



## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Э.М. АКСЕНЬ

### СТОХАСТИЧЕСКОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (НА ПРИМЕРЕ ПОВЕДЕНИЯ ДОМАШНИХ ХОЗЯЙСТВ И ИНОСТРАННЫХ ИНВЕСТОРОВ)

Данная статья продолжает [1; 2]. Приведенные в ней модели являются составными элементами стохастической динамической модели, построенной автором для исследования влияния экономической политики правительства на динамику макроэкономических показателей (в кратком виде описана в [1]).

Согласно разработанной автором методике при моделировании поведения субъектов экономики ключевую роль играют их ожидания относительно динамики изменения переменных модели в будущем. Для того чтобы отличать “текущий” момент времени от “будущего” (по отношению к “текущему”), будем использовать букву  $t$  для текущего момента времени, а  $\tau$  — для будущего. (При этом, очевидно,  $\tau \geq t$ .)

#### 1. Моделирование поведения домашних хозяйств.

1.1. Совокупное “богатство” домашних хозяйств. В модели предполагается, что “богатство” домашних хозяйств состоит из запасов национальной и иностранной валют, недвижимости, а также собственного и заемного капитала фирм-резидентов.

Обозначим через  $\hat{M}_H^d(\tau)$  и  $\tilde{M}_H^f(\tau)$  номинальные запасы национальной и иностранной валют домашних хозяйств (в момент времени  $\tau$ ), через  $R(\tau)$  — недвижимость, принадлежащую домашним хозяйствам (выражена в условных денежных единицах); через  $E_H(\tau)$  — собственный капитал фирм-резидентов, принадлежащий домашним хозяйствам (выражен в условных денежных единицах); через  $\hat{B}_H^d(\tau)$  и  $\tilde{B}_H^f(\tau)$  — принадлежащий домашним хозяйствам номинальный заемный капитал фирм-резидентов (в национальной и иностранной валютах, соответственно); через  $H(\tau)$  — совокупное богатство домашних хозяйств (выражено в условных денежных единицах).

Обозначим через  $M_H^d(\tau)$  и  $M_H^f(\tau)$  реальные запасы (касательно домашних хозяйств) национальной и иностранной валют, т.е.

$$M_H^d(\tau) = \hat{M}_H^d(\tau) / \hat{P}_d(\tau); M_H^f(\tau) = \frac{\tilde{M}_H^f(\tau)}{\tilde{P}_f(\tau)}, \quad (1)$$

Эрнест Маврикевич АКСЕНЬ, кандидат физико-математических наук, докторант кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета.

где  $\hat{P}_d(\tau)$  и  $\tilde{P}_f(\tau)$  — уровни цен в национальной и иностранной валютах (соответственно) в момент времени  $\tau$ .

Через  $B_H^d(\tau)$  и  $B_H^f(\tau)$  обозначим принадлежащий домашним хозяйствам реальный заемный капитал фирм-резидентов (в национальной и иностранной валютах, соответственно), т.е.

$$B_H^d(\tau) = \hat{B}_H^d(\tau) / \hat{P}_d(\tau); \quad B_H^f(\tau) = \tilde{B}_H^f(\tau) / \tilde{P}_f(\tau). \quad (2)$$

Таким образом, совокупное богатство домашних хозяйств ( $H(\tau)$ ) равно:

$$H(\tau) = M_H^d(\tau) + M_H^f(\tau) + R(\tau) + E_H(\tau) + B_H^d(\tau) + B_H^f(\tau). \quad (3)$$

**1.2. Ожидаемая динамика активов домашних хозяйств.** Для описания ожиданий домашних хозяйств будем использовать векторный стандартный винеровский процесс (броуновское движение)  $W(\tau) = [W_1(\tau), \dots, W_m(\tau)]^T$  (с независимыми компонентами) и пуассоновскую меру  $v(dx, d\tau)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$  (см. [3], [4]).

Отметим, что размерности  $m$  вектора  $W(\tau)$  и пуассоновские меры  $v(dx, d\tau)$ , используемые для описания ожиданий фирм-резидентов (см. [2]) и домашних хозяйств, разные.

