

вносы; в случае сокращения досрочного пенсионного периода за счет более позднего выхода застрахованного лица на досрочную пенсию.

Рассматриваемый вариант установления страховых тарифов позволяет для застрахованных лиц обеспечить минимальные социальные гарантии при наступлении права выхода на досрочную пенсию, а для работодателей установить минимальный уровень страховой нагрузки на фонд заработной платы и минимизировать рост себестоимости продукции при введении профессионального пенсионного страхования.

Литература

1. Концепция реформы системы пенсионного обеспечения в Республике Беларусь: постановление Совета Министров Респ. Беларусь, 17 апр. 1997 г., № 349 // Нац. экон. газ. — 1997. — № 20.
2. О профессиональном пенсионном страховании: Закон Респ. Беларусь, 5 янв. 2008 г., № 322-З // Нац. реестр правовых актов Респ. Беларусь. — 2008. — № 16. — 2/1419.
3. О пенсионном обеспечении: Закон Республики Беларусь, 17 апр. 1992 г., № 1596-XII с изм. и доп.: текст по сост. на 20 дек. 2007 г. // Нац. реестр правовых актов Респ. Беларусь. — 2008. — № 1. — 2/1392.

В.Я. АСАНОВИЧ, Е.А. БЕЛОВ, Н.И. ХОЛОД

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫМ РАЗВИТИЕМ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Агрегированные модели экономического роста играют важную роль в экономических исследованиях. Данный класс моделей, описывая поведение экономики в целом, рассматривает во взаимодействии наиболее важные экономические процессы: производство, инвестирование, сбережения и потребление.

Проблема экономического роста и его моделирования широко изучается отечественными и зарубежными учеными [1–4]. В частности, представлены результаты исследования односекторной динамической макроэкономической модели в предположении постоянства среднедушевого потребления и ограничений на минимальное значение нормы инвестиций [4]. Здесь же показано, что если минимальное значение нормы инвестиций ниже коэффициента эластичности производственной функции, то система переходит в неустойчивое состояние [4].

Цель нашей работы — нахождение условий повышения среднедушевого потребления в Республике Беларусь на период 2007–2010 гг. на базе агрегированной динамической модели экономики. При этом предполагается произвести учет НТП.

За основу исследования нами был взят подход, предложенный к описанию оптимального экономического роста страны, — метод Лагранжа–Кротова с использованием так называемой “функции развития” [5].

В качестве первого шага выбираем агрегированную (однопродуктовую) модель экономического роста Солоу [3]. Для этого рассматриваем экономику, ха-

Валерий Яковлевич АСАНОВИЧ, доктор химических наук, профессор кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета;

Евгений Александрович БЕЛОВ, аспирант кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета;

Николай Игнатьевич ХОЛОД, доктор экономических наук, профессор кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета.

рактизирующуюся в каждый момент t набором переменных $X(t)$, $Y(t)$, $C(t)$, $K(t)$, $L(t)$, $Inv(t)$. Здесь: $X(t)$ — валовой выпуск (ВВ); $Y(t)$ — валовой внутренний продукт (ВВП); $Inv(t)$ — инвестиции; $C(t)$ — конечное потребление. Эти переменные взаимосвязаны балансовыми соотношениями, в частности, условие баланса распределения ВВ на промежуточное потребление и ВВП:

$$X(t) = aX(t) + Y(t), \quad (1)$$

где $0 < a < 1$ — доля промежуточного потребления.

Конечный продукт распределяется на валовые капитальные вложения (инвестиции) и конечное потребление

$$Y(t) = Inv(t) + C(t), \quad (2)$$

инвестиции расходуются на прирост основных производственных фондов и их восстановление за счет амортизационных отчислений:

$$Inv(t) = \left(\frac{d}{dt} K(t) \right) + \mu K(t),$$

где μ — норма амортизации. Тогда $\frac{d}{dt} K(t) = Inv(t) - \mu K(t)$ или

$$\frac{d}{dt} K(t) = (1 - u)(1 - a)X(t) - \mu K(t) \quad (3)$$

с начальными условиями $K(0) = K_0$,

$u(t) = C(t)/Y(t)$ — доля конечного потребления; $u(t) \in (0 \div 1)$.

