Э.М. Аксень
БГЭУ (Минск)

ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ КАК ОБОБЩЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Количество видов ресурсов будем обозначать n , а векторы расхода ресурсов — $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Количество видов продукции будем обозначать m, а вектор выпуска продукции — $q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)$.

Под допустимым производственным планом будем понимать вектор $z\equiv(-\boldsymbol{x};q)=(-x_1,\ldots-x_n;q_1,\ldots,q_m)$, состоящий из векторов расхода ресурсов $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и выпуска продукции $q=(q_1,q_2,\ldots,q_m)$, такой, что продукция может быть произведена в количествах $q_1,q_2,\cdots,q_m$ при использовании ресурсов в количествах $x_1,x_2,\ldots,x_n$. (Знаки минус в $\boldsymbol{z}\equiv(-\boldsymbol{x};q)=(-x_1,\ldots-x_n;q_1,\ldots,q_m)$ показывают, что ресурсы расходуются, а не производятся.) Множество допустимых производственных планов обозначим Ω.

Вначале введём понятие трансформационной функции для случая одного вида продукции, а затем обобщим это понятие для случая нескольких видов продукции.

Напомним, что в случае одного вида продукции производственная функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ показывает максимально возможный выпуск при векторе использования ресурсов $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Таким образом, в случае одного вида продукции множество допустимых производственных планов определяется соотношением:

$$\Omega=\left\{(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q):x_i\geq 0,i=\overline{1,n},q\geq 0,f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq q\right\} \quad (1)$$

Заметим, что условие допустимости $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq q$ можно записать в следующем виде:

$$q-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq 0. \quad (2)$$

Определив функцию $F(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q)$ по формуле

$$F(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q)=q-f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{3}$$

условие допустимости (2) можно записать в виде:

$$F(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q)\le 0. \tag{4}$$

В случае одного вида продукции под эффективным производственным планом $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q)$ будем понимать план такой, что $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=q$ (т.е. при заданном векторе использования ресурсов $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ должно производиться максимально возможное количество продукции). Очевидно, что с помощью функции $F(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q)$ (определенной по формуле (3)) условие эффективности производственного плана запишется следующим образом:

$$F(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q)=0. \tag{5}$$

Функция $F(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n;q)$, определенная формулой (3), является частным случаем трансформационной функции. (Основные два свойства трансформационной функции состоят в том, что соотношение (4) является условием допустимости производственного плана, а соотношение (5) является условием эффективности производственного плана.)

В случае нескольких видов продукции под эффективными (оптимальными по Парето) производственными планами будем понимать такие допустимые планы, для которых либо нельзя увеличить выпуск одного или нескольких видов продукции, не увеличив при этом расход одного или нескольких видов ресурсов, либо нельзя уменьшить расход одного или нескольких видов ресурсов, не уменьшив при этом выпуск одного или нескольких видов продукции, т.е. допустимый производственный план $\bar{z}\equiv(-\bar{x};\bar{q})$ является эффективным, если не существует $\hat{z}\equiv(-\hat{x};\hat{q})\in\Omega$ такого, что либо $\hat{q}>\bar{q}$ и $\hat{x}\le\bar{x}$, либо $\hat{x}<\bar{x}$ и $\hat{q}\ge\bar{q}$ (или, короче, $\hat{z}>\bar{z}$). (В данном контексте мы считаем, что один вектор больше (меньше) другого вектора, если все компоненты первого вектора больше либо равны (меньше либо равны) соответствующих компонент второго вектора, причем найдется хотя бы одна компонента первого вектора, большая (меньшая) соответствующей компоненты второго вектора.) Множество эффективных производственных планов обозначим Ω^*.

Теперь мы можем дать определение трансформационной функции в случае нескольких видов продукции.

