

СКАЛЯРИЗАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть на множестве решений X произвольной природы задана вектор-функция

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow R^n, \quad n \geq 2,$$

компоненты которой — частные критерии, не исключая общности, будем считать минимизируемыми:

$$f_i(x) \rightarrow \min_{x \in X}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Под векторной дискретной задачей будем понимать задачу нахождения множества эффективных решений (множества Парето)

$$P(X, f) = \{x \in X : \pi(x, f) = \emptyset\},$$

где $\pi(x, f) = \{x' \in X : f(x') \leq f(x), f(x') \neq f(x)\}$, при условии конечности образа множества X в критериальном пространстве, т.е. конечности множества векторных оценок:

$$f(X) = \{y \in R^n : y = f(x), x \in X\}.$$

В теории и практике векторной (многокритериальной) оптимизации широко известен прием, основанный на сведении векторной задачи к скалярной, т.е. на “свертывании” векторного критерия f в одну функцию — обобщенный (агрегированный) критерий. Преимуществом этого приема является возможность использования детально разработанных алгоритмов скалярной (однокритериальной) оптимизации при решении векторных задач.

Введем обозначения:

$$R_{>0}^n = \{y \in R^n : y_i > 0, i \in N_n\},$$

$$R_{>1}^n = \{y \in R^n : y_i > 1, i \in N_n\}.$$

Теорема. Пусть $f(X) \subset R_{>0}^n$. Если $\kappa \in R_{>1}^n$ и решение x^* удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^n \kappa_i^{f_i(x^*)} = \min \left\{ \sum_{i=1}^n \kappa_i^{f_i(x)} : x \in X \right\},$$

то x^* является эффективным решением задачи (X, f) .

Обратно, если x^* — эффективное решение задачи (X, f) , то существует такой вектор $\kappa \in R_{>1}^n$, что выполняется равенство.

Тем самым для выделенного класса векторных дискретных задач теоремой указывается необходимое и достаточное условие эффективности решения в терминах аддитивной свертки показательных функций от частных критериев. Ранее аналогичное условие было получено в [1] в терминах аддитивной свертки степенных функций от частных критериев.

Литература

1. Емеличев В.А., Пашкевич А.В., Янушкевич О.А. Условия эффективности решения векторной задачи дискретной оптимизации // Дискретная математика. 1999. Т.11. №1. С.140–145.