

## АНАЛИЗ ТЕСТОВОЙ ТЕОРИИ ИНДЕКСОВ

**С.С. Захорошко,**

кандидат экономических наук, доцент, зав. кафедрой социально-гуманитарных дисциплин  
Гродненского филиала ЧУО «БИП – Институт правоведения»

Тестовая теория индексов является наиболее популярной среди индексологов. В ее основе лежат работы Ф. Эджуорта, Х. Вестергаарда, Н. Пирсона. В XIX в. английский экономист и математик Фрэнсис Эджуорт, а позднее датский статистик Харалльд Вестергаард выдвинули идеи отбора индексных формул исходя из определенных математических критериев. В 1890 г. в работе «Основы теории статистики» Х. Вестергаард предложил идею циркулярного теста, а в 1896 г. голландский экономист Н. Пирсон изложил тесты соизмеримости и обратимости индексов во времени.

Американский экономист и статистик И. Фишер воспринял идеи предшественников и выдвинул концепцию, в основе которой лежала система тестов. В 1911 г. в книге «Покупательная сила денег» он привел 7 тестов и с их помощью отобрал лучшие индексы. Опираясь на разработанную систему тестирования, И. Фишер выдвигает две новые идеи: тесты являются методом отбора лучших формул; тесты служат инструментом, а исходные формулы – материалом, на основе которых могут строиться новые более совершенные индексы (кроссинги).

К 1922 г. во взглядах И. Фишера произошли значительные изменения. В книге «Построение индексов» он классифицирует индексы лишь по двум тестам: обратимости во времени и обратимости факторов. Придавая основное значение этим тестам, И. Фишер прямо указывает, что они «являются теми китами, на которых должна покоиться любая надежная индексная формула» [1. С. 4].

В работах статистиков того периода (Х. Вестергаарда, Н. Пирсона, И. Фишера, А. Уолша, Р. Фриша), а также работах позднейших авторов К. Джини, Л. Борткевича можно выделить, по меньшей мере, 15 различных тестов. Наиболее часто анализу подвергаются следующие из них.

**Т1. Идентичность.** Индекс, в котором соотносятся одни и те же показатели за один и тот же период, должен быть равен единице.

**Т2. Обратимость во времени.** Если в числителе и знаменателе формулы индекса поменять местами базисный и отчетный периоды, то новый и старый индексы будут взаимно обратными, а их произведение равно единице:

$$\frac{q_1}{q_0} = A; \frac{q_0}{q_1} = B, \text{ причем } A \cdot B = 1. \quad (1)$$

**Т3. Циркулярность.** Произведение цепных индексов должно равняться базисному:

$$I_{1/0} \cdot I_{2/1} = I_{2/0}, \quad (2)$$

где  $I_{1/0}$  – индекс отчетного периода к базисному.

**Т4. Обратимость факторов.** Произведение факторных индексов должно давать результативный, итоговый, индекс:

$$i_s = i_{qp} = i_q \cdot i_p = i_p \cdot i_q. \quad (3)$$

**Т5. Пропорциональность.** При равенстве всех индивидуальных индексов некоторой положительной постоянной величине  $A$  общий индекс также должен равняться этой величине  $A$ . Тест пропорциональности предъявляет к формуле такое требование: если цены всех товаров изменяются в равной пропорции, то индекс цен должен измениться в той же пропорции.

**Т6. Определенность.** Общий индекс не должен обращаться в нуль, бесконечность или неопределенность, если один из индивидуальных индексов обращается в нуль, бесконечность или неопределенность.

**Т7. Соизмеримость.** Индекс не должен менять своего значения при переходе с одних единиц измерения на другие.

**Т8. Включения/исключения (или ассоциативности).** Величина индекса не должна

меняться при включении в него индивидуальных индексов, равных по величине общему индексу.

Наибольшее внимание в индексологии уделяется трем тестам: обратимости во времени, обратимости факторов и циркулярному.