Соотношение (3) описывает динамику физического капитала. Динамика численности занятых задается уравнением

$$\frac{d}{dt} L(t) = nL(t) \quad (4)$$

с начальными условиями $L(0) = L_0$, где n — темп прироста численности занятых.

Соотношения (1) — (4) составляют основу модели экономического роста Солоу в абсолютной форме. Для дальнейшего исследования удобно использовать модель Солоу в относительной форме. Для этого введем следующие переменные: $k(t) = K(t)/L(t)$ — фондовооруженность, $c(t) = C(t)/L(t)$ — среднедушевое потребление, $x(t) = X(t)/L(t)$ — производительность труда.

Несложные преобразования приводят к уравнению динамики фондовооруженности в модели Солоу:

$$\frac{d}{dt} k(t) = (1 - u)(1 - a)x(t) - (\mu + n)k(t) \quad (5)$$

с начальными условиями $k(0) = k_0$.

В качестве параметра управления выбираем долю конечного потребления $u(t)$. Задача оптимального управления экономическим ростом состоит в том, чтобы найти такой процесс $v = (k_{opt}(t), u_{opt}(t))$, который обеспечит наибольшее среднедушевое потребление на рассматриваемом временном интервале с учетом дисконтирования потребления. Критерий оптимальности процесса управления экономикой задается функционалом:

$$J = \int_0^T u(1-a)x(t)e^{(-\delta t)} dt \rightarrow \max, \quad (6)$$

где δ — коэффициент дисконтирования для подинтегральной функции $u(1-a)x(t)$, называемой функцией полезности.

В теории оптимального управления есть два фундаментальных метода решения поставленной задачи: принцип максимума Понтрягина и подход на базе достаточных условий Лагранжа—Кротова [5, 6]. Воспользуемся “функцией развития” Кротова [5], которая в нашем случае примет следующий вид:

$$R\{k, x, u, t\} = \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial k} [(1-a)(1-u)x - (\mu + n)k] + e^{-\delta t} (1-a)ux + \frac{\partial \varphi(k, t)}{\partial t}, \quad (7)$$

где $\varphi(k, t)$ — вспомогательная функция, дифференцируемая по обоим переменным. Решение сводится к использованию достаточных условий экстремума функции $R(k, u, t)$ и нахождении оптимального процесса $v = (k_{opt}(t), u_{opt}(t))$ в явном виде [5, 6].

Прежде чем проводить дальнейшие расчеты, необходимо выбрать производственную функцию (ПФ) с учетом НТП. В качестве ПФ рассмотрим производственную функцию Кобба—Дугласа с экзогенным продуктоувеличивающим НТП [7]:

$$X(t) = A_0 K(t)^\alpha L(t)^\beta e^{(pt)}, \quad (8)$$

A_0 — масштабирующий параметр ПФ; α — коэффициент эластичности выпуска по ОПФ; β — коэффициент эластичности выпуска по труду.

Множитель $e^{(pt)}$ в формуле (8) задает тенденцию роста объемов производства под воздействием фактора времени. Предположим, что экономический рост обусловлен НТП, повышающим эффективность производства за счет улучшения качества используемых основных фондов и трудовых ресурсов. В реальной экономике изменения уровня производства за счет НТП не всегда можно представить множителем $e^{(pt)}$, описывающим экспоненциальный рост. Существуют отклонения от тенденции $e^{(pt)}$, вызванные неравномерным развитием НТП и меняющимся со временем воздействием других факторов производства, таких как скорость обновления основных фондов (уровня инвестиций в предшествующие годы), макроэкономическая и политическая стабильность, уровень образования и квалификации рабочей силы. Поэтому для более адекватного описания производственного процесса предлагается использовать ПФ Шелла [8], учитывающую неравномерное и непостоянное изменение факторов производства во времени:

$$X(t) = A_0 K(t)^\alpha L(t)^\beta e^{p(t)}, \quad (9)$$

$p(t) = p_0 t + \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) = \rho_1 \sin(\omega t + \psi)$ — монотонно-циклическая компонента, учитывающая экспоненциальность процесса производства и его колебаний, вызванных экзогенным влиянием НТП на рассматриваемом промежутке времени.