Ожидаемая динамика недвижимости, принадлежащей домашним хозяйствам ( $R(\tau)$ ), описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dR(\tau) = dI_R(\tau) + \sigma_R[R(\tau)]dW(\tau) + \int Y_R[x, R(\tau)]v(dx, d\tau), \quad (4)$$

где  $dI_R(\tau)$  — стохастический дифференциал инвестиций (кумулятивных) домашних хозяйств в недвижимость;  $\sigma_R(R)$  — экзогенно заданная векторная функция (т.е.  $\sigma_R(R) = [\sigma_R^1(R), \dots, \sigma_R^m(R)]$ );  $Y_R(x, R)$  — экзогенно заданная скалярная функция.

Ожидаемая (домашними хозяйствами) динамика собственного капитала фирм-резидентов ( $E_H(\tau)$ ), принадлежащего домашним хозяйствам, описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dE_H(\tau) = E_H(\tau)[r_E d\tau + \sigma_{EH} dW(\tau)] + \int Y_{EH}(x)v(dx, d\tau) - dS_{EH}(\tau), \quad (5)$$

где  $r_E$  — константа;  $\sigma_{EH}$  — экзогенно заданный вектор (размерности  $m$ );  $Y_{EH}(x)$  — экзогенно заданная функция;  $dS_{EH}(\tau)$  — дифференциал (стохастический) реального денежного потока, выплачиваемого (либо получаемого) фирмами домашним хозяйствам как владельцам собственного капитала.

Ожидаемая (домашними хозяйствами) динамика заемного капитала и  $\hat{B}_H^d(\tau)$  и  $\tilde{B}_H^f(\tau)$  описывается стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$d\hat{B}_H^d(\tau) = \hat{B}_{BH}^d(\tau)[r_B^d d\tau + \int Y_{BH}^d(x)v(dx, d\tau)] - d\hat{S}_{BH}^d(\tau); \quad (6)$$

$$d\tilde{B}_H^f(\tau) = \tilde{B}_{BH}^f(\tau)[r_B^f d\tau + \int Y_{BH}^f(x)v(dx, d\tau)] - d\tilde{S}_{BH}^f(\tau), \quad (7)$$

где  $r_B^d$  и  $r_B^f$  — положительные константы (обещанные процентные ставки);  $Y_{BH}^d(x)$  и  $Y_{BH}^f(x)$  — экзогенно заданные функции;  $d\hat{S}_{BH}^d(\tau)$  и  $d\tilde{S}_{BH}^f(\tau)$  — дифференциалы (стохастические) номинальных денежных потоков, выплачивае-

мые (либо получаемые) фирмами домашним хозяйствам как владельцам заемного капитала в национальной и иностранной валютах, соответственно.

**1.3. Налоги.** Налоги, выплачиваемые домашними хозяйствами ( $T_H(\tau)$ ), определяются экзогенно заданной налоговой политикой правительства, которая описывается функцией  $T_H = T_H(wL)$  (от заработной платы). (Здесь через  $w$  обозначен уровень заработной платы в национальной экономике, а через  $L$  – трудовые ресурсы, занятые в национальной экономике).

**1.4. Ожидаемая динамика уровней национальных и иностранных цен.** В модели предполагается, что ожидаемая домашними хозяйствами динамика уровней цен  $\hat{P}_d(\tau)$  и  $\tilde{P}_f(\tau)$  (в национальной и иностранной валютах) аналогична динамике уровней цен, ожидаемой фирмами ([2], формулы (9), (10)), и описывается стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$d\hat{P}_d(\tau) = \hat{P}_d(\tau)[i_d d\tau + \sigma_P^d dW(\tau) + \int Y_P^d(x)v(dx, d\tau)]; \quad (8)$$

$$d\tilde{P}_f(\tau) = \tilde{P}_f(\tau)[i_f d\tau + \sigma_P^f dW(\tau) + \int Y_P^f(x)v(dx, d\tau)], \quad (9)$$

где  $i_d$  и  $i_f$  – заданные константы;  $\sigma_P^d$  и  $\sigma_P^f$  – экзогенно заданные векторы (размерности  $m$ );  $Y_P^d(x)$  и  $Y_P^f(x)$  – экзогенно заданные функции (от вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ).