Выдвинутые критерии первоначально были предназначены для тестирования индексных формул, но в дальнейшем стали рассматриваться и с математической точки зрения, т. е. со стороны абсолютного соответствия формулы той или иной группе критериев. Между тем именно в этом смысле разработанная система не является независимой.

Сформулируем три несложные теоремы, указывающие на взаимосвязи критериев.

1) Из обратимости ситуаций следует идентичность.

Действительно, ничто не мешает в тесте обратимости во времени считать отчетную и базисную ситуации одинаковыми. В известной мере тест обратимости во времени сильнее идентичности.

2) Из идентичности и циркулярности следует обратимость ситуаций:

$$P_{1/0} \cdot P_{0/1} = P_{1/1} = 1.$$

3) Из ассоциативности следует пропорциональность. Это легко доказывается последовательным включением в расчет всех учитываемых факторов.

Представляется, что в остальном система критериев Фишера является независимой, но строгое доказательство этого факта было бы, естественно, очень громоздким.

Согласно теореме индийского исследователя Свами Субраманиана, критерии Фишера (Т2–Т8) несовместимы.

Учитывая приведенные выше результаты, можно несколько ослабить условия теоремы С. Субраманиана, что приводит к такому следствию из нее: несовместимы критерии Фишера, включающие в себя

- тесты соизмеримости, циркулярности и обратимости факторов;
- тесты определенности или ассоциативности.

Следовательно, тесты Фишера, во-первых, несовместимы и, во-вторых, избыточны.

Сформулированные теоремы приводят также к следующим важным выводам.

Тесты идентичности и обратимости во времени представляют собой простейшие требования к индексам. Подавляющее большинство индексов отвечает этим критериям либо может быть легко приведено к соответствующему виду. Тест обратимости во времени вбирает в себя критерий идентичности, а следовательно, последний излишен.

Циркулярный тест является, пожалуй, самым сложным. Формулы, отвечающие ему, позволяют сравнивать не только две, а несколько последовательных ситуаций. Это выводит индексный анализ на значительно более высокий уровень обобщения. Однако данному тесту отвечают только давно отвергнутые индексологами простые и взвешенные по постоянным весам геометрические индексы.

Критерий обратимости факторов, как представляется автору, ошибочен в своей основе. Поскольку индекс есть средняя величина, постольку среднее произведение не может быть равно произведению средних (при условии единообразного взвешивания факторных сомножителей). Это противоречит правилам математики.

Тесты определенности, включения и исключения представляются крайне специфическими, избыточными требованиями, поскольку не являются столь необходимыми атрибутами хорошей индексной формулы, как остальные.

Критерий соизмеримости имеет явно утопический смысл. Он сводится к нелепому требованию, чтобы индекс, исчисленный при данных ценах и одном количестве товаров, был равен индексу при других ценах и количествах.

Следовательно, система тестов не имеет внутреннего единства, поскольку построена на разных принципах. Кроме того, рассматриваемые тесты, по мнению автора, различны по своему характеру, сложности и значимости.

Анализ тестовой теории показывает, что одни и те же тесты не применимы к разным конструкциям индексов. Например, «идеальная» формула Фишера не отвечает требованиям циркулярного теста, а индексы Ласпейреса и Пааше ему отвечают. Простой арифметический индекс тому же тесту не отвечает, а простой геометрический индекс отвечает.

Тестовая система неоднократно подвергалась критике. Так, Г. Хаберлер в 1928 г. указывал на некорректность теста обратимости факторов. В 1937 г. А. Вальд, используя оригинальный математический прием, показал, что два теста (обратимости во времени и обратимости факторов) несовместимы с третьим – циркулярным. В. Винклер в 1956 г. отмечал, что тесты обратимости не имеют серьезного обоснования.

