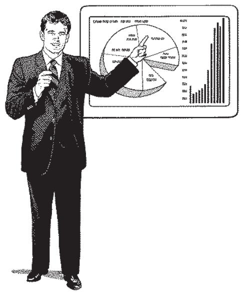

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Э.М. АКСЕНЬ

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Данная статья завершает серию статей [1—5]. В ней приводится вывод стохастических дифференциальных уравнений динамики экономической системы, предназначенной для исследования влияния экономической политики правительства на динамику макроэкономических показателей (см. [1]).

1. Зависимость равновесного вектора реального состояния экономики от реального богатства субъектов экономики и уровня технологии производства. Обозначим через $Z(t)$ следующий вектор:

$$Z(t) = [E(t),\ H(t),\ F(t),\ G(t),\ \gamma(t)], \tag{1}$$

где $E(t)$ — собственный капитал фирм-резидентов в момент времени t (см. п. 1 ст. [2]); $H(t)$ — совокупное богатство домашних хозяйств (см. п. 1.1 ст. [3]); $F(t)$ — иностранный капитал в национальной экономике (см. п. 2.1 ст. [3]); $G(t)$ — суммарные чистые активы правительства (см. п. 2.1 ст. [4]); $\gamma(t)$ — уровень технологии производства в момент времени t (см. п. 2 ст. [2]).

Заметим, что при заданных значениях $E(t)$, $H(t)$, $F(t)$, $G(t)$ и $\gamma(t)$ уравнения (35)—(38) ст. [4] (вместе с формулой (33) этой же статьи) однозначно определяют равновесные значения $r_B^d(t)$ и $r_B^f(t)$ процентных ставок заемного капитала, $r_E(t)$ — ожидаемой доходности собственного капитала, $w(t)$ — уровня заработной платы, а также вектор $S_{\backslash G}(t)$ — реального состояния экономики без активов правительства (задан в соответствии с формулой (8) ст. [4]). Следовательно, эти значения можно рассматривать как функции от вектора $Z(t)$:

$$r_B^d(t) = r_B^d[Z(t)],\ r_B^f(t) = r_B^f[Z(t)],\ r_E(t) = r_E[Z(t)],\ w(t) = w[Z(t)]; \tag{2}$$

$$S_{\backslash G}(t) = S_{\backslash G}[Z(t)]. \tag{3}$$

Заданное значение $G(t)$ и вектор $S_{\backslash G}(t) = S_{\backslash G}[Z(t)]$ определяют структуру правительственных активов в соответствии с экономической политикой правительства (формулы (7)—(12) ст. [4]).

Эрнест Маврициевич АКСЕНЬ, кандидат физико-математических наук, докторант кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета.

Следовательно, значения $E(t)$, $H(t)$, $F(t)$, $G(t)$ и $\gamma(t)$ в конечном счете определяет равновесный вектор $S(t)$ реального состояния экономики (задан в соответствии с формулой (7) ст. [4]):

$$S(t) = S[Z(t)]. \tag{4}$$

2. Зависимость некоторых интенсивностей от реального богатства субъектов экономики и уровня технологии производства. Зная вектор (1), а следовательно, и равновесные значения (2) и (4), можно определить равновесные интенсивности:

- $CF_E(t)$ — свободного денежного потока собственного капитала фирм-резидентов — по формуле (14) ст. [2];
- $C(t)$ — конечного потребления домашних хозяйств — по формуле (13) ст. [3];
- $CF_F(t)$ — денежного потока иностранных инвесторов — по формуле (24) ст. [3];
- $Y(t)$ — производства ВВП — по формуле (18) ст. [5];
- $T_C(t)$ — налогов, выплачиваемых фирмами-резидентами — по формуле (17) ст. [4];
- $T_H(t)$ — налогов, выплачиваемых домашними хозяйствами — по формуле (19) ст. [4];
- $GS(t)$ — государственных расходов — по формуле (21) ст. [4];
- $MP(t)$ — реальной интенсивности изменения номинальной денежной массы национальной валюты — по формуле (27) ст. [4].