Далее, исходя из условий достаточности Лагранжа—Кротова, отыскиваем оптимальный процесс $v = (k_{opt}(t), u_{opt}(t))$ с учетом полученной модифицированной ПФ (9). Опуская пространственные выкладки, приведем промежуточные результаты преобразований для магистрального процесса:

$$k_{mag}(t) = \left(\frac{(1-a)A_0\alpha}{\mu + \eta + \delta} \right)^{\left(\frac{1}{\beta}\right)} e^{\left(\frac{p(t)}{\beta}\right)}, \quad (10)$$

$$u_mag(t) = 1 - \alpha \left(\mu + \eta + \frac{p_0 + \frac{d}{dt}\varepsilon(t)}{\beta} \right) / \mu + \eta + \delta. \quad (11)$$

Данные функции определяют *магистральные* значения управляющего параметра (доли конечного потребления $u_mag(t)$) и соответствующего ему параметра состояния (фондовооруженности $k_mag(t)$) в момент t .

Магистраль развития имеет важную роль в решении задачи оптимального управления. Развитие экономической системы вдоль магистрали позволяет в кратчайшие сроки достичь заданных конечных макропоказателей, сохраняя и наращивая потенциал производства и обеспечивая при этом максимальное потребление (либо иной критерий оптимальности) в *долгосрочной* перспективе.

В том случае, если начальное и конечное значения фондовооруженности находятся на магистрали, можно говорить о том, что задача оптимального управления экономической системой на макроуровне решена. Но, как правило, краевые значения отличаются от магистральных. Таким образом, дальнейшее решение задачи сводится к определению траектории оптимального развития.

Траектория оптимального развития состоит из трех частей: 1) достижение магистрали; 2) движение по магистрали; 3) достижение конечного состояния.

С математической точки зрения оптимальная траектория представляет собой кусочно-непрерывную функцию с точками разрыва τ_1 и τ_2 — так называемые “моменты переключения”. Функции оптимального развития (12), (13) для управляющего параметра $u_opt(t)$ и состояния $k_opt(t)$ имеют вид

$$u_opt(t) = \begin{cases} u_1 & t \leq \tau_1, \\ u_mag(t) & t = \tau_1\tau_2, \\ u_2 & t = \tau_2T, \end{cases} \quad (12)$$

$$k_opt(t) = \begin{cases} k_1 & t \leq \tau_1, \\ k_mag(t) & t = \tau_1\tau_2, \\ k_2 & t = \tau_2T. \end{cases} \quad (13)$$

Функции $k_1(t)$, $k_2(t)$, значения u_1 , u_2 находятся путем решения дифференциальных уравнений, аналогичных уравнению динамики (5). Но, в отличие от уравнения (5), задаются дополнительные условия $k(0) = k_0$ (или $k(T) = k_T$), а параметр u принимает крайние значения u_1 и u_2 . Полученные функции $k_i(t)$ определяют область (границы) допустимых значений. Точки разрыва τ_1 и τ_2 определяются на пересечении магистрали и функций $k_i(t)$. Математические выкладки, относящиеся к данной части модели, мы опускаем из-за их громоздкости.

Таким образом, задача отыскания оптимальной траектории экономического роста $k_opt(t)$ и программы управления $u_opt(t)$ с учетом НТП решена.

Перейдем к решению задачи оптимального управления в рамках прогнозирования экономического роста Республики Беларусь до 2010 гг. Макропоказатели экономической системы рассчитываются с помощью функций (2) — (4). Параметры ПФ (9) подбирали на основании статистических данных по Республике Беларусь (2000 — 2006 гг.) [9]:

$$A_0 = 1246,96, \alpha = 0,50, \beta = 0,485, p_0 = 0,07, p_1 = 0,01, \varpi = -1, \psi = \pi/4.$$

Сопоставление расчетов для ВВ по ПФ (9) с фактическими данными (рис. 1) указывает на относительно хорошее приближение.

