Э.М. АКСЕНЬ

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КАПИТАЛА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭКОНОМИКИ

1. Построение модели. Напомним, что в дискретной (детерминированной) модели Солоу с постоянным трудом (основной) капитал k_t в расчете на единицу труда в конце периода определяется по формуле

$$k_t = k_{t-1} - \delta k_{t-1} + s\, f(k_{t-1}),\ t \geq 1, \tag{1}$$

где k_{t-1} — капитал (в расчете на единицу труда) в начале периода t; δ — норма амортизации основного капитала; $f(k)$ — производственная функция (в расчете на единицу труда); s — норма сбережения (и, следовательно, $s\, f(k_{t-1})$ в формуле (1) — инвестиции в расчете на единицу труда в периоде t).

В модели предполагается, что

$$f(0) = 0,\ f'(k) > 0,\ f''(k) < 0, \tag{2}$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = +\infty,\ \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0. \tag{3}$$

Условия (3) называются условиями Инада (Inada conditions).

Отметим, что производственная функция Кобба-Дугласа вида $f(k) = k^{\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1)$, удовлетворяет условиям (2), (3).

Основной результат модели Солоу состоит в том, что в долгосрочном периоде (при $t \to \infty$) экономика входит в так называемое стационарное состояние, которое характеризуется тем, что уровень капитала k_t стремится при $t \to \infty$ к некоторому постоянному числу k^*, т.е.

$$k_t \xrightarrow{t \to \infty} k^*, \tag{4}$$

где k^* — стационарный уровень основного капитала.

Заметим, что в классическом (детерминированном) варианте модели Солоу предполагается, что нормы амортизации и сбережения, а также производственная функция неслучайны (т.е. в начальный момент времени известны точные значения норм амортизации и сбережения, а также производственная функция в будущем), что, вообще говоря, достаточно сильно упрощает действительность.

В настоящей статье предлагается стохастический вариант модели Солоу, основное уравнение которого имеет вид

$$k_t = k_{t-1} - \delta_t\, k_{t-1} + s_t\, \gamma_t\, f(k_{t-1}),\ t \geq 1. \tag{5}$$

Уравнение (5) отличается от уравнения (1) тем, что нормы амортизации и сбережения δ_t и s_t — случайные величины, зависящие от периода t. Кроме того, возможны также случайные отклонения выпуска от своего ожидаемого значения (равного $f(k_{t-1})$ в периоде t). Эти случайные отклонения описываются случайной величиной γ_t, зависящей от периода t. Например, если $\gamma_t = 1{,}05$, то отклонение выпуска от ожидаемого значения составляет 5 %.

Эрнест Маврициевич АКСЕНЬ, кандидат физико-математических наук, докторант кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ.

В статье предложена методика исследования стохастической модели (5) на предмет существования стационарного распределения капитала в долгосрочном периоде.

Описанная ниже методика может быть использована для достаточно широкого класса дискретных стохастических моделей экономики.

2. Существование стационарного распределения. Запишем уравнение (5) следующим образом:

$$k_t = (1 - \delta_t)\, k_{t-1} + s_t \gamma_t f(k_{t-1}),\ t \geq 1. \tag{6}$$

Исследуем свойства распределения случайной величины k_t при $t \to \infty$.

Пусть $\xi = (\delta, s, \gamma)$ — вектор (неслучайных) чисел. Определим функцию $\varphi(k, \xi)$ по формуле

$$\varphi(k, \xi) = (1 - \delta_t)\, k + s\, \gamma\, f(k). \tag{7}$$

Утверждение 1. Пусть функция $f(k)$ удовлетворяет условиям (2), (3). Тогда для любого (неслучайного) вектора $\xi = (\delta, s, \gamma)$, такого, что $\delta \in (0, 1)$, $s \in (0,1)$ и $\gamma \in (0, +\infty)$, существует и единственно положительное стационарное значение $k^* = k^*(\xi)$, т.е. значение, для которого имеет место равенство