Следовательно, перечисленные выше интенсивности можно рассматривать как функции от вектора (1):

$$CF_E(t) = CF_E[Z(t)],\ C(t) = C[Z(t)],\ CF_F(t) = CF_F[Z(t)],\ Y(t) = Y[Z(t)]; \tag{5}$$

$$T_C(t) = T_C[Z(t)],\ T_H(t) = T_H[Z(t)],\ GS(t) = GS[Z(t)],\ MP(t) = MP[Z(t)]. \tag{6}$$

3. Взаимосвязь параметров уравнений динамики уровня цен и реальной денежной массы. Поскольку (в соответствии с формулой (1) ст. [3]) реальная денежная масса $M_d(t)$ национальной валюты равна отношению номинальной денежной массы $\hat{M}_d(t)$ и уровня цен $\hat{P}_d(t)$, имеет место следующее равенство:

$$\hat{P}_d(t) = \frac{\hat{M}_d(t)}{M_d(t)}. \tag{7}$$

В силу равенств (23) и (24) ст. [4] динамика $\hat{M}_d(t)$ описывается уравнением

$$d\hat{M}_d(t) = \hat{P}_d(t)MP(t)dt. \tag{8}$$

Напомним, что для описания объективной динамики экономической системы мы используем векторный стандартный винеровский процесс (броуновское движение) $W(t) = [W_1(t), ..., W_m(t)]^T$ с независимыми компонентами и пуассоновскую меру $\nu(dx,\ dt)$, где $x = (x_1,\ ...,\ x_n)$ (см. п. 1 ст. [5]).

Заметим, что для динамики реальной денежной массы $M_d(t)$ национальной валюты справедливо следующее равенство:

$$dM_d(t) = \mu_M^d(t)dt + \sigma_M^d(t)dW(t) + \int Y_M^d(x,t)\nu(dx, dt), \tag{9}$$

где $\mu_M^d, \sigma_M^d(t) = [\sigma_M^{d1}(t),\ \ldots,\ \sigma_M^{dm}(t)]$ и $Y_M^d(x,t)$ — эндогенно определяемые случайные функции.

Из соотношений (7)—(9) с помощью формулы Ито [6, *502*] можно получить следующее равенство:

$$d\hat{P}_d(t) = \hat{P}_d(t)\left[\frac{MP(t)}{M_d(t)} - \frac{\mu_M^d(t)}{M_d(t)} + \frac{\sigma_M^d(t)[\sigma_M^d(t)]^T}{[M_d(t)]^2}\right]dt - \\ - \frac{\sigma_M^d(t)}{M_d(t)}\,dW(t) - \int \frac{Y_M^d(t,x)}{M_d(t) + Y_M^d(t,x)}\,\nu(dx,dt). \tag{10}$$

Сравнив полученное равенство с уравнением (2) ст. [5], несложно заметить, что

$$\frac{MP(t)}{M_d(t)} - \frac{\mu_M^d(t)}{M_d(t)} + \frac{\sigma_M^d(t)[\sigma_M^d(t)]^T}{[M_d(t)]^2} = i_d(t), \tag{11}$$

$$-\frac{\sigma_M^d(t)}{M_d(t)} = \sigma_P^d(t), \tag{12}$$

$$-\frac{Y_M^d(x,t)}{M_d(t) + Y_M^d(x,t)} = Y_P^d(x,t). \tag{13}$$

4. Взаимосвязь параметров уравнений динамики реальной денежной массы и вектора $\boldsymbol{Z(t)}$. Заметим, что значения $M_C^d(t)$ и $M_H^d(t)$ реальных запасов национальной валюты фирм-резидентов и домашних хозяйств соответственно входят в состав вектора $S(t)$ реального состояния экономики (формула (7) ст. [4]). Следовательно, в соответствии с формулой (4) настоящей статьи их можно рассматривать как функции от вектора (1), т.е. $M_C^d(t) = M_C^d[Z(t)]$ и $M_H^d(t) = M_H^d[Z(t)]$.

