обучения – 94 %, доходами – 83 %, а образом жизни – 95 %. Образ жизни человека – главный фактор, определяющий его здоровье. 97 % студентов отметили его важность. Относительно неважным считается такой параметр, как процесс обучения.

Т. А. Орлянин
Научный руководитель – кандидат физико-математических наук С. С. Белявский

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГОРОДА НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

В данной работе используется способ представления города (городской системы) с помощью системы дифференциальных уравнений Лоренца. В программе Matlab/Simulink создана компьютерная модель городской системы, проведен анализ неподвижных точек системы на устойчивость, а также изучено поведение системы при оказании на нее стационарных воздействий.

Город относится к динамическим социально-экономическим системам с множеством прямых и обратных связей, имеющих нелинейный характер. Подобный вид систем имеет сложную внутреннюю структуру, их поведение оказывается настолько многообразным, что приобретает характер хаотический. Многие авторы [1] считают правомерным представить динамику города с помощью системы Лоренца, которая иллюстрирует хаотическое поведение. Вместе с тем она имеет строго определенный закон развития, представленный тремя нелинейными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрим в пространстве метрополии небольшую городскую систему. Предположим, что в отношении экономической деятельности она очень «мала» в сравнении с метрополией. Пространство метрополии в краткосрочном периоде можно рассматривать как стационарное окружение. Допустим, что фирмы и постоянное население свободны в выборе местонахождения и в городском пространстве, и во «внешнем мире». Чтобы описать характеристики расположения городского пространства используем следующие три переменные: X – продукция, производимая городской системой; Y – численность коренного населения; Z – земельная рента.

Продукция городской промышленности может идти на потребление или экспортироваться вовне. Вполне справедливо предположить, что возможна следующая динамика города:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= a_1(a_2Y - a_3X), \\ \frac{dY}{dt} &= c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ, \\ \frac{dZ}{dt} &= d_1XY - d_2Z, \end{aligned} \tag{1}$$

где a_i, c_i и d_i – положительные параметры. Параметр a_2 – спрос на городскую продукцию, нормированный на душу населения, a_3 – уровень предложения продукции внутри города. Параметр a_1 – коэффициент, имеющий смысл скорости установления. Изменение численности городского населения будет задаваться двумя членами $c_1(c_2X - c_3Y)$ и $-c_4XZ$. Величина c_2 – спрос на труд со стороны фирм для производства единицы продукции. Параметр c_3 определяет отношение численности городских жителей, выбирающих работу в городе, к общей численности городского населения. Величина c_3Y задает общую величину предложения труда на городском рынке труда. Таким образом, член $c_1(c_2X-c_3Y)$ – избыток спроса на труд в городе. Он, в свою очередь, влияет на направление миграции. На миграцию влияет также величина земельной ренты, так как люди выбирают для проживания местности с низкой ценой на землю. В данном случае член c_4XZ учитывает этот фактор. Логично предположить, что любое изменение величины земельной ренты отрицательно влияет на ее текущий уровень. Это соображение основано на том, что если земельная рента очень высока, то увеличить ее дальше трудно. Данный факт отражает член d_2Z. А член d_1XY означает, что на изменение земельной ренты положительно влияют X и Y – объем производимой продукции и численность населения [1, с. 173].

Теперь введем новые переменные следующим образом [1]

$$t = \frac{t^*}{c_1c_3}, \quad \sigma = \frac{a_1a_3}{c_1c_3}, \quad r = \frac{a_2c_2}{a_3c_3}, \quad b = \frac{d_2}{c_1c_3}, \tag{2}$$

$$x = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1X}{c_1c_3}, \quad y = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{1/2} \frac{d_1a_2Y}{a_3c_1c_3}, \quad z = \frac{c_4a_2Z}{a_3c_1c_3}. \tag{3}$$

После проведения преобразования по данным формулам исходная система становится идентична системе Лоренца

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz. \end{cases} \tag{4}$$

С точки зрения дифференциальных уравнений система Лоренца является нелинейной диссипативной автономной динамической системой. При $r < 1$ система имеет одно состояние равновесия, расположенное в начале координат, а при $r \geq 1$ – три состояния равновесия:

$$x = 0, y = 0, z = 0,$$

$$x = \sqrt{r-1}, y = \sqrt{r-1}, z = r - 1, \tag{6}$$

$$x = -\sqrt{r-1}, y = -\sqrt{r-1}, z = r - 1. \tag{7}$$

Результаты анализа неподвижных точек на устойчивость представлены в таблице.

Таблица

Анализ неподвижных точек на устойчивость

Значение параметра	Описание поведения системы
$r < 1$	точка (5) является устойчивым узлом
$r = 1$	точка (5) перестает быть аттрактором
$1 \leq r \leq 1{,}4$	точки (6), (7) являются устойчивыми узлами
$1{,}4 \leq r < 13{,}927$	точки (6), (7) являются устойчивыми фокусами
$r \approx 13{,}927$	траектория, совершив полный оборот вокруг одной из устойчивых точек, вернется в начальную точку (возникают 2 гомоклинические петли)
$r = 24{,}06$	возникает странный аттрактор
$r = 24{,}74$	неподвижные точки теряют устойчивость, аттрактор Лоренца остается единственным притягивающим множеством
$r > 100$	система переходит в режим автоколебаний

Примечание. Источник: собственная разработка.

Чтобы провести анализ поведения системы, мы построили ее модель с помощью приложения Simulink прикладного пакета Matlab. Изучив динамику системы при включении поочередно в уравнения дополнительных воздействий в виде константы и синусоидального сигнала, мы обнаружили, что система сохраняет диссипативность. С экономической точки зрения эти воздействия можно интерпретировать для первого уравнения как рост (снижение) налоговой нагрузки на предприятия (налог на прибыль, НДС, акцизы, налог на имущество предприятий, платежи за пользование природными ресурсами), выделение субсидий из госбюджета, рост (снижение) инвестиционной активности; для второго уравнения как рост (снижение) социальных расходов в части организации, содержания и развития учреждений образования, здравоохранения, культуры, физической культуры и спорта, СМИ, организация правоохранительной деятельности и обеспечение безопасности, расходы бюджета на строительство жилого фонда; для третьего уравнения как дорожное строительство и содержание дорог, благоустройство и озеленение территорий, изменения в городской инфраструктуре.

Таким образом:

1) использование в качестве модели города системы Лоренца позволяет изучать поведение городской системы как детерминированное;

2) оказание на городскую систему воздействий, необходимых для управления ее развитием, не нарушает ее диссипативность, хотя при некоторых условиях малые воздействия могут превратить устойчивое поведение системы в хаотическое.

Список литературы

1. *Занг, В. Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной теории / В. Б. Занг; пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 335 с.

2. *Цисарь, И. Ф.* Matlab Simulink. Компьютерное моделирование экономики / И. Ф. Цисарь. – М.: СОЛОН–Пресс, 2008. – 256 с.