

Учреждение образования “Белорусский государственный экономический университет”

УТВЕРЖДАЮ

Ректор учреждения образования  
“Белорусский государственный  
экономический университет”

\_\_\_\_\_ В.Н.Шимов

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2018 г.

Регистрационный № УД 3562-18/уч.  
25.06.2018

## **ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА**

Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности  
1-31 03 06 «Экономическая кибернетика (по направлениям)»

**Составители:**

- Г.О. Читая, заведующий кафедрой математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», доктор экономических наук, доцент;
- С.С. Белявский, доцент кафедры математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

**Рецензенты:**

Кафедра высшей математики и математической физики учреждения образования Белорусского государственного университета (протокол № от г.)

И.В. Кашникова, доцент кафедры менеджмента учреждения образования «Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент.

**Рекомендована к утверждению**

Кафедрой математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол № 11 от 24.05.2018 г.);

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет»

(протокол № \_ от \_\_\_\_\_)

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Геометрия и алгебра» является одной из основных составляющих математического образования экономиста-кибернетика. В ней закладываются основные понятия и необходимые знания для всех математических дисциплин и экономических дисциплин, базирующихся на применении математики. При этом раздел аналитической геометрии служит «мостиком» от школьной математики к высшей, он напрямую привязан к основам школьной геометрии и алгебры. Одним из главных понятий, вводимых в этом курсе, является понятие вектора и его обобщения в виде абстрактного элемента векторного пространства. Именно переход к абстрактному восприятию векторов вызывает наибольшие затруднения. Его усвоение позволит на достаточном уровне воспринимать все основные разделы высшей математики.

Материал учебной дисциплины является базовым для всех учебных дисциплин, использующих математические методы: «Численные методы», «Методы оптимизации», «Математическая экономика», «Эконометрика» и др.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

- основы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве,
- основные понятия высшей алгебры;
- основы линейной алгебры;

**уметь:**

- применять метод координат при исследовании алгебраических кривых и поверхностей первого и второго порядков;
- решать основные задачи теории векторных, евклидовых и унитарных пространств,;
- решать системы линейных алгебраических уравнений;
- применять аппарат аналитической геометрии и линейной алгебры при решении задач специальности;

**владеть:**

- аппаратом алгебры и аналитической геометрии;
- навыками исследования геометрических объектов, задаваемых уравнениями первой и второй степени;
- навыками использования матричных методов для решения задач линейной алгебры.

В соответствии с образовательным стандартом учебная программа предусматривает для изучения учебной дисциплины - всего часов 324, в том числе всего часов аудиторных 188 часов, а также следующие формы текущей аттестации – зачеты, экзамены, контрольные работы не менее двух в каждом семестре и курсовая работа.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Тема 1. Матрица и определители

Матрицы, виды матриц. Линейные операции над матрицами, их свойства. Умножение матриц, его свойства. Транспонирование матриц. Блочные матрицы. Определители матриц 1, 2 и 3-го порядков. Миноры и алгебраические дополнения элементов квадратных матриц, правило Лапласа для вычисления определителя. Свойства определителей. Вычисление определителей с применением правила «прямоугольника». Обратная матрица, алгоритм ее нахождения. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Элементарные преобразования строк матриц, ступенчатые матрицы, правило «прямоугольника». Нахождение обратной матрицы элементарными преобразованиями.

### Тема 2. Системы линейных уравнений (СЛУ)

Система линейных уравнений, ее матричная запись, виды систем линейных уравнений. Метод обратной матрицы для решения СЛУ. Правило Крамера. Метод Гаусса, прямой и обратный ход. Неопределенные СЛУ, свободные и базисные неизвестные. Системы однородных линейных уравнений, фундаментальная система решений. Общее решение однородной и неоднородной СЛУ.

### Тема 3. Экономические модели

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Матрицы прямых и полных затрат. Продуктивные модели Леонтьева. Модель равновесных цен.

### Тема 4. Элементы векторной алгебры

Понятие вектора. Свободные и связанные векторы. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису. Аффинная система координат. Скалярное, векторное, смешанное и двойное векторное произведения. Критерии коллинеарности, компланарности и перпендикулярности векторов.