$$k^* = \varphi(k^*, \xi). \tag{8}$$

При этом

$$\varphi(k, \xi) \in (k, k^*)\ \forall k \in (0, k^*), \tag{9}$$

$$\varphi(k, \xi) \in (k^*, k)\ \forall k \in (k^*, +\infty). \tag{10}$$

Заметим, что в силу формулы (7) равенство (8) равносильно следующему:

$$\delta k^* = s\, \gamma\, f(k^*). \tag{11}$$

Пример 1. Пусть $f(k) = k^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда равенство (11) примет вид

$$\delta k = s\, \gamma\, k^\alpha. \tag{12}$$

Отсюда получим

$$k^* = (s\, \gamma / \delta)^{1 - \alpha}. \tag{13}$$

Утверждение 2. Пусть

$$\delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \subset (0, 1), \tag{14}$$
$$s \in [s_{\min}, s_{\max}] \subset (0, 1), \tag{15}$$
$$\gamma \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}] \subset (0, +\infty), \tag{16}$$

Тогда $k^* \in [k^*_{\min}, k^*_{\max}]$, где

$$k^*_{\min} = k^*(\delta_{\max}, s_{\min}, \gamma_{\min}); \tag{17}$$
$$k^*_{\max} = k^*(\delta_{\min}, s_{\max}, \gamma_{\max}). \tag{18}$$

При этом $k^*_{\min} > 0$.

Пример 2. Пусть $f(k) = k^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда из (13) следует, что $k^*_{\min} = (s_{\min}\, \gamma_{\min} / \delta_{\max})^{1 - \alpha}$, $k^*_{\max} = (s_{\max}\, \gamma_{\max} / \delta_{\min})^{1 - \alpha}$.

Введем следующие обозначения: $\xi_t = (\delta_t, s_t, \gamma_t)$, $\xi^t_\tau = (\xi_\tau, \ldots, \xi_t)$.

Определим функции:

$$\varphi_1(k, \xi_1) = \varphi(k, \xi_1), \tag{19}$$

где $\varphi(k, \xi_1)$ задано в соответствии с формулой (7),

$$\varphi_2(k, \xi_1^2) = \varphi(\varphi_1(k, \xi_1), \xi_2) \tag{20}$$

и далее по индукции

$$\varphi_t(k, \xi_1^t) = \varphi(\varphi_{t-1}(k, \xi_1^{t-1}), \xi_t). \tag{21}$$

Из (21) следует, что

$$\varphi_t(k, \xi_1^t) = \varphi_{t-\tau}(\varphi_\tau(k, \xi_1^\tau), \xi_{\tau+1}^t) \tag{22}$$

при любом $\tau \in \{1, 2, \ldots, t-1\}$.

В частности,

$$\varphi_t(k, \xi_1^t) = \varphi_{t-1}(\varphi(k, \xi_1), \xi_2^t). \tag{23}$$

Из формулы (6) следует, что

$$k_t = \varphi_t(k_0, \xi_1^t). \tag{24}$$

Определим $\hat{k}_t^l$ с помощью следующей формулы:

$$\hat{k}_t^l = \varphi_t(k_0, \xi_{-t+l+1}^l). \tag{25}$$

$\forall t \in \{1, 2, \ldots\}$, $\forall l \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Напомним, что параметры δ_t, s_t, γ_t стохастической модели Солоу — случайные величины, причем они определены при $t \geq 1$. Следовательно, $\xi_1^\infty = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, где $\xi_t = (\delta_t, s_t, \gamma_t)$, — случайный процесс, который “начинается” при $t = 1$.

Предположим, что $\xi_1^\infty = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — стационарный случайный процесс. Тогда по теореме Колмогорова о согласованных распределениях [1, *424*] существует стационарный случайный процесс $\xi_{-\infty}^\infty = (\ldots, -\xi_2, -\xi_1, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$, который определен для всех отрицательных значений t и совпадает с заданным процессом $\xi_1^\infty = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ при $t \geq 1$.