В работе «Построение индексов» И. Фишер называет основными тесты обратимости во времени и обратимости факторов, отбрасывает циркулярный как теоретически несостоятельный. Остальные тесты, рассмотренные в «Покупательной силе денег» (соизмеримости, определенности, пропорциональности, исключения и включения), он считает второстепенными.

Вследствие несовместимости тестов обратимости и циркулярного возникло два направления тестовой теории. Согласно первому, которое является основным (его развивал И. Фишер), соблюдение индексными формулами теста обратимости факторов обязательно, в связи с чем игнорируется циркулярный тест. Во втором, напротив, отдается предпочтение циркулярному тесту, вследствие чего игнорируется тест обратимости факторов.

Циркулярный тест отстаивали Л. Борткевич, Д. Давиес, К. Джини и другие статистики. Так, Д. Давиес считал неправомерным игнорирование циркулярного теста, так как он представляет собой расширенный тест обратимости во времени: «Циркулярный тест может рассматриваться как сложная форма теста обратимости во времени, поскольку основывается на тех же самых логических соображениях... Аргументы, которые могут быть приведены за или против одного, могут, очевидно, быть применены и для другого» [2. С. 81].

Наиболее последовательно развивал идеи второго направления тестовой теории К. Джини, для которого циркулярный тест являлся таким же инструментом построения индексных формул, как тесты обратимости для И. Фишера. Если И. Фишер искал формулы, удовлетворяющие двум тестам обратимости, то К. Джини подбирал формулы, отвечающие циркулярному тесту. Одержимые идеальными представлениями и убежденные в правильности своих идей, ученые

не стремились глубоко вникнуть в логическое содержание проводимых математических операций. Формально-математический подход и желание соответствовать сформулированным абсолютным критериям часто были выше экономического смысла получаемых формул-мутантов.

В своем главном труде [1] И. Фишер провел первый систематический обзор формул индексов. Он составил каталог и протестировал 134 формулы индексов цен, среди которых создал несколько групп. Сначала И. Фишер выделил невзвешенные, простые формулы. К ним относятся формулы индексов цен, которые не содержат данных о количествах. Примером простых формул служат также невзвешенные средние значения индивидуальных индексов цен, относящихся к различным товарам. В результате первая группа содержит так называемые первичные формулы (номера 1–99), вторая – индексы, удовлетворяющие тесту обратимости во времени (номера 100–199). Затем следуют формулы, удовлетворяющие тесту обратимости факторов (номера 200–299). И наконец, список завершается формулами, удовлетворяющими обоим тестам (номера 300–399). «Идеальная» формула Фишера находится под номером 353 в последней группе.

Выше упоминалось, что в [1] И. Фишер придавал большое значение тестам обратимости во времени и обратимости факторов. Формулы, отвечающие этим тестам, он называл «открывающими», т. е. позволяющими проводить скрещивание и получать «формулы-антитезы». По мнению И. Фишера, скрещивание должно улучшать некоторую формулу так, чтобы она удовлетворяла тесту, которому первоначально не удовлетворяла. Он комбинировал различные виды средних со всеми возможными весами. В случае агрегатного индекса цен возможными весами, например, являются  $q_0p_0$ ,  $q_1p_0$ ,  $q_0p_1$ ,  $q_1p_1$ . Среди полученных формул были и такие комбинации, которые нельзя интерпретировать как осмысленные агрегаты.

Испытав различные формы средневзвешенного индекса, И. Фишер обнаружил, что ни одна из форм среднего индекса не удовлетворяет тестам полностью. Тогда он начал конструировать кроссинги путем скрещивания индексов. Скрещивание заключается в следу-



ющем: берется прямой индекс, затем вычисляется его антитеза, т. е. единица, деленная на обратный индекс, и извлекается квадратный корень из произведения прямого индекса и его антитезы. И. Фишеру в процессе кроссингов удалось построить 13 искусственных формул группового индекса, полностью удовлетворяющих его главным тестам.

