3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ

3.1. Матрицы.

При описании сложных социальных систем и психологических явлений, многомерных объектов, записи числовых данных многомерных факторов, влияющих на состояние систем, используются математические таблицы, которые называются *матрицами*. Матрицы различаются по мерности, размеру, наличию или отсутствию специальных пометок.

Например, таблица, содержащая экзаменационные оценки по m предметам студентов трех групп, каждая из которых состоит, соответственно, из k, l и n человек, может быть записана в следующем виде

Таблица 3.1.

	Группа № 1			Группа № 2			Группа № 3		
Предметы	1.Ф.И.О	…	k.Ф.И.О	1.Ф.И.О	…	l.Ф.И.О	1.Ф.И.О	…	n.Ф.И.О
Пр.1	a_{111}	…	a_{1k1}	a_{112}	…	a_{1l2}	a_{113}	…	a_{mn3}
Пр.2	a_{211}	…	a_{2k1}	a_{212}	…	a_{2l2}	a_{113}	…	a_{2n3}
…	...	…	...	…	…	…	…	...	...
Пр.m	a_{m11}	…	$a_{m\,k\,1}$	a_{m12}	…	a_{ml2}	a_{m13}	…	a_{mn3}

Таблица 3.1. определяет помеченную матрицу, в которой метками Пр.1, Пр.2, … , Пр.m обозначены наименования и номера предметов, а 1.Ф.И.О, … k.Ф.И.О; 1.Ф.И.О, … l; 1.Ф.И.О, … , n.Ф.И.О — пронумерованные фамилии, имена и отчества студентов, соответственно, первой второй и третьей групп.

Оценки по i-му предмету j-го студента первой, второй и третьей групп обозначены символами $a_{i\,j\,1}$, $a_{i\,j\,2}$ и $a_{i\,j\,3}$. В данном случае оценки являются элементами данной помеченной матрицы. Тройные номера в записи элементов называются их *индексами*.

Число индексов в записи элементов называется *мерностью* матрицы, а произведение наибольших значений индексов — *размерностью* матрицы. Выписанная помеченная матрица *трехмерна*, а ее размер равен $k \times l \times n$.

Для описания сложных социальных систем, состоящих из вложенных друг в друга подсистем, могут использоваться *n-мерные матрицы* любого размера.

Для определения средних оценок по i-му предмету в каждой группе нужно сложит элементы i-й строки таблицы 3.1, относящиеся к соответствующей группе, и разделить полученную сумму на число студентов, т.е. вычислить

$$s_{i1} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_{i1j}\,, \qquad s_{i2} = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} a_{i2j}\,, \qquad s_{i3} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i3j}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Проведенные вычисления показывают, что над элементами матриц можно выполнять операции сложения и умножения на числа.

Результат вычисления средних оценок представим в виде таблицы 3.2, которая определяет *двумерную помеченную матрицу* размера $m \times 3$ вида.

Если требуется определить, насколько средний балл по m-му предмету у первой группы выше или ниже, чем у второй, то нужно вычислить разность $s_{m1} - s_{m2}$. Таким образом, над элементами матриц можно выполнять операцию вычитания. Перечисленные операции, выполняемые над элементами матриц, индуцируют операции сложения, умножения на число (скаляр) и вычитание самих матриц.

Таблица 3.2.

Предметы	Группа № 1	Группа № 2	Группа № 3
Пр.1	s_{11}	s_{12}	s_{13}
Пр.2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
…	...	...	…
Пр.m	s_{m1}	s_{m2}	s_{m3}

Следует помнить основное правило выполнения операций над помеченными матрицами: *операции сложения, умножения на число и вычитание можно выполнять только над матрицами одной и той же мерности и одинакового размера.*

Вопрос о возможности выполнения операций над элементами матриц с различными пометками решается в зависимости от поставленной задачи. Например, при вычислении средних оценок в каждой группе выполнялись операции над элементами матриц, соответствующих каждой группе. Если же требуется вычислить средние оценки по факультету, к которому относятся все три группы студентов, то нужно сложить соответствующие элементы каждой строки таблицы 3.1 и умножить полученные суммы на дробь $\dfrac{1}{k+l+n}$.

На примере 3-х мерной помеченной матрицы, определяемой таблицей 3.1, можно убедиться в том, что операции, выполняемые над элементами n-мерных матриц, при любом натуральном числе n, можно свести к выполнению соответствующих операций над элементами двухмерных матриц, которые являются частями, т.е. блоками многомерной матрицы.

Таблица 3.3.

Группа № 1			
Предметы	1.Ф.И.О	…	k.Ф.И.О
Пр.1	a_{111}	…	a_{1k1}
Пр.2	a_{211}	…	a_{2k1}
…	…	…	…
Пр.m	a_{m11}	…	a_{mk1}

Таблица 3.4.

Группа № 2			
Предметы	1.Ф.И.О	…	n.Ф.И.О
Пр.1	a_{112}	…	a_{mn2}
Пр.2	a_{112}	…	a_{2n2}
…	…	…	…
Пр.m	a_{m12}	…	a_{mn2}

Действительно, помеченная матрица, определяемая таблицей 3.1, является блочной. Ее блоками являются помеченные матрицы, определяемые, соответственно, таблицами 3.3 — 3.5, которые можно считать двумерными, так как третьи индексы их элементов совпадают.

Таблица 3.5.

Группа № 3			
Предметы	1.Ф.И.О	…	n.Ф.И.О
Пр.1	a_{113}	…	a_{mn3}
Пр.2	a_{113}	…	a_{2n3}
…	…	…	…
Пр.m	a_{m13}	…	a_{mn2}

Таблица 3.6.

Предметы	Группа № 1	Группа № 2	Группа № 3
Пр.1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Пр.2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
…	...	...	…
Пр.m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}

После разбиения трехмерной помеченной матрицы на блоки задачу вычисления средних оценок по всем трем группам при условии $k = l = n$ можно решить следующим образом. Сложить элементы с одинаковыми первыми индексами помеченных матриц, определяемых таблицами 3.3 — 3.5. В результате получим двухмерную матрицу размера $m\times3$, определяемую таблицей 3.6. Умножив далее все ее элементы на $\frac{1}{3n}$, получим средние оценки по трем группам.

Из приведенных выше примеров следует, что при изучении свойств матриц и выполняемых над ними операций достаточно рассматривать двумерные матрицы. Кроме этого, в матричном исчислении пометки матриц не используются, что позволяет применять их для описания любых социологических и психологических явлений и систем.

Матрицы и операции, выполняемые над ними. Двумерной матрицей (далее просто матрицей) размера $m\times n$ (или $m\times n$-матрицей) называется числовая таблица, содержащая m строк и n столбцов следующего вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Число a_{ij}, стоящее на пересечении i-той строки и j-того столбца матрицы называется ее элементом, натуральные числа i и j — его индексами, первый из которых принимает значения от 1 до m, а второй — от 1 до n, т.е. $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$. Матрицы обычно обозначаются прописными буквами латинского алфавита, например, A, B, C и т.д. Если при этом требуется указать размерность матрицы A, то используется запись $A_{m\times n}$.

Для упрощенного обозначения матрицы A размера $m\times n$ используется запись $A=[a_{ij}]_{m\times n}$. Для окаймления элементов матрицы используются также круглые скобки, в этом случае полагается $A=(a_{ij})_{m\times n}$. Элементы $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}$ называются i-той строкой, а $a_{1j},a_{2j},\dots,a_{mj}$ — j-тым столбцом матрицы $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, где $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.

Матрица размера $m\times n$ называется *прямоугольной*, если $m\neq n$. При $m=n$ матрица называется *квадратной матрицей* порядка n. Элементы $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ квадратной матрицы $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ образуют *главную диагональ* и называются *диагональными*. Неглавную (побочную) диагональ квадратной матрицы образуют элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n-1\,2}, a_{n1}$.

Виды матриц. В зависимости от вида элементов матриц различают верхнетреугольные, нижнетреугольные, диагональные, ступенчатые и трапециевидные матрицы.

Квадратная матрица $A=[a_{ij}]$ порядка n называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*), если все ее элементы, расположенные ниже (выше) диагонали, равны нулю, т.е. выполняются соотношения:

$$a_{ji}=0 \ \ (a_{ij}=0), \ \ i<j, \ \ j=2,3,\ldots,n, \ \ i=1,2,\ldots,j-1.$$

Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, возможно, за исключением диагональных, равны нулю. Диагональная матрица называется *единичной* матрицей, если все ее диагональные элементы равны единице. Для ее обозначения используется буква E.

Прямоугольная матрица $A=[a_{ij}]$ размера $m \times n$ называется *ступенчатой*, если первыми ненулевыми элементами ее первых r строк, $r \le m$, являются, либо элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$, либо первые ненулевые элементы, лежат правее их, при этом первый ненулевой элемент каждой из строк лежит правее первого ненулевого элемента предшествующей строки в записи матрицы A. Кроме этого, при $r<m$ все строки ступенчатой матрицы, начиная с $(r+1)$-вой, являются нулевыми, т.е. все их элементы равны нулю. Если первые ненулевые элементы первых r строк матрицы A обозначить

$$a_{1j_1}, \ a_{2j_2}, \ldots, a_{k-1j_{k-1}}, \ a_{kj_k}, \ldots, a_{r-1j_{r-1}}, \ a_{rj_r},$$

то в силу приведенного определения должны выполняться соотношения:

$$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} < j_k < \ldots j_{r-1} < j_r, \quad j_k \ge k, \ \ k=1,2,\ldots,r.$$

Как правило, полагается $j_1=1$. При выполнении указанных условий ступенчатая матрица имеет вид:

$$A=\begin{bmatrix}
\boldsymbol{a}_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j_2-1} & a_{1j_2} & \ldots & a_{1j_k-1} & a_{1j_k} & \ldots & a_{1j_r-1} & a_{1j_r} & \ldots & a_{1n} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{a}_{2j_2} & \ldots & a_{2j_k-1} & a_{2j_k} & \ldots & a_{2j_r-1} & a_{2j_r} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{a}_{kj_k} & \ldots & a_{kj_r-1} & a_{kj_r} & \ldots & a_{kn} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \boldsymbol{a}_{rj_r} & \ldots & a_{rn} \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{bmatrix}$$

В записи матрицы A первые ненулевые элементы ее первых r строк выделены жирным шрифтом. Ступенчатая матрица называется *трапециевидной*, если $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ — первые ненулевые элементы ее первых r строк. Частным случаем трапецевидных матриц являются верхнетреугольные матрицы с ненулевыми диагональными элементами. Ниже приводятся примеры ступенчатой, трапециевидной, верхнетреугольной и диагональной матриц:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

В теории и на практике находят применение, так называемые симметрические матрицы. Квадратная матрица $A=[a_{ij}]$ порядка n называется *симметрической*, если ее элементы, расположенные симметрично относительно диагонали, равны, т.е. если для ее элементов справедливы соотношения

$$a_{ij}=a_{ji}, \; i=2,3,\ldots,n, \; j=1,2,\ldots,i-1.$$

Нулевой матрицей называется такая матрица, у которой все элементы нули. Для ее обозначения используется прописная латинская буква O.

Две матрицы $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ и $B=[b_{ij}]_{k\times \ell}$ считаются равными, если совпадают их размерности и их элементы с одинаковыми индексами равны, т.е.

$$m=k, \quad n=\ell, \; a_{ij}=b_{ij}, \; i=1,2,\ldots,m, \; j=1,2,\ldots,n.$$

Матрица $A=[a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}]$ размера $1\times n$ называется матрицей-строкой, а матрица $B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ размера $m\times 1$ — матрицей-столбцом. Матрицы указанного вида используются при записи систем линейных уравнений в матричном виде.

Операции, выполняемые над матрицами. В множестве матриц вводятся операции сложения, умножения матрицы на число, вычитания, умножения и транспонирования.

Операция суммирования Суммой $A+B$ матриц $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ размера $m\times n$ называется матрица $C=[c_{ij}]$ такого же размера, элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,m, \; j=1,2,\ldots,n. \tag{3.1}$$

Операция умножения на число. Результатом умножения матрицы $A=[a_{ij}]$ размера $m\times n$ на действительное число α называется матрица $C=[c_{ij}]$ такого же размера, обозначаемая αA, каждый элемент которой является произведением соответствующего элемента матрицы A и α, т.е.

$$c_{ij}=\alpha a_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,m, \; j=1,2,\ldots,n. \tag{3.2}$$

Операция вычитания. Матрица $C=[c_{ij}]_{m\times n}$, являющаяся результатам вычитания матрицы $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ из матрицы $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, называется разностью матриц, обозначается $C=A-B$ и по определению полагается равной

$$C=A-B=A+(-1)B. \qquad (3.3)$$

Из формул (3.1) — (3.3) следует, что матричные операции сложения, умножения матрицы на число и вычитания сводятся к выполнению аналогичных действий над числами и поэтому обладают свойствами соответствующих арифметических операций.

Операция умножения. Результатом умножения матрицы $A=[a_{ik}]$ размера $m\times n$ на матрицу $B=[b_{kj}]$ размера $n\times p$ называется матрица $C=[c_{ij}]$ размера $m\times p$, элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}+\ldots+a_{in}b_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,p. \qquad (3.4)$$

Результат умножения, произведение матриц *A* и *B*, обозначается *AB* (или $A\cdot B$). Из (3.4) вытекает следующее правило умножения матриц.

Произведение AB существует, если число строк первого множителя — матрицы A, равно числу столбцов второго множителя — матрицы B. Чтобы вычислить элемент произведения AB, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца, в матрице A следует выделить i-тую строку, а в матрице B — j-тый столбец. Затем элементы i-той строки умножить на соответствующие элементы j-того столбца и полученные произведения сложить.

Степень A^k квадратной матрицы *A* определяется формулой $A^k=A^{k-1}A$, где k — натуральное число. При $k=1$ по определению полагается $A^{k-1}=A^0=E$.

Пример 3.1. Вычислить $A+B$, αA, $A-B$, AD, если

$$\alpha=2,\qquad A=\begin{bmatrix}-2&0&6\\3&2&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2&0&7\\-3&4&-1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-1&3\\2&0\\4&1\end{bmatrix}.$$

Решение. Матрицы *A* и *B* имеют одинаковую размерность 2×3. Следовательно, матрица $A+B$, определена и имеет ту же размерность 2×3.Скложив по формуле (3.1) соответствующие элементы матриц А и *B*, получим

$$A+B=\begin{bmatrix}-2&0&6\\3&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0&7\\-3&4&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+2&0+0&6+7\\3-3&2+4&1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&13\\0&6&0\end{bmatrix}.$$

Умножив по формуле (3.2) все элементы матрицы *A* на число $\alpha=2$, найдем

$$2A=\begin{bmatrix}2\cdot(-2)&2\cdot 0&2\cdot 6\\2\cdot 3&2\cdot 2&2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0&12\\6&4&2\end{bmatrix}.$$

По определению

$$A-B=A+(-1)B=\begin{bmatrix}-2&0&6\\3&2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0&-7\\3&-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0&-1\\6&-2&2\end{bmatrix}.$$

В начале, используя приведенное правило умножения матриц, убеждаемся в том что число столбцов матрицы A, равное 3, совпадает с числом строк матрицы D, которое также равно 3. Следовательно, произведение AD существует и имеет размерность 2×2.

Выделяя в матрице A первую строку $[-2, 0, 6]$, а в матрице D — первый столбец $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, вычисляя произведения соответствующих элементов и складывая их, получим первый элемент первой строки произведения, равный

$$-2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 26.$$

Далее, выделяя в матрице D второй столбец $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, вычисляя произведения элементов первой строки $[-2, 0, 6]$ матрицы A на соответствующие элементы выделенного столбца и суммируя их получим второй элемент первой строки произведения AD, равный

$$-2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 0.$$

Для нахождения элементов второй строки произведения AD, выделяем в матрице A вторую строку [3, 2, 1]. Затем, поочередно выделяя первый $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ и второй $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ столбцы матрицы D и вычисляя поочередно суммы произведений элементов выделенной строки и соответствующих элементов каждого из выделенных столбцов, находим первый и второй элементы второй строки произведения AD:

$$3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 5, \qquad 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 10.$$

Таким образом, найдено произведение

$$AD = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Проделанные вычисления можно записать в виде цепочки равенств:

$$AD = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 4 & (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц. Операция умножения матриц обладает специфическими свойствами, которыми не обладает операция умножения чисел.

Во-первых, произведение AB определено не для всех пар матриц A, B, а только для тех, у которых число столбцов первого множителя A равно числу строк второго множителя B.

Во-вторых, операция умножения матриц не коммутативна, т.е. не для любых матриц A и B справедливо равенство $AB = BA$, что подтверждает простой пример.

Пусть $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, тогда $AB=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, следовательно $AB \neq BA$.

В-третьих, произведение ненулевых матриц может совпадать с нулевой матрицей. Пусть $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, тогда $AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Кроме указанных свойств, операция умножения обладает свойствами:

1) $(AB)C = A(BC)$ — ассоциативность операции умножения матриц;

2) $(A \pm B)C = AC \pm BC$, $C(A \pm B) = CA \pm CB$ — дистрибутивность операции умножения относительно операции сложения и вычитания матриц;

3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

Операция транспонирования матрицы $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ состоит в замене ее строк столбцами с сохранением их номеров и порядка следования в них элементов. *Транспонированная* матрица A может обозначаться A^T, A' или A^t. Транспонирование матриц является *унарной* операцией и обладает свойствами:

$$(A')' = A; \quad (A \pm B)' = A' \pm B'; \quad (\alpha A)' = \alpha A'; \quad (AB)' = B'A',$$

где α — любое действительное число, A и B — любые матрицы (последнее свойство имеет место для вычисляемых произведений).

Замечание 3.1. Элементами матриц могут быть не только числа, но и функции или алгебраические выражения. Операции над такими матрицами выполняются по аналогии с введенными операциями, выполняемыми над числовыми матрицами. Пусть, например, матрицы A и B имеют вид

$$A=\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ -\cos x & \sin x\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}.$$

Тогда, используя правило умножения матриц, получим:

$$AB=\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ -\cos x & \sin x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & \cos x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin x\cdot\cos x+\cos x\cdot\sin x & \sin x\cdot\sin x+\cos x\cdot\cos x\\ -\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x & -\cos x\cdot\sin x+\sin x\cdot\cos x\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 2x & \sin^2 x+\cos^2 x\\ -(\cos^2 x-\sin^2 x) & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin 2x & 1\\ -\frac{1}{2}\cos 2x & 0\end{bmatrix}.$$

По аналогии с арифметическим, вводится понятие *матричного выражения*, в запись которого входят буквенные обозначения матриц, связанные операциями и скобками, которые указывают на порядок выполнения операций.

Матричным уравнением называется матричное равенство, в запись которого входит неизвестная матрица X. Если X связана с другими матрицами операциями умножения на скаляр, сложением, вычитанием или транспонированием, то матричное уравнение называется *линейным*.

Решаются такие уравнения, как и линейные алгебраические уравнения первой степени, по следующей схеме:

1) раскрыть все скобки, входящие в обе части уравнения;

2) перенести все члены уравнения в левую часть ;

3) вычислить все матричные выражения, входящие в уравнение и не содержащие матрицу X;

4) вычислить матричное выражение, содержащее X, как правило, это сумма матриц вида αX;

5) выразить матрицу X, из полученного матричного равенства $\alpha X + C = O$, где C — результирующая матрица, вычисленная на шаге 3).

Основными задачами подраздела 3.1 являются следующие:

а) вычисление матричных выражений;

б) доказательство матричных соотношений;

в) решение линейных матричных уравнений.

Пример 3.2. Вычислить матричное выражение $AB^T + (2D - C)$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Решение. Вначале последовательно вычисляем:

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix};\ AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$2D - C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

а затем находим результирующую матрицу

$$AB^T + (2D - C) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -7 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -7 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Пример 3.3. Доказать, что для матриц $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ имеет место соотношение $AB \neq BA$.

Решение. Вычисляя произведения AB и BA по формулам (3.4):

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) + 3\cdot 0 \\ 4\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & 4\cdot(-1) + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 4 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-2)\cdot 4 & 0\cdot 2 + (-2)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-2)\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 4 & 2\cdot 2 + 0\cdot 0 & 2\cdot 3 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -8 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

убеждаемся в том, что $AB \neq BA$.

Пример 3.4. Доказать, что для матриц $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ их произведения AB и BA равны нулевой матрице.

Решение. Вычисляя произведения

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}(-1)\cdot 1+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+1\cdot 1\\ (-1)\cdot 1+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+1\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

убеждаемся в том, что они совпадают с нулевой матрицей O.

Пример 3.5. Доказать, что для матриц $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}3b & -b\\ b & 2b\end{bmatrix}$ справедливы равенства $AB = BA$.

Решение. Вычисляя по формуле (3.4) произведения

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3b & -b\\ b & 2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 3b+1\cdot b & 2\cdot(-b)+1\cdot 2b\\ (-1)\cdot 3b+3\cdot b & (-1)\cdot(-b)+3\cdot 2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7b & 0\\ 0 & 7b\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}3b & -b\\ b & 2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3b\cdot 2+(-b)\cdot(-1) & 3b\cdot 1+(-b)\cdot 3\\ b\cdot 2+2b\cdot(-1) & b\cdot 1+2b\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7b & 0\\ 0 & 7b\end{bmatrix},$$

убеждаемся в справедливости равенства AB=BA для указанных матриц.

Пример 3.6. Решить матричное уравнение $A(B+3E)-4(AB^T+X)=-2X+C$, где $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Решение. Применяя указанную выше схему решения, преобразуем исходное матричное уравнение, раскрывая скобки и перенося все члены в левую часть. В результате получаем равносильное уравнение вида:

$$AB+3AE-4AB^T-4X+2X-C=O,$$

где O — нулевая матрица. Приводя подобные члены и группируя все заданные матрицы в одно матричное выражение, получим следующее уравнение:

$$(AB+3AE-4AB^T-C)-2X=O,$$

из которого выражаем $X=\frac{1}{2}(AB+3AE-4AB^T-C)$.

Для завершения решения задачи, осталось вычислить матричное выражение $\frac{1}{2}(AB+3AE-4AB^T-C)$:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix};\qquad 3AE=3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 6 & 3\end{bmatrix};$$

$$4AB^T=4\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -12\\ 4 & 0\end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$X=\frac{1}{2}(AB+3AE-4AB^T-C)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -3\\ 6 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & -12\\ 4 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3 & 7\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/2 & 7/2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Таким образом, $X=\begin{bmatrix}-3/2 & 7/2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ — решение матричного уравнения.

3.2. Определители квадратных матриц и их свойства.

Определителем n-го порядка (или детерминантом) квадратной матрицы $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ называется число, которое вычисляется по определенному правилу и обозначается det A (или Δ_n). При вычислениях используется способ задания определителя в виде таблицы, содержащей элементы матрицы A и окаймленной вертикальными линиями:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (3.5)$$

В этом случае элементы, строки и столбцы матрицы A называются, соответственно, элементами, строками и столбцами определителя (3.5).

Определители матриц используются при решении систем линейных уравнений, в которых число уравнений равно числу переменных. В социологии определители специального вида используются при математическом моделировании и исследовании гендерных систем.

Определители 2-го и 3-го порядка. Определителем матрицы 1-го порядка по определению считается число a_{11}, т.е. ее единственный элемент. Определителем квадратной матрицы $A=[a_{ij}]$ 2-го порядка называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (3.6)$$

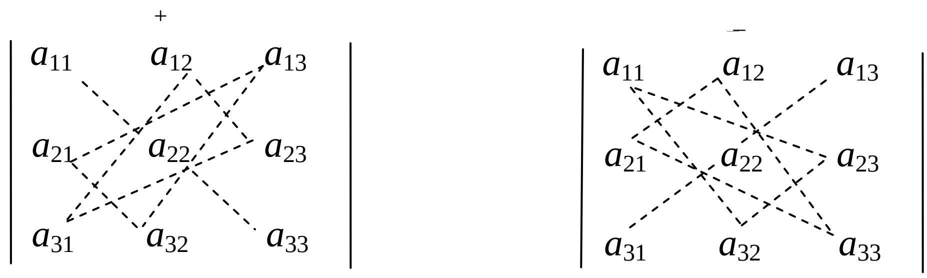
Определителем, соответствующим квадратной матрице $A=[a_{ij}]$ 3-го порядка, называется число, вычисляемое по следующей формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{22} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \qquad (3.7)$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

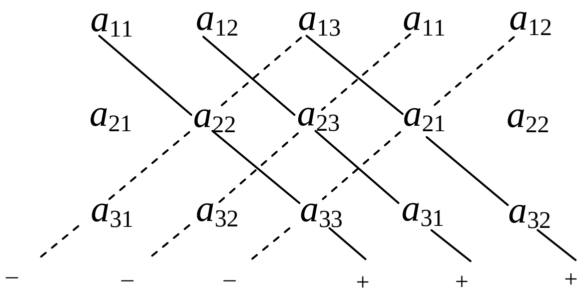
Определителей