В.А. Емеличев,
Ю.В. Степанишина
БГУ (Минск)

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, $m \geq 2$, $T \subseteq 2^E \setminus \emptyset$, $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, $n \geq 2$. Постановка n-критериальной (векторной) линейной комбинаторной задачи, которую принято называть траекторной, предполагает задание на множестве траекторий T векторного критерия:

$$f(t,A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_n(t, A)),$$

частными критериями которого являются линейные функционалы:

$$\text{MINSUM} \qquad f_i(t,A) = \sum_{j\in N(t)} a_{ij} \to \min_{t\in T}, \quad i \in N_n,$$

где $N(t) = \{ j \in N_m / e_j \in t\}$, $N_n = \{1,2, ..., n\}$.

Механизм выбора оптимального (в том или ином смысле) решения такой задачи обычно основан на использовании бинарных отношений, отражающих ''предпочтительность'' одних траекторий другим. В свою очередь, всякое бинарное отношение порождает некий принцип оптимальности (в другой терминологии — функцию выбора).

Зададим принцип оптимальности путем введения целочисленного параметра s, изменяющегося от 1 до $n-1$. *При этом крайним значениям параметра* s соответствуют такие широко известные принципы оптимальности, как мажоритарный (при $s = 1$) и паретовский (при $s = n - 1$). *Тем самым, в данном контексте под параметризацией принципа оптимальности понимается введение такой характеристики бинарного отношения предпочтения, которая компенсирует дефект "большого шага".*

Для всякого числа $s \in N_{n-1}$ на множестве траекторий T зададим следующее бинарное отношение предпочтения между траекториями:

$$t' \prec_s t \Leftrightarrow [t, t', A]_+ > s\, [t, t', A]_- ,$$

где

$$[t, t', A]_+ = |\{i \in N_n / \tau_i(t, t', A) < 0\}|,$$

$$[t, t', A]_- = |\{i \in N_n / \tau_i(t, t', A) > 0\}|,$$

$$\tau_i(t, t', A) = f_i(t, A) - f_i(t', A).$$

Тем самым, траектория t' предпочтительнее траектории t по бинарному отношению $\prec_s$ в том и только в том случае, когда число компонент, по которым вектор $f(t', A)$ "лучше" вектора $f(t, A)$, более чем в s раз превосходит число компонент, по которым $f(t, A)$ "лучше" $f(t', A)$.

Далее для всякого индекса $s \in N_{n-1}$ введем множество s-эффективных траекторий , полагая по определению:

$$T_s^n(A) = \{t \in T / \Omega_s(t, A) = \varnothing\},$$

где $\Omega_s(t, A) = \{t' \in T / t' \prec_s t\}$.

Ясно, что множество $T_1^n(A)$ 1-эффективных траекторий совпадает с множеством мажоритарно эффективных траекторий, которое определим традиционным образом:

$$M^n(A) = \{ t \in T / \Xi(t, A) = \varnothing\},$$

где $\Xi(t, A) = \{ t' \in T / \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sign} \tau_i(t, t', A) > 0\}$.

Очевидно, что множество $T_{n-1}^n(A)$ всех $(n - 1)$ *эффективных траекторий есть не что иное, как множество Парето, которое зададим следующим образом:*

$$P^n(A) = \{ t \in T / \Gamma(t, A) = \varnothing\},$$

где $\Gamma(t, A) = \{ t' \in T / f(t, A) \geq f(t', A),\ f(t, A) \neq f(t', A)\}$.

Будем исследовать устойчивость s-эффективной траектории $t \in T_n^s(A)$ к возмущению всех параметров векторного критерия $f(t, A)$ путем прибавления к матрице A возмущающих матриц множества:

$$\Re(e\ ) = \{B\in \mathrm{R}^{nm} / \| B \| \varepsilon\ \},$$

где $\varepsilon > 0$, $\| B \| = \max \{ | b_{ij} | / (i, j) \in N_n \cdot N_m \}$ — чебышевская норма (l_∞) матрицы $B = [b_{ij}]_{n\times m}$.

Для всякого числа $s \in N_{n\text{-}1}$ радиусом устойчивости траектории $t \in \mathrm{T}_n^s(\mathrm{A})$ назовем число

$$\rho_s^n(t, A) = \begin{cases} \sup \Theta(A), & \text{если } \Theta(A) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Theta(A) = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Theta\ (A) = \{\varepsilon > 0\text{: } \forall\ B \in \Re(e\ )\ (t \in T_n^s(A + B\ ))\}$.

Введем обозначения

$$\gamma_i\ (t,\ t',\ A) = -\frac{\tau_i(t,t',A)}{\Delta(t,t')},\ i \in N_{\mathrm{n}}\ ,\ \Delta\ (t,\ t'\ ) = |(t \setminus t') \cup (t' \setminus t)|.$$

Пусть $t \in T_n^s(A)$, $t' \neq t$, $t' \in T$. Все числа $\gamma_i\ (t,\ t',\ A)$, $i \in N_n$, упорядочим следующим образом:

$$\gamma_{p_1}(t,t',A) \geq \gamma_{p_2}(t,t',A) \geq \ldots \geq \gamma_{p_n}(t,t',A).$$

Для любого числа $s \in N_{\ n\text{-}1}$ положим:

$$\varphi_s^n(t,A) = \min_{t'\in T\setminus\{t\}} \gamma_{p_k}(t,t',A),$$

где $k = \left\lceil \frac{n}{s+1} \right\rceil$ — наименьшее целое число, большее либо равное $\frac{n}{s+1}$.

Теорема. При любых числах $n \geq 2$ *и* $s \in N_{\ n\text{-}1}$ для радиуса устойчивости всякой s-эффективной траектории $t \in T_s^n(A)$ справедлива формула

$$\rho_n^s(t,\ A) = \varphi_s^n(t,\ A).$$