**1.5. Конечное потребление домашних хозяйств.** В модели предполагается, что конечное потребление домашних хозяйств (выраженное в условных денежных единицах) не содержит винеровской и пуассоновской составляющих. Обозначим его интенсивность (в момент времени  $\tau$ ) через  $C(\tau)$ .

В силу изложенных выше предположений модели для интенсивности конечного потребления домашних хозяйств имеет место равенство:

$$C(\tau)d\tau = wLd\tau - T_H(\tau)d\tau + d_1\hat{S}_{BH}^d(\tau)/\hat{P}_d(\tau) + d_1\tilde{S}_{BH}^f(\tau)/\tilde{P}_f(\tau) + dS_{EH}(\tau) - d_1\hat{M}_H^d(\tau)/\hat{P}_d(\tau) - d_1\tilde{M}_H^f(\tau)/\tilde{P}_f(\tau) - dI_R(\tau). \quad 10$$

Нижний индекс 1 в некоторых дифференциалах правой части равенства (10) означает, что в соответствующих интегральных суммах значения подынтегральной функции берутся в правых концах интервалов (см. [4, 449]).

**1.6. Максимизация межвременной полезности домашних хозяйств.** В условиях модели полезность домашних хозяйств зависит не только от конечного потребления, но и от реальных запасов национальной и иностранной валют. Включение этих запасов в функцию полезности домашних хозяйств объясняется тем, что денежные запасы потребителей облегчают домашним хозяйствам осуществление сделок.

Не только реальные запасы валют, но и их вид влияют на полезность домашних хозяйств. Это связано с существованием правовых ограничений на использование резидентами иностранной валюты для внутренних сделок.

В соответствии с вышесказанным в модели предполагается, что домашние хозяйства максимизируют следующий функционал межвременной полезности:

$$E_t \int_t^\infty e^{-\theta_H(\tau-t)} u_H[C(\tau), M_H^d(\tau), M_H^f(\tau)]d\tau, \quad (11)$$

где  $u_H = u_H(C, M_H^d, M_H^f)$  — экзогенно заданная функция полезности домашних хозяйств;  $\theta_H$  — экзогенно заданная норма межвременных предпочтений;  $E_t$  — оператор математического ожидания (в “текущий” момент времени  $t$ ).

Очевидно, что условие неотрицательности

$$H(\tau) \geq 0 \quad (12)$$

достаточно для того, чтобы исключить возможность игры Понци для домашних хозяйств.

Отметим, что в условиях модели процентные ставки  $r_B^d$  и  $r_B^f$  (ожидаемые домашними хозяйствами в “текущий” момент времени  $t$  для “будущих” моментов времени  $\tau \geq t$ ), доходность собственного капитала  $r_E$  и уровень  $w$  заработной платы в национальной экономике постоянны и равны реальным значениям соответствующих переменных. Однако в разные “текущие” моменты времени  $t$  реальные значения этих переменных, вообще говоря, разные, т.е.  $r_B^d = r_B^d(t)$ ,  $r_B^f = r_B^f(t)$ ,  $r_E = r_E(t)$  и  $w = w(t)$ .

В результате решения задачи максимизации полезности домашних хозяйств при заданных значениях  $H(t)$  реального “богатства” домашних хозяйств (в “текущий” момент времени  $t$ ),  $r_B^d(t)$  и  $r_B^f(t)$  процентных ставок,  $r_E(t)$  ожидаемой доходности собственного капитала и  $w(t)$  уровня заработной платы (в национальной экономике) можно определить однозначным образом конечное потребление  $C(t)$  и структуру “богатства” домашних хозяйств (значения  $M_H^d(t)$ ,  $M_H^f(t)$ ,  $R(t)$ ,  $B_H^d(t)$ ,  $B_H^f(t)$ , и  $E_H(t)$ ) (см. [5], [6]).