### Тема 5. Метод координат. Линии и поверхности и их уравнения

Декартовы прямоугольные координаты. Простейшие задачи аналитической геометрии: расстояние между двумя точками, деление отрезка в заданном отношении. Линии на плоскости и в пространстве и их уравнения в координатах. Параметрические уравнения линии. Явное, неявное и параметрическое задание поверхности в пространстве. Точки пересечения линий. Полярные координаты.

### Тема 6. Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой, геометрический смысл его коэффициентов. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой в отрезках. Параметрическое уравнение прямой. Нормальное уравнение прямой.

Расстояние от точки до прямой. Взаимное расположение пары прямых и угол между ними. Пучок прямых на плоскости

#### Тема 7. Линии второго порядка .

Канонические уравнения эллипса, гипербола и параболы. Фокусы и директрисы линий второго порядка. Уравнения линий второго порядка в полярных координатах.

#### Тема 8. Прямая и плоскость в пространстве.

Различные виды уравнений прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Пучок плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

#### Тема 9. Поверхности второго порядка

Канонические уравнения поверхностей второго порядка, вид поверхностей, прямолинейные образующие. Классификация поверхностей второго порядка.

#### Тема 10. Многомерное пространство. Понятие о неевклидовой геометрии

Аффинное многомерное пространство, координаты в нем и замена координат. Прямая, плоскость и гиперплоскость. Понятие о неевклидовой геометрии. Псевдоскалярное произведение векторов, пространство Минковского и его геометрия.

#### Тема 11. Выпуклые множества в пространстве $\mathbf{R}^n$

Выпуклые множества в пространстве  $\mathbf{R}^n$ . Полупространства, выпуклые многогранные области. Системы линейных неравенств и их геометрический смысл. Угловые точки выпуклых многогранных областей. Выпуклая оболочка системы точек в  $\mathbf{R}^n$ .

#### Тема 12. Комплексные числа и многочлены

Понятие комплексного числа и его геометрическая интерпретация. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Арифметические операции над комплексными числами и их геометрическая трактовка. Формула Муавра. Корни из единицы. Понятие многочлена и его корней. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители первой и второй степени.

#### Тема 13. Векторные пространства

Определение и примеры векторных пространств. Линейная зависимость систем векторов. Простейшие свойства. Линейная зависимость и независимость. Базис и координаты. Связь между размерностью и базисом. Матричная запись координат векторов, изменение координат при изменении базиса. Ранг системы векторов. Подпространство векторного пространства. Линейная оболочка системы элементов линейного пространства. Сумма и

пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Изоморфизм векторных пространств, универсальный пример конечномерного векторного пространства.

#### Тема 14. Линейные операторы

Линейный оператор, примеры, образ и прообраз вектора. Задание линейного оператора матрицей. Изменение матрицы оператора при изменении базиса. Собственные векторы линейного оператора, собственные значения, характеристическое уравнение. Система линейных однородных уравнений для нахождения собственных векторов. Приведение матрицы оператора к диагональному виду.

#### Тема 15. Неотрицательные матрицы

Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц. Теорема Фробениуса. Число и вектор Фробениуса. Продуктивность неотрицательных матриц. Связь продуктивности с числом Фробениуса. Модель бездефицитной торговли.

#### Тема 16. Квадратичные формы

Квадратичная форма и ее матричная запись. Изменение матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных, канонический вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду, закон инерции для квадратичных форм. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

#### 17. Евклидовы пространства

Скалярное произведение. Вещественные и унитарные пространства, псевдоевклидовы пространства. Неравенства Коши-Буняковского. Нормированные пространства. Существование ортогонального базиса. Матрица Грама и ее свойства. Разложение пространства в прямую сумму подпространств.

#### Тема 18. Линейные операторы в евклидовых пространствах

Ортогональные, унитарные, эрмитовы и симметричные матрицы. Сопряженный линейный оператор и его матрица. Самосопряженные линейные операторы и изометрии. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора. Приводимость эрмитовых и симметричных матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА»  
ДЛЯ ДНЕВНОЙ ФОРМЫ ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Номер темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Иное	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР			
						Лек- ции	ПЗ (СЗ)		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Матрицы и определители	10	8					[1, 2, 4, 6]	тест
2	Системы линейных уравнений	8	8					[1, 2, 4, 6]	опрос, отчет
3	Экономические модели	4			2			[1, 6, 4доп]	опрос, отчет
4	Элементы векторной алгебры	6	6					[4, 5, 6]	письменная самостоятельная работа, отчет
5	Метод координат. Линии и поверхности и их уравнения	2	1					[4, 5, 6]	опрос, отчет
6	Прямая на плоскости	6	7					[4, 5, 6]	опрос, отчет
7	Линии второго порядка	4	4					[4, 5, 6]	Письменная контрольная работа, отчет
8	Прямая и плоскость в пространстве	4	6					1[4, 5, 6]	опрос, отчет
9	Поверхности второго порядка	4	4					[4, 5, 6]	Зачет, экзамен
10	Многомерное пространство. Понятие о неевклидовой геометрии	2	2					[6]	опрос, отчет
11	Выпуклые множества в пространстве $R^n$	4	4					[6]	опрос, отчет