Одним из видов скрещивания является скрещенная факторная антитеза, которую он кладет в основу построения своего «идеального» индекса<sup>1</sup>. Этот индекс образуется как средняя геометрическая, при помощи «скрещивания» двух индексов, построенных на основе взвешивания цен один раз по базисному, а другой раз по отчетному объему продукции.

«Идеальный» индекс цен И. Фишера имеет вид:

$$I_p = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \cdot \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \quad (4)$$

В основе «идеальной» формулы Фишера лежат индексы Ласпейреса и Пааше. Хотя «идеальная» формула индекса не нашла широкого применения, однако она остается в известной мере образцовой, поскольку дает наилучшие индексные числа и несет печать глубокого, осмысленного подхода к конструированию индекса.

На протяжении более 100 лет различные рецензенты ее защищали или критиковали. Вначале было больше критики. Формулу считали искусственной, абстрактной. В последние десятилетия в отношении к формуле, наоборот, больше позитива. Например, П. Кевеш [3] полагает, что экономическое содержание формулы Фишера лучше, чем формул Ласпейреса и Пааше. Р. Аллен [4] вообще считает ее «идеальным» звеном, ко-

торое мы ищем», и строит на ее основе свою индексную концепцию.

Между тем «идеальный» индекс Фишера имеет ряд серьезных недостатков.

Во-первых, формула не отвечает циркулярному тесту, предложенному некогда самим Фишером<sup>2</sup>.

Во-вторых, формула-мутант лишена конкретного экономического содержания, поскольку ее нельзя представить как отношение двух экономически осмысленных величин.

В третьих, в основе конструкции Фишера лежит отношение двух фиктивных величин – перемноженных стоимостей продукции в «рублях квадратных». Формально, при извлечении корня, «квадратные рубли» преобразуются и становятся реальной единицей измерения. Однако очевидно, что подобные «показатели» не могут объективно характеризовать состояние явления и взаимосвязь факторов.

В четвертых, индекс Фишера представляет собой симбиоз формул Ласпейреса и Пааше, и поэтому при расчете индекса остается неясным вопрос, что мы вычисляем – индекс цен? Нет. Индекс продукции? Тоже нет. Скорее всего, индекс стоимости. Но тогда по данной формуле индекс цен и индекс продукции вычислить нельзя, и она имеет крайне ограниченную сферу применения.

Справедливости ради следует отметить и преимущества «идеальной» формулы. Она дает хорошее усреднение в диапазоне от индекса Ласпейреса до индекса Пааше, соответствует большинству известных тестов и входит в группу лучших формул, отобранных Фишером.

Проводя тестирование, Фишер выделил несколько классов формул посредством сравнения с «идеальным» индексом: ничего не стоящие, слабые, корректные, хорошие, очень хорошие (например, индексы Ласпейреса и Пааше), прекрасные, превосходные формулы (например, «идеальный» индекс Фишера). Испытывая при помощи тестов обратимости добротность различных конструкций индекса, ученый обнаружил, что лишь четыре формулы удовлетворяют этим критериям. Он вскоре убеждается, что тест циркулярности несовместим с двумя другими, так как первые из них требуют построения ин-

<sup>1</sup> Обзор научных публикаций показал, что «идеальная» формула сконструирована не Фишером, а английским статистиком А. Боули в 1899 г. Затем в одной из публикаций ее привел Уолш. Фишер предложил лишь название – «идеальная». Названная формула стала «идеальной» формулой Фишера в 1921 г. в связи с ошибкой Пирсона. По этому случаю Фишер в 1922 г. сделал следующее замечание: «...предложенный мною термин «идеальная» наиболее приемлем. Но если должно быть использовано мое имя, то надо также использовать имя Уолша или имена Уолша и Пигу» [1. С. 89]. Между тем И. Фишер настолько всесторонне исследовал 134 формулы, что формула стала ассоциироваться с его именем.

