 2.
1.
λ 1= − ( )


−
− λ =
2 2
5 5
A 1I z


=
0
z . (П2.19)
87
Решением этого уравнения является любой вектор, кратный
1
z 1= ; (П 2.20)
2
λ 1= .
( ) 


 =


−
− λ =
0
2 5
2 5
A 2I z z . (П 2.21)
Решением этого уравнения является любой вектор, кратный


=
52
z 2 . (П 2.22)
Возвратимся к дифференциальному уравнению x( )t = eλ tz .
Соответственно для пар ( )λ 1, z1 и (λ 2, z2 ) можно записать два реше-
ния в виде экспоненты (частные решения, при которых не выполня-
ются начальные условия)
( ) 


= =
λ −
1
x t e 1tz1 e t ; ( ) 


= =
λ
52
2 t 2t
x t e e . (П 2.23)
Кроме того, каждое из этих решений не может быть однозначным
решением вследствие множества собственных векторов, кратных z1
и z2 .
Поскольку исходное уравнение является линейным и однород-
ным, оно допускает суперпозицию данных решений, т.е. любая ком-
бинация двух его частных решений вновь будет его решением (более
общим решением):
x ( )t = c1eλ 1tz1 + c2eλ 2tz2 . (П 2.24)
В данное уравнение входят два произвольных параметра
( c1 и c2 ). Очевидно, что при их выборе должны удовлетворяться на-
чальные условия x0 при t = 0 , т.е.
x0 = c1z1 + c2z2 (П 2.25)
88
или 


1 2
1 5


 =


85
12
cc
. (П2.26)
Уравнения (П 2.25) и (П 2.26) позволяют получить c1 = 3 и c2 = 1
и записать результирующее решение исходного векторно-матричного
уравнения (исходной системы уравнений):
( ) 


 +


=
−
52
1
x t 2e t e2t . (П2.27)
Запишем отдельно каждую компоненту вектора x(t):
x1 (t) = 3e−t + 5e2t ; (П2.28)
x2 (t) = 3e−t + 2e2t .
Начальные условия по данным уравнениям проверяются доста-
точно просто, путём подстановки t = 0 .
Собственные векторы и собственные значения используются
не только для определения решения дифференциального уравнения.
Они приобретают особую важность при оценке свойств экономиче-
ской системы, представленной математической моделью в виде век-
торно-матричного дифференциального уравнения. К свойствам
экономической системы можно отнести, например, устойчивость
протекающих в них процессов или выявление определённых
колебаний рынка для получения максимальной прибыли.
Собственные значения и собственные векторы появляются
естественно и автоматически при решении дифференциального ли-
нейного уравнения вида
x(t) = Ax(t). (П2.29)
Такое уравнение имеет частное экспоненциальное решение,
в котором собственное значение дает скорость, с которой растёт
или убывает собственный вектор. Другие решения будут комбина-
циями этих частных решений, составленными таким образом,
чтобы удовлетворялись начальные условия. Основным уравнением
для получения такого решения является λz = Az . Однако большая
часть векторов z не будет удовлетворять такому уравнению, незави-
симо от того, является ли λ собственным значением или нет. Обычно
вектор z меняет направление после умножения на A , так что вектор
Az в большинстве случаев не будет кратным z . Это означает,
89
что только специальные числа λ являются собственными значения-
ми и только специальные векторы являются собственными вектора-
ми. Разумеется, если A кратна единичной матрице, то ни один
из векторов не будет изменять своего направления и все они будут
собственными. Но в обычном случае собственных векторов мало
и они направлены в разные стороны. В теории управления использу-
ется следующее объяснение применимости собственных векторов:
собственные векторы сравниваются с «гармониками» (модами) систе-
мы уравнений (или системы управления, которая записывается этими
уравнениями). Поскольку собственные векторы независимы друг
от друга, можно наблюдать поведение каждого вектора в отдельности,
а затем комбинировать эти «гармоники» для отыскания итогового ре-
шения, удовлетворяющего некоторым граничным условиям (обычно
начальным условиям). Используя специально сконструированную
матрицу из собственных векторов – модальную матрицу, можно диа-
гонализировать исходную матрицу. Этот приём широко используется
в различных экономических и технических задачах. Запишем условия,
при которых параметр λ будет собственным значением для матрицы
A :
1. Существует ненулевой вектор, обеспечивающий равенство
A z = λ z; матрица ( )A − λ I вырождена. Для определения вырожденно-
сти матрицы вычисляется ее определитель. Этот определитель есть
многочлен от λ степени n , называемый характеристическим много-
членом матрицы A . Уравнение det (A − λ I)= 0 есть характеристиче-
ское уравнение, и его корни λ 1, ... λ n (которые могут быть, а могут
и не быть вещественными числами и среди которых могут оказаться
или не оказаться совпадающие корни) являются собственными значе-
ниями матрицы A .
2. Характеристический полином det (A − λ I) = 0.
При небольшой размерности матрицы, для которой вычисляются
собственные значения, записать характеристический многочлен
не представляет трудности. В случае большого порядка матрицы A
для записи характеристического многочлена используется алгоритм
Бохера.
П.2.3. Общее решение дифференциальных матричных уравнений
При исследовании многомерных процессов в экономических сис-
темах математические модели обычно записываются в виде векторно-
матричных уравнений и целесообразно использовать теорию матриц.
90
Аналогично, как и в скалярном случае, решение однородного матрич-
ного дифференциального уравнения записывается в виде матричной
экспоненты. Например, x(t) = A x(t) с начальными условиями
при t = 0, x( )t = 0 = x0 , где x(t)− n - мерный вектор; A − n × n матрица.
Очевидно, что решение этого уравнения можно записать в виде
x(t) = (e A t )x0 . (П2.30)
Одним из вариантов приближенного решения этого уравнения
является разложение e A tв ряд
e A t = I + A t + (2!)−1(At)2 +K . (П2.31)
Рассмотрим вариант более точного решения на примере. Допустим
матрица A равна