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	Комплексные числа и многочлены	6	6					[7]	опрос, отчет
13	Векторные пространства	8	6					[4, 6]	опрос, отчет
14	Линейные операторы	8	8					[4, 6]	Письменная самостоятельная работа опрос, отчет опрос, отчет
15	Неотрицательные матрицы	2	2					[4, 6]	опрос, отчет
16	Квадратичные формы	4	4					[4, 6]	опрос, отчет
17	Евклидовы пространства	6	6					[4, 6]	опрос, отчет
18	Линейные операторы в евклидовых пространствах	8	8					[4, 6]	Письменная контрольная работа, отчет опрос, отчет
	<b>Всего часов</b>	<b>96</b>	<b>90</b>			<b>2</b>			Зачет, экзамен



## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В овладении знаниями учебной дисциплины важным этапом является самостоятельная работа студентов. Рекомендуется бюджет времени для самостоятельной работы в среднем 2-2,5 часа на 2-х часовое аудиторное занятие.

Основными направлениями самостоятельной работы студента являются:

- первоначально подробное ознакомление с программой учебной дисциплины;
- ознакомление со списком рекомендуемой литературы по дисциплине в целом и ее разделам, наличие ее в библиотеке и других доступных источниках, изучение необходимой литературы по теме, подбор дополнительной литературы;
- изучение и расширение лекционного материала преподавателя за счет специальной литературы, консультаций;
- подготовка к практическим занятиям по специально разработанным планам с изучением основной и дополнительной литературы;
- подготовка к выполнению диагностических форм контроля (тесты, контрольные работы, устные опросы и т.п.);
- подготовка к зачету, экзамену.

### ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремера [и др.]; под.ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1998.
2. Высшая математика. Общий курс / С.А. Самалая [и др.]; под.ред. С.А. Самалая. – Минск: Вышэйшая школа, 2000.
3. Белько, И.В. Высшая математика для экономистов. I семестр: Экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузьмич. – Минск: Новое знание, 2007.
4. Березкина, Л.Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Л.Л. Березкина – Минск: БГУ. 2012.
5. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1999.
6. Орлова, И.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов / И.В. Орлова, В.В. Угрозов, Е.С. Филонова. – М.: Из-во Юрлайт, 2015.
7. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2012.

Дополнительная:

1. Общий курс высшей математики для экономистов / Ю.Н. Ермакова [и др.]; под.ред. Ю.Н. Ермакова. – М.: ИНФРА, 2001.
2. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.С. Феденко [и др.]; под.ред. А.С. Феденко. – Минск: Унверсітэцкае, 1997.
3. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1980.

4. Бе́лявский, С.С. Высшая математика: решение задач / С.С. Бе́лявский, Н.А. Широкова – Минск: Вышэйшая школа, 2004.
5. Ко́нюх, А.В. Сборник задачи упражнений по высшей математике для экономических специальностей. Часть I / А.В. Ко́нюх, Ко́сьянчук В.В., Майоровская СВ. – Минск: БГЭУ, 2008.
6. Со́лодовников, А.С. Математика в экономике: В 2 ч. / А.С. Со́лодовников, В.А. Баба́йцев, А.В. Бра́йлов. – М.: Финансы и статистика, 1998-1999.
7. Ты́шкевич, Р.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Ты́шкевич, А.С. Фе́денко. – Минск.: Вышэйшая школа, 1997.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и Номера протокола)
«Численные методы», «Методы оптимизации»	Математических методов в экономике	Согласовано, дублирования тем нет	Утверждено. Протокол №11 от 24.05.2018

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ**  
на 2018/2019 учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.)

Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета  
\_\_\_\_\_