<sup>2</sup> Ради «идеальной» формулы И. Фишер отказался впоследствии от циркулярного теста.

дексов с переменными весами, а третий, наоборот, с постоянными весами. Только в условиях индивидуальных индексов, в которых взвешивание не применяется, эти три теста совместимы.

Тестовая концепция носит явно выраженный формальный характер, поскольку И. Фишер проводит скрещивание индексов абсолютно произвольно, абстрактно, не вдаваясь в экономический смысл математических преобразований. Фишер считает свои тесты критериями, которым должны удовлетворять вообще все индексы, но постепенный отказ в период с 1911 по 1922 г. от большинства из этих тестов говорит о том, что не все агрегатные индексы и не всегда могут им соответствовать. В то время как для индивидуальных индексов тесты являются вполне естественными, в области взвешенных индексов они теряют свое значение.

Система тестирования исходит из ложной предпосылки равноценности экономических факторов. В действительности же экономические факторы, отражая различные экономические явления, влияют по-разному, имеют разные единицы измерения и т.д. Не удивительно, что в этих условиях все попытки И. Фишера и его последователей сконструировать некую «идеальную» формулу для всех факторов, для всех индексов не оказались успешными.

Комбинируя три типа средних и две позиционные средние с четырьмя типами весов, И. Фишер перебирает различные варианты, совпадающие в том числе с формулами Ласпейреса и Пааше. Используя всевозможные комбинации нескольких видов средних, меняя базисные и отчетные веса, ученый строил факторные антитезы – формулы-кроссинги. Многие новые формулы не поддавались никакой экономической и логической интерпретации. Конструкции некоторых формул-мутантов поражали воображение. Такой метод исследования, конечно, легко критиковать, можно назвать его механическим, абстрактным. Однако следует признать, что данный подход упорядочил систему индексов, позволил создать новую архитектуру формул.

Убедившись в крайней формальности системы тестирования, отметим все же, что механизм отбора формул, в конечном счете,

надежен. Одновременно алгебраический подход привлекает своей простотой и конструктивностью.

И. Фишер первым пытался разрешить задачу индексного анализа. Однако это относится только к анализу индексов, а не абсолютных приростов. Тем не менее он ввел экономически оправданное и необходимое требование, чтобы индекс сложного явления – стоимости продукции – разлагался по факторам. Но поскольку в концепции И. Фишера индексы имеют самодовлеющее значение, произошел отрыв индексов от тех абсолютных экономических величин, возникновение которых обусловлено динамикой данного показателя. Поэтому большинство из протестированных им индексов не имело реального экономического смысла.

Обобщая сказанное, можем сказать, что индексный метод на первоначальной стадии своего развития прошел этап ничем не ограниченного конструктивизма. Было предложено множество различных, внешне одинаково удачных конструкций индексов, различавшихся в основном по способу взвешивания. Однако ни одна из них не давала идеального числового результата.

В дальнейшем одни известные индексологи видели выход в создании новой системы тестов, которая не противоречила бы экономическим фактам. Например, попытка создания новой системы тестов предпринималась норвежским экономистом Р. Фришем [5], а Л. Борткевич создал новый прием, состоящий в оценке индексов с точки зрения удовлетворения тестам-аксиомам и сравнении их между собой. Другие авторы отказываются от части тестов либо объявляют их необязательными. Так, известный английский индексолог Р. Аллен считает циркулярный тест необязательным [4. С. 53]. Напротив, шведский экономист Э. Руист отмечает: «Вопреки сомнениям Фишера реализация циркулярного теста – очень желательное свойство и оно часто используется в цепных индексах» [6. С. 453]. О необходимости циркулярного теста заявляли Л. Борткевич, Ф. Дивизиа, К. Джини.

Итак, в начале XX в. сторонники тестовой теории разработали ряд серьезных подходов и внесли решающий вклад в развитие математической стороны индексной концепции. Одновременно в теоретическом плане

наметился определенный застой. Авторы вновь и вновь обращались к тестам, строили все новые и новые индексы, но не смогли создать всесторонне обоснованную научную концепцию.