Напомним, что в условиях модели запасы национальной валюты находятся только у фирм-резидентов и домашних хозяйств (п.1 ст. [4]). Следовательно, в силу сделанного выше вывода, реальная денежная масса $M_d(t)$ национальной валюты однозначным образом определяется вектором (1):

$$M_d(t) = M_d[Z(t)], \tag{14}$$

причем $M_d(Z) = M_C^d(Z) + M_H^d(Z)$.

Обозначим через $\frac{\partial M_d}{\partial Z}(Z)$ вектор-строку первых производных функции $M_d(Z)$, т.е. $\frac{\partial M_d}{\partial Z}(Z) = \left(\frac{\partial M_d}{\partial E}(Z), \frac{\partial M_d}{\partial H}(Z), \frac{\partial M_d}{\partial F}(Z), \frac{\partial M_d}{\partial G}(Z), \frac{\partial M_d}{\partial \gamma}(Z)\right)$, а через $\frac{\partial^2 M_d}{\partial Z^2}(Z)$ — матрицу вторых производных этой же функции.

Также введем следующие обозначения:

$$\mu_Z(t) = [\mu_E(t), \mu_H(t), \mu_F(t), \mu_G(t), \mu_\gamma(\gamma(t))]^T; \tag{15}$$

$$\sigma_Z(t) = \left([\sigma_E(t)]^T, [\sigma_H(t)]^T, [\sigma_F(t)]^T, [\sigma_G(t)]^T, [\sigma_\gamma(\gamma(t))]^T\right)^T; \tag{16}$$

$$Y_Z(t,x) = [Y_E(t,x), Y_H(t,x), Y_F(t,x), Y_G(t,x), Y_\gamma(x,\gamma(t))]^T. \tag{17}$$

(Компоненты правых частей равенств (15)—(17) описаны в ст. [5], см. формулы (20), (27), (34), (41) и (1) ст. [5].)

Отметим, что с использованием введенных обозначений стохастические дифференциальные уравнения (19), (26), (33), (40) и (1) ст. [5] можно записать в матричном виде:

$$dZ(t) = \mu_Z(t)dt + \sigma_Z(t)dW(t) + \int Y_Z(x,t)\nu(dx,dt). \tag{18}$$

Заметим, что формула Ито [6, *502*] для функции $M_d(t) = M_d[Z(t)]$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} dM_d(t) = &\left\{ \frac{\partial M_d}{\partial Z}[Z(t)]\mu_Z(t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 M_d}{\partial Z^2}[Z(t)]\sigma_Z(t)[\sigma_Z(t)]^T \right) \right\} dt + \\ &+ \frac{\partial M_d}{\partial Z}[Z(t)]\sigma_Z(t)dW(t) + \int \left\{ M_d[Z(t) + Y_Z(x,t)] - M_d[Z(t)] \right\} \nu(dx,dt) \end{aligned}; \tag{19}$$

Сравнив формулу (19) с равенством (9), несложно заметить, что

$$\frac{\partial M_d}{\partial Z}[Z(t)]\mu_Z(t) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 M_d}{\partial Z^2}[Z(t)]\sigma_Z(t)[\sigma_Z(t)]^T \right) = \mu_M^d(t); \tag{20}$$

$$\frac{\partial M_d}{\partial Z}[Z(t)]\sigma_Z(t) = \sigma_M^d(t); \tag{21}$$

$$M_d[Z(t) + Y_Z(x,t)] - M_d[Z(t)] = Y_M^d(x,t). \tag{22}$$

5. Вывод стохастических дифференциальных уравнений, описывающих объективную динамику экономической системы. При заданном векторе (1) и определяемых им равновесных значениях компонент вектора (4) и интенсивностях (5)—(6), а также при экзогенно заданных константах и функциях, указанных в п.1 ст. [5] , можно решить:

- систему уравнений (21), (28), (35), (42) ст. [5] и (12), (21) настоящей статьи относительно переменных $\sigma_E(t)$, $\sigma_H(t)$, $\sigma_F(t)$, $\sigma_G(t)$, $\sigma_P^d(t)$, $\sigma_M^d(t)$;
- систему уравнений (20), (27), (34), (41) ст. [5] и (11), (20) настоящей статьи относительно переменных $\mu_E(t)$, $\mu_H(t)$, $\mu_F(t)$, $\mu_G(t)$, $i_d(t)$, μ_M^d (при уже найденных значениях $\sigma_E(t)$, $\sigma_H(t)$, $\sigma_F(t)$, $\sigma_G(t)$, $\sigma_P^d(t)$, $\sigma_M^d(t)$;
- систему уравнений (22), (29), (36), (43) ст. [5] и (13), (22) относительно переменных $Y_E(x,t)$, $Y_H(x,t)$, $Y_F(x,t)$, $Y_G(x,t)$, $Y_P^d(x,t)$, $Y_M^d(x,t)$.

Следовательно, указанные выше переменные, а также векторы $\mu_Z(t)$, $Y_Z(x,t)$ и матрицу $\sigma_Z(t)$ (обозначения (15)—(17)) можно рассматривать как (уже известные) функции от вектора (1):

$$\mu_Z(t) = \mu_Z[Z(t)],\ \sigma_Z(t) = \sigma_Z[Z(t)],\ Y_Z(x,t) = Y_Z[x, Z(t)]. \tag{23}$$

Подставив (23) в (18) получим:

$$dZ(t) = \mu_Z[Z(t)]dt + \sigma_Z[Z(t)]dW(t) + \int Y_Z[x, Z(t)]\nu(dx,dt). \tag{24}$$

Векторное стохастическое дифференциальное уравнение (24) определяет объективную динамику модели.

В силу важности векторного уравнения (24) запишем его также (для наглядности) в виде системы скалярных уравнений:

$$dE(t) = \mu_E[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]dt + \sigma_E[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)] \times \times dW(t) + \int Y_E[x, E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]\nu(dx, dt); \quad (25)$$

$$dH(t) = \mu_H[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]dt + \sigma_H[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)] \times \times dW(t) + \int Y_H[x, E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]\nu(dx, dt); \quad (26)$$

$$dF(t) = \mu_F[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]dt + \sigma_F[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)] \times \times dW(t) + \int Y_F[x, E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]\nu(dx, dt); \quad (27)$$

$$dG(t) = \mu_G[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]dt + \sigma_G[E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)] \times \times dW(t) + \int Y_G[x, E(t), H(t), F(t), G(t), \gamma(t)]\nu(dx, dt); \quad (28)$$

$$d\gamma(t) = \mu_\gamma[\gamma(t)]dt + \sigma_\gamma[\gamma(t)dW(t)] + \int Y_\gamma[x, \gamma(t)]\nu(dx, dt). \quad (29)$$

Итак, в настоящей статье изложен вывод стохастических дифференциальных уравнений, описывающих объективную динамику экономической системы в целом для стохастической динамической модели, предназначенной для исследования влияния экономической политики правительства на динамику некоторых макроэкономических показателей (см. ст. [1]). С помощью этих уравнений можно получить (просчитать) случайные траектории всех переменных модели и оценить соответствующие вероятностные распределения.

Литература

1. *Аксень, Э.М.* Методика построения стохастической динамической макромодели / Э.М. Аксень // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2005. — № 4. — С. 45—49.

2. *Аксень, Э.М.* Стохастическая динамическая модель поведения фирм / Э.М. Аксень // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2005. — № 6. — С. 97—101.

3. *Аксень, Э.М.* Стохастическое динамическое моделирование на примере поведения домашних хозяйств и иностранных инвесторов/ Э.М. Аксень // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2006. — № 3. — С. 36—41.

4. *Аксень, Э.М.* Моделирование равновесного состояния экономики / Э.М. Аксень // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2006. — № 6. — С. 37—43.

5. *Аксень, Э.М.* Стохастическое динамическое моделирование «объективной» динамики «богатства» субъектов экономики / Э.М. Аксень // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2008. — № 1. — С. 48—54.

6. *Пугачев, В.С.* Теория стохастических систем / В.С. Пугачев, И.Н. Синицын. — М.: Логос, 2000.