Трансформационная функция для заданного множества допустимых производственных планов Ω — это любая функция $F: R^{n+m} \to R$, такая что

$$\left\{z \equiv (-x;q) \in R^{n+m} : x \geq 0,\ q \geq 0, F(-x;q) \leq 0\right\} = \Omega \text{ и}$$

$$\left\{z \equiv (-x;q) \in R^{n+m} : x \geq 0,\ q \geq 0, F(-x;q) = 0\right\} = \Omega^*,$$

т.е. вектор $z \equiv (-x;q) \in R^{n+m}$ является допустимым производственным планом тогда и только тогда, когда $F(-x;q) \leq 0$, и является эффективным производственным планом тогда и только тогда, когда $F(-x;q) = 0$.

Покажем, как в случае нескольких видов продукции можно определить такое понятие, как предельная производительность ресурса, и как можно использовать трансформационную функцию для нахождения предельной производительности ресурса. Пусть производственный план $\bar{z} \equiv (-\bar{x};\bar{q})$ является эффективным, т.е. $\bar{z} \equiv (-\bar{x};\bar{q}) \in \Omega^*$. Будем считать, что расход только l-го ресурса может изменятmся, и это изменение l-го ресурса влияет на выпуск только s-го вида продукции так, чтобы производственный план

$$\begin{aligned}\hat{z} \equiv (-\hat{x}, \hat{q}) \equiv (&-\bar{x}_1, \ldots, -\bar{x}_{l-1}, -x_l, -\bar{x}_{l+1}, \ldots, -\bar{x}_n; \\ &-\bar{q}_1, \ldots, -\bar{q}_{s-1}, -q_s, -\bar{q}_{s+1}, \ldots, -\bar{q}_m)\end{aligned} \tag{6}$$

оставался эффективным, т.е. $\hat{z} \in \Omega^*$. Таким образом, соотношение:

$$\begin{aligned}\hat{z} \equiv (-\hat{x}, \hat{q}) \equiv (&-\bar{x}_1, \ldots, -\bar{x}_{l-1}, -x_l, -\bar{x}_{l+1}, \ldots, -\bar{x}_n; \\ &-\bar{q}_1, \ldots, -\bar{q}_{s-1}, -q_s, -\bar{q}_{s+1}, \ldots, -\bar{q}_m) = \Omega^*\end{aligned} \tag{7}$$

задает функцию $q_s = q_s(x_l)$. Производная $\frac{dq_s}{dx_l}(\bar{x}_l)$ этой функции при $x_l = \bar{x}_l$ называется предельной производительностью вида ресурса вида l по отношению к продукции вида s и обозначается $\text{ППР}_{ls}(\bar{z})$. В случае, когда единица измерения ресурса вида l достаточно мала по сравнению с расходом этого ресурса, можно считать, что $\text{ППР}_{ls}(\bar{z})$ показывает увеличение выпуска продукции вида s при увеличении расхода ресурса вида l на одну единицу (при условии, что выпуск остальных видов продукции остается неизменным и ресурсы используются эффективно).

Отметим, что предельную производительность ресурса $\text{ППР}_{ls}(\bar{z})$ можно выразить с помощью трансформационной функции F. В силу определения трансформационной функции соотношение (7) равносильно следующему равенству:

$$F(-\bar{x}_1,\ldots,-\bar{x}_{l-1},-x_l,-\bar{x}_{l+1},\ldots,-\bar{x}_n;\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_{s-1},q_s,\bar{q}_{s+1},\ldots,\bar{q}_m)=0. \quad (8)$$

Продифференцировав это равенство по x_l (считая, что $q_s = q_s(x_l)$) при $x_l = \bar{x}_l$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x_l}(\bar{z}) + \frac{\partial F}{\partial q_s}(\bar{z}) \cdot \frac{dq_s}{dx_l}(\bar{x}_l) = 0. \quad (9)$$

Отсюда можно выразить предельную производительность ресурса :

$$\text{ПФП}_{ls}(\bar{z}) \equiv \frac{dq_s}{dx_l}(\bar{x}_l) = -\frac{\partial F}{\partial x_l}(\bar{z}) \Big/ \frac{\partial F}{\partial q_s}(\bar{z}). \quad (10)$$