В современный период индийский исследователь С. Субраманиан, анализируя критерии Фишера, упростил систему тестов, сократив их число с семи до пяти, оставив следующие: пропорциональности, циркулярности, определенности, соизмеримости, обратимости факторов [7]. Он предложил свой способ доказательства совместимости и применимости тестов. В соответствии с теоремой Свами, первый, второй, четвертый и пятый тесты – несовместимы, поскольку нет такой индексной формулы, которая удовлетворяла бы им всем.

Свами сконструировал свою формулу «идеального» индекса, которая внешне сходна с индексом Фишера [7]:

$$P_s = \sqrt{\frac{\sum p_i q_i}{\sum p_s q_s} \cdot \frac{\prod (p_i + q_i)^c}{\prod (p_s q_i)^c}} \quad (5)$$

Экономический смысл приведенной формулы крайне туманный в связи с суммированием цен и количеств в числителе. Сфера практического применения данного индекса, вероятно, будет ограниченной, поскольку вычисления чрезмерно усложнены.

Другим современным направлением тестовой концепции является аксиоматическая теория индексов, развиваемая немецким индексологом В. Айхорном и французским статистиком Г. Дюоном. Например, последний предлагает статистикам выработать своеобразное соглашение о свойствах индексов и выразить их в виде системы аксиом. Для аксиоматического подхода характерно стремление привязать к системе аксиом соответствующие тесты.

Аксиоматический подход представляет собой обычную тавтологию. Вначале формулируются некие свойства индексов, а затем эти же свойства выводятся в форме тестов.

В. Айхорн исследует индексы по пяти тестам: пропорциональности, циркулярности, определенности, соизмеримости, обратимости факторов [8]. Причем для каждого теста вводит ослабленную в сравнении с ба-

зовым критерием форму. «Идеальная» формула Фишера удовлетворяет четырем «сильным» и одному «слабому» критериям.

Аксиоматический подход позволил несколько смягчить противоречивый характер тестов Фишера. Однако В. Айхорн признал, что нет такой индексной формулы, которая бы удовлетворяла всем критериям одновременно.

Подводя итог сказанному, отметим, что тестовая система, конечно, занимает центральное место в индексологии. До сих пор все авторы дают ссылки на работы Фишера и опираются на его идеи. Создание тестовой системы имело огромное значение для развития индексологии. С ее помощью удалось разрешить противоречие, возникающее в связи с множественностью формул индексов, и навести в этой области определенный порядок. И. Фишер создал стройную систему критериев, которые позволяют выделить из массы формул лучшую. Он также вывел ряд новых формул. Несомненно, тестовая концепция укрепила фундамент индексной теории. В то же время основная слабость тестовой теории – избыточность математических приемов и критериев, а также отсутствие экономического содержания. Поэтому исследования в данной области остаются по-прежнему очень актуальными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Фишер И. Построение индексов / Пер. с англ. М.: Изд-во ЦСУ СССР, 1928.
2. Davies D. On an index of quality change // Journal of the American Statistical Association. 1939. № 3.
3. Кевеш П. Теория индексов и практика экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 1990.
4. Аллен Р. Экономические индексы / Пер. с англ. М.: Статистика, 1980.
5. Frisch R. Annual survey of general economic theory: the problem of index numbers // Econometrica. 1936. № 1.
6. Ruist E., Hoover E.D., Me Carthy P.J. Index numbers // International encyclopedia of statistics. New York. 1978. V. I.
7. Subramanian S. Comparability of Fischer's Tests for Index Numbers Formula // The Mathematics Student. 1940. V. VIII. № 3.
8. Eichhorn W. Zur axiomatischen Theorie des Preisindex // Demonstratio Mathematica. Warszawa. 1973. V. 6. № 2.