Следовательно, эти оптимальные значения можно рассматривать как функции от переменных  $H(t)$ ,  $r_B^d(t)$ ,  $r_B^f(t)$ ,  $r_E(t)$  и  $w(t)$ :

$$C(t) = C[H(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t), w(t)]; \quad (13)$$

$$M_H^d(t) = M_H^d[H(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t), w(t)]; \quad (14)$$

$$M_H^f(t) = M_H^f[H(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t), w(t)]; \quad (15)$$

$$R(t) = R[H(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t), w(t)]; \quad (16)$$

$$B_H^d(t) = B_H^d[H(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t), w(t)]; \quad (17)$$

$$B_H^f(t) = B_H^f[H(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t), w(t)]; \quad (18)$$

$$E_H(t) = E_H[H(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t), w(t)]. \quad (19)$$

## 2. Моделирование поведения иностранных инвесторов.

**2.1. Структура иностранного капитала в национальной экономике.** В модели предполагается, что “богатство” иностранных инвесторов в национальной экономике состоит из собственного и заемного капитала фирм-резидентов.

Обозначим: через  $E_F(\tau)$  собственный капитал фирм-резидентов, принадлежащий иностранным инвесторам (выражен в условных денежных единицах); через  $\hat{B}_F^d(\tau)$  и  $\tilde{B}_F^f(\tau)$  — принадлежащий иностранным инвесторам номинальный заемный капитал фирм-резидентов (выражен в национальной и иностранной валютах соответственно); через  $B_F^d(\tau)$  и  $B_F^f(\tau)$  — соответствующий реаль-

ный заемный капитал (по аналогии с формулами (2)); через  $F(\tau)$  — совокупное “богатство” иностранных инвесторов в национальной экономике (выражено в условных денежных единицах).

Таким образом, совокупное “богатство” иностранных инвесторов в национальной экономике:

$$F(\tau) = E_F(\tau) + B_F^d(\tau) + B_F^f(\tau). \quad (20)$$

**2.2. Ожидаемая динамика активов иностранных инвесторов.** Для описания ожиданий иностранных инвесторов будем использовать векторный стандартный винеровский процесс (брюновское движение)  $W(\tau) = [W_1(\tau), \dots, W_m(\tau)]^T$  (с независимыми компонентами) и пуассоновскую меру  $\nu(dx, d\tau)$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Отметим, что размерности  $m$  вектора  $W(\tau)$  и пуассоновские меры  $\nu(dx, dt)$ , используемые для описания ожиданий фирм-резидентов (см. [2]), домашних хозяйств и иностранных инвесторов, вообще говоря, разные.

Ожидаемая (иностранными инвесторами) динамика собственного капитала  $E_F(\tau)$  и заемного капитала  $\hat{B}_F^d(\tau)$  и  $\tilde{B}_F^f(\tau)$  фирм-резидентов, принадлежащего иностранным инвесторам, описывается стохастическими дифференциальными уравнениями, аналогичными уравнениям (5)–(7) (для собственного и заемного капитала домашних хозяйств).

**2.3. Ожидаемая динамика уровней национальных и иностранных цен.** Ожидаемая иностранными инвесторами динамика уровней  $\hat{P}_d(\tau)$  и  $\tilde{P}_f(\tau)$  национальных и иностранных цен аналогична динамике уровней цен, ожидаемой фирмами-резидентами (формулы (9), (10)) [2, 99, 100] и домашними хозяйствами (формулы (8), (9) (настоящей статьи)).

**2.4. Суммарный реальный денежный поток иностранных инвесторов.** В модели предполагается, что суммарный реальный денежный поток, выплачиваемый (либо получаемый) фирмами-резидентами иностранным инвесторам как владельцам собственного и заемного капитала, не содержит винеровской и пуассоновской составляющих. Обозначим его интенсивность (в момент времени  $\tau$ ) через  $CF_F(\tau)$ .