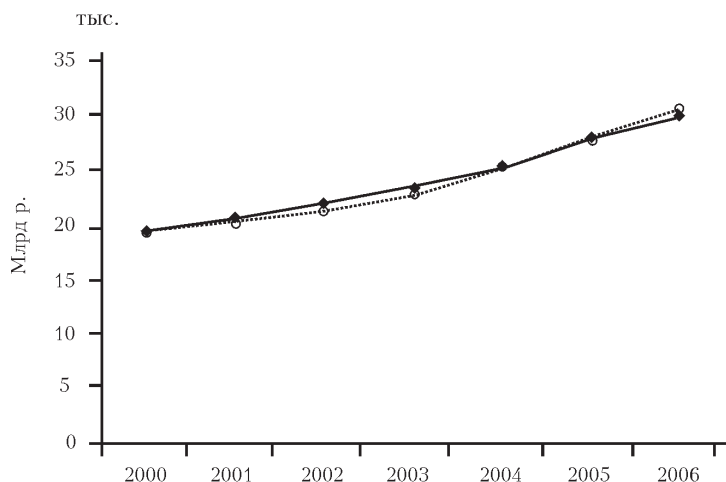


Рис. 1. Сопоставление фактического и рассчитанного валового выпуска за 2000–2006 гг.: —◆— факт;○..... производственная функция

Рассмотрим два варианта экономического роста Беларуси: задаваемый параметрами, определенными “Программой социально-экономического развития Республики Беларусь на 2006–2010 гг.” (ПСЭР) [10], и определяемый агрегированной моделью оптимального развития.

“Программой социально-экономического развития” прогнозируется рост ВВП — 108,0–108,5 % в год (в сопоставимых ценах), рост объемов инвестиций — 111,5–113,0 % в год (в сопоставимых ценах). В качестве условия, определяющего конечное состояние системы, положим, что уровень фондовооруженности в конечный момент времени в модели оптимального развития должен соответствовать уровню, определенному ПСЭР. Модель реализована с помощью пакета Maple, который позволяет решать математические задачи не только численно, но и аналитически.

Результаты расчетов и сравнительная динамика фондовооруженности представлены на рис. 2.

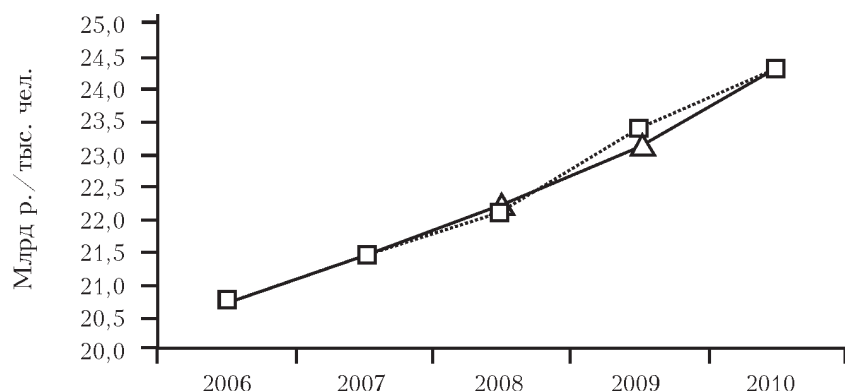


Рис. 2. Прогноз фондовооруженности на 2006–2010 гг.: “Программа социально-экономического развития” и модель оптимального управления: —△— ПСЭР;□..... МОУ

Динамика фондовооруженности, рассчитанная по модели оптимального управления, в целом соответствует прогнозной динамике ПСЭР [10].

На основании полученной динамики фондовооруженности и соответствующей ей программы оптимального управления долей конечного потреб-

ления определены модельные значения основных макроэкономических показателей на 2007—2010 гг.