−
−
=
1 2
2 1
A . (П2.32)
Прежде всего мы определим собственные значения λ 1, λ 2
и собственные векторы z 1, z2 и запишем:
( ) 


 = −


= λ =
1
1
1
Az1 1z1 A ; (П2.33)
( )


−
= −


−
= λ =
1
1
3
1
1
Az2 2z 2 A . (П2.34)
Наилучший способ – это записать общее решение и согласовать
его с начальными условиями:
( ) 


−
 +


= λ + λ = − −
1
1
1
3
1 1 2 2 1 2
1 t 2 t t t
x t c e z c e z c e c e ; (П2.35)




−
 =


= + =
12
12
0 1 1 2 2
1 1
1 1
cc
cc
x c z c z s ,
(П2.36)
где матрица S составлена из собственных векторов z1 и z2 .
91
Из последнего уравнения можно записать вектор (из коэффици-
ентов c1, c2 : )
0
1
12
S x
cc
−
 =


. (П2.37)
Тогда в матричной форме общее решение x(t) записывается
( ) 3 1 0 1 0
12
3
0
0
0
0
1 1
1 1
S x Se S x
e
e
S
cc
e
e
x t t
t
t
t
t
− Λ −
−
−
−
−
=




 =








−
= .
(П2.38)
В результате основной формулой для решения векторно-
матричного однородного дифференциального уравнения будет
следующее уравнение:
x(t) = SeΛ tS−1 x0 . (П2.39)
В итоге имеем разные уравнения, позволяющие решить исходное
дифференциальное уравнение. Докажем равенство правых частей
данного уравнения и уравнения
x(t) = e A t x0 (П2.40)
Т.е. необходимо доказать равенство
t A t
SeΛ S−1 = e . (П2.41)
Рассмотрим первоначально матричный экспотенциал и его раз-
ложение в ряд
e A t = I + At + (2!)−1(At)2 +K . (П2.42)
Производная матричного экспоненциала равна
A t A(I At ( ) ( )At ) Ae A t
dt
de
= + + 2! −1 2 +K = . ( П2.43)
92
Таким образом, подтверждается, что выражение (e At x0 ) является
решением дифференциального уравнения при условии
t = 0 × ( )t = 0 = x0 и оно удовлетворяет уравнению
0
0
Ae x
dt
de A t x A t
= (П2.44)
(в левой части уравнения – производная от матричной экспоненты
равна Ae A t и в правой – производная от бесконечного ряда равна
тому же выражению).
В соответствии с известным уравнением A = SΛS−1 можно
записать
Ak = (SΛS−1 )(SΛS−1 )K (SΛS−1 )= SΛkS−1 . (П2.45)
Поэтому бесконечный ряд для матричной экспоненты принимает
вид (с учётом равенства I = SS−1 )
e A t=I+ SΛS \_1t+( )2! −1SΛ2S−1t2+K S(I+Λt+(2!)−1Λ2t2+...)S−1=SeΛ tS−1 .
(П2.46)
Окончательно можно сделать следующее заключение: если мат-
рица A приводится к диагональному виду A = SΛS−1 , то дифферен-
циальное уравнение d x / dt = Ax имеет решение
x( )t = e A t x0 = SeΛ tS−1 x0 . (П2.47)
Столбцы матрицы S являются собственными векторами матрицы
A , так что
( ) [ ][ ] [ ]