В силу изложенных выше предположений модели для интенсивности суммарного денежного потока иностранных инвесторов в национальной экономике имеет место равенство:

$$CF_F(\tau)d\tau = dS_{EF}(\tau) + d_1\hat{S}_{BF}^d(\tau) / \hat{P}_d(\tau) + d_1\tilde{S}_{BF}^f(\tau) / \tilde{P}_f(\tau), \quad (21)$$

где  $dS_{EF}(\tau)$ ,  $d_1\hat{S}_{BF}^d(\tau)$  и  $d_1\tilde{S}_{BF}^f(\tau)$  — стохастические дифференциалы денежных потоков, выплачиваемых (либо получаемых) фирмами-резидентами иностранным инвесторам как владельцам собственного и заемного капитала.

Отметим, что (как и в равенстве (10)) нижний индекс 1 в некоторых дифференциалах правой части равенства (21) означает, что в соответствующих интегральных суммах значения подынтегральной функции берутся в правых концах интервалов [4, 449].

**2.5. Максимизация межвременной полезности иностранных инвесторов.** В модели предполагается, что полезность иностранных инвесторов определяется с помощью денежных потоков, выплачиваемых им (либо получаемых от них) фирмами-резидентами.

В соответствии с вышесказанным в модели допускается, что иностранные инвесторы максимизируют функционал (межвременной полезности):

$$E_t \int_t^{\infty} e^{-\theta_F(\tau-t)} u_F[CF_F(\tau)] d\tau, \quad (22)$$

где  $u_F = u_F(CF_F)$  — экзогенно заданная функция полезности иностранных инвесторов;  $\theta_F$  — экзогенно заданная норма межвременных предпочтений иностранных инвесторов;  $E_t$  — оператор математического ожидания (в “текущий” момент времени  $t$ ).

Условие неотрицательности

$$F(\tau) \geq 0 \quad (23)$$

достаточно для того, чтобы исключить возможность игры Понци для иностранных инвесторов как для владельцев собственного и заемного капитала фирм-резидентов.

В результате решения задачи максимизации полезности иностранных инвесторов при заданных значениях  $F(t)$  реального “богатства” иностранных инвесторов в национальной экономике (в “текущий” момент времени  $t$ ),  $r_B^d(t)$  и  $r_B^f(t)$  процентных ставок и  $r_E(t)$  ожидаемой доходности собственного капитала (фирм-резидентов) можно однозначным образом определить суммарный денежный поток  $CF_F(t)$  и структуру “богатства” иностранных инвесторов в национальной экономике, т.е. значения  $E_F(t)$ ,  $B_F^d(t)$  и  $B_F^f(t)$ .

Следовательно, эти оптимальные значения можно рассматривать как функции от переменных  $F(t)$ ,  $r_B^d(t)$ ,  $r_B^f(t)$  и  $r_E(t)$ :

$$CF_F(t) = CF_F[F(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t)]; \quad (24)$$

$$E_F(t) = E_F[F(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t)]; \quad (25)$$

$$B_F^d(t) = B_F^d[F(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t)]; \quad (26)$$

$$B_F^f(t) = B_F^f[F(t), r_B^d(t), r_B^f(t), r_E(t)]. \quad (27)$$

Итак, в настоящей статье изложены построенные автором стохастические динамические модели поведения домашних хозяйств и иностранных инвесторов, являющиеся составными элементами модели, предназначеннной для исследования влияния экономической политики правительства на динамику макроэкономических показателей (см. [1]). В последующих статьях будет описываться моделирование экономической политики правительства и равновесного состояния экономики.

## Литература

1. Аксеню Э.М. Методика построения стохастической динамической макромодели // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. 2005. № 4.
2. Аксеню Э.М. Стохастическая динамическая модель поведения фирм // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. 2005. № 6.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965.
4. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М., 2000.
5. Kamien M. I., Schwartz N. L. Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management. N.Y., 2001.
6. Turnovsky S. J. Methods of Macroeconomic Dynamics. Cambridge, 2000.