На рис. 3 представлена сравнительная динамика конечного потребления.

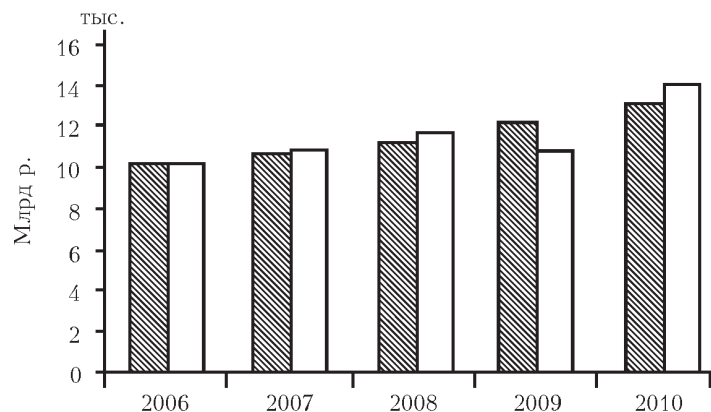


Рис. 3. Сопоставление прогноза конечного потребления за 2006—2010 гг.: ■ — ПСЭР; □ — МОУ

Программа управления, определенная с помощью агрегированной модели оптимального развития экономики, учитывающей НТП, позволит увеличить суммарное среднесуточное потребление (значение функционала (6)) на 0,1 % в сравнении с прогнозом “Программы социально-экономического развития” при одинаковых начальных и конечных условиях (уровне фондовооруженности (рис. 2). Результаты позволяют рассчитывать определенный потенциал в развитии экономики страны.

Описанная модель оптимального развития в качестве результата предлагает альтернативную программу управления экономической системой. Однако она не позволяет в достаточной степени описать такой сложный объект моделирования, как экономическая система государства. Не учтены межотраслевые взаимосвязи, отсутствует ценовой фактор и учет экспортно-импортных операций. Ввиду этого необходима разработка многоотраслевого варианта модели, позволяющего учесть эти аспекты.

Литература

1. Blanshard, O.J. Lecture on Macroeconomics / O.J. Blanshard, S. Fisher. — University Press, Cambridge, 1989.
2. Angel de la Fuente. Mathematical methods and models for economists. — University Press, Cambridge, 2000.
3. Dynamic economic models and optimal control / Ed. G. Feichtinger. — Vienna, 1991.
4. Лебедев, В.В. Односекторная модель экономики с “жестким” потреблением / В.В. Лебедев, К.В. Лебедев: материалы 4 Междунар. науч. конф. “Государственное управление в XXI веке: традиции и инновации”, 24—26 мая 2006 г. ФГУ МГУ им. М.В. Ломоносова. — М.: ЧеРо, 2006.
5. Кротов, В.Ф. Оптимальное управление экономическими процессами / В.Ф. Кротов, Н.И. Данилина. — М.: Высш. шк., 1980.
6. Лагоша, Б.А. Оптимальное управление в экономике: учеб. пособие / Б.А. Лагоша. — М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Кучин, Б.Л. Управление развитием экономических систем: технический прогресс, устойчивость / Б.Л. Кучин, Е.В. Якушева. — М.: Экономика, 1990.
8. Смирнова, А.К. Анализ агрегированных динамических моделей / А.К. Смирнова. — М., 2001.
9. Министерство статистики и анализа Республики Беларусь (официальный сайт) [Электронный ресурс] / М-во статистики и анализа Респ. Беларусь. — Минск, 2007. Режим доступа: <http://belstat.gov.by/homep/ru/indicators/main1.php>. Дата доступа: 20.08. 2007.
10. Правительство рассмотрит проект Основных направлений социально-экономического развития Беларуси [Электронный ресурс] / Агентство новостей БелаПАН. — Минск, 2007. Режим доступа: http://naviny.by/rubrics/economic/2006/10/03/ic_news_113_259746/. Дата доступа: 15.09. 2007.