=
λ
λ −
λ
λ
nt
n t
t
t Контрольное задание № 1

I. Определить скорость изменения запасов продукции и интенсивности производства в функции непрерывного времени при определённых условиях взаимодействия процессов производстваи формирования запасов продукции. При выполнении задания целесообразно использовать следующие обозначения:
x 1(t) – скорость изменения запасов продукции, руб./час.;
x 2(t) – интенсивность производства (скорость выпуска продукции),руб./час.
Процессы производства и создания запасов продукции представляются дифференциальными уравнениями:
 **X / 1(t) = a X1(t)− b X1(t),
 X/ 2(t) = cX1(t)− dX2(t),** (П.4.1)
где a , c - безразмерные величины; b , d – коэффициенты, имеющие размерность времени. Для данной задачи a = 0,6; b = 0,4 час; c = 0,8; d =0,2 час.
Результатом выполнения I раздела задания является:
1. Представить систему дифференциальных уравнений (П.4.1) в виде векторно-матричного уравнения:
 ***X(t) = A X(t),*** (П.4.2)
где A – матрица соответствующей размерности.

2. Записать решение уравнения (П.4.2).
Общее решение уравнения (П.4.2) может быть записано в виде векторного уравнения
 ***X(t) = c1e λ 1t z1 + c2eλ 2 t z2*** , (П.4.3)
где c1 , c2 – постоянные интегрирования; λ 1,λ 2 - собственные значения (характеристические числа) матрицы A ; z1, z2 - собственные векторы (характеристические векторы) матрицы A .
Для вычисления собственных значений λ 1,λ 2 матрицы A необходимо решить характеристическое уравнение
 ***det(A − Iλ ) = 0*** . (П.4.4)
Собственные векторы определяются из уравнений

 ***A z 1 = z1 λ1;*** (П.4.5)
 ***A z2 = z2 λ2***.

Постоянные интегрирования c1 , c2 определяются из уравнения (П.4.3) при равенстве t = t0 = 0 и соответствующих начальных значениях X(t0) = 0 = X0 .

Для данной задачи X10 = 6 руб./час; X20 = 4 руб./час.
Таким образом, векторное уравнение (П.4.3) записывается в виде системы скалярных уравнений

 ***X***1 ***(t) = c1e λ 1t z****1****1 + c2eλ 2 t z2***1

***X***2 ***(t) = c1e λ 1t z1***2***+ c2eλ 2 t z2***2  (П.4.6)
3. После необходимых вычислений построить зависимости (П.4.6) в графическом виде при изменении непрерывного времени от *t0* = 0 до *t* = 1 час.
**II.** Определить скорость изменения запасов продукции и интенсивности производства в функции дискретного времени.
Для записи дискретного уравнения взаимосвязанных процессов производства и формирования запасов использовать уравнение (П.4.2), в котором производная dX(t)/ dt представляется отношением ∆X (*t) / ∆ t.* При решении данной задачи интервал ∆t дискретности принимается равным значению 0,1 час.
Результатом выполнения II раздела задания является:
1. Запись последовательности дискретных уравнений вида

 ***Xk+1 = BXk*** (П.4.7)
при изменении ***k*** от 0 до 10.
2. Построение зависимости ***X1k , X2k*** в графическом виде при изменении ***k*** от 0 до 10 на одном рисунке с зависимостями ***X1 (t), X2 (t ).***
3. Предоставление комментария о возможности аппроксимации непрерывных функций (П.4.6) дискретными функциями (П.4.7).
**Примечание**. Обязательными условиями при решении задачи являются:
- значение интенсивности производства должно быть больше или равным значению скорости изменения запасов продукции;
- начальные значения интенсивности производства и скорости изменения запасов продукции не равны нулю.