Утверждение 3. Пусть $\xi_1^\infty = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — стационарный случайный процесс. Тогда распределение случайной величины $\hat{k}_t^l$, определенной формулой (25), не зависит от l.

Утверждение 3 следует из стационарности процесса $\xi_{-\infty}^\infty = (\ldots, -\xi_2, -\xi_1, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$.

Утверждение 4. Пусть $\xi_1^\infty = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — стационарный случайный процесс. Тогда распределения случайных величин $\hat{k}_t^l$ и k_t совпадают.

Утверждение 4 следует из стационарности процесса $\xi_{-\infty}^\infty = (\ldots, -\xi_2, -\xi_1, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ и формул (24), (25).

Утверждение 5. Пусть $f(k) = k^\alpha$, где $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $\forall t \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ для (неслучайных) чисел δ_t, s_t и γ_t имеют место соотношения:

$$\delta_t \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \subset (0, 1), \tag{26}$$
$$s_t \in [s_{\min}, s_{\max}] \subset (0, 1), \tag{27}$$
$$\gamma_t \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}] \subset (0, +\infty), \tag{28}$$

Тогда при любом $k_0 > 0$ последовательность $\hat{k}_t^l$, заданная формулой (25), сходится при $t \to \infty$. При этом предел $\hat{k}^l = \lim\limits_{t \to \infty} \hat{k}_t^l$ не зависит от k_0 и принадлежит интервалу $[k_{\min}^*, k_{\max}^*]$.

Очевидно, что предел $\hat{k}^l = \lim_{t\to\infty} \hat{k}_t^l$ зависит от последовательности $\xi_{-\infty}^{l} = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l)$, т.е. имеет место соотношение:

$$\hat{k}_t^l = \varphi_\infty(\xi_{-\infty}^{l}), \qquad (29)$$

где $\varphi_\infty(\cdot)$ — некоторая функция.

Утверждение 6. Пусть $\xi_1^\infty = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — стационарный случайный процесс. Тогда в условиях утверждения 5, в котором соотношения (26)—(28) следует понимать выполняющимися почти наверное, распределение случайной величины $\hat{k}^l$ не зависит от $k_0 > 0$ и l.

Утверждение 6 следует из стационарности процесса $\xi_{-\infty}^{\infty} = (\ldots, -\xi_2, -\xi_1, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$ и формулы (29).

Утверждение 7. Пусть $\xi_1^\infty = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ — стационарный случайный процесс. Тогда в условиях утверждения 5, в котором соотношения (26)—(28) следует понимать выполняющимися почти наверное, последовательность случайных величин k_t сходится при $t \to \infty$ к $\hat{k}^l$ по распределению.

$\triangleright$В силу утверждения 5 имеет место сходимость $\hat{k}_t^l \to \hat{k}^l$ при $t \to \infty$ почти наверное. Следовательно, $\hat{k}_t^l \to \hat{k}^l$ при $t \to \infty$ по распределению. Поскольку, в силу утверждения 4 распределения случайных величин $\hat{k}_t^l$ и k_t совпадают, $k_t \to \hat{k}^l$ при $t \to \infty$ к $\hat{k}^l$ по распределению.$\triangleleft$

Итак, мы доказали, что распределения случайных величин k_t сходятся к некоторому стационарному распределению при $t \to \infty$, причем (в силу утверждения 6) это стационарное распределение не зависит от начального значения капитала k_0.

Литература

1. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М., 1999.

Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов. М., 2002.
Мэнкью Н.Г. Макроэкономика / Пер. с англ. М., 1994.
Пугачев В.С., Синицин И.Н. Теория случайных процессов. М., 2000.
Blanchard O.J., Fischer S. Lectures on Macroeconomics. Cambrige, 1989.2
Romer D. Advanced Macroeconomics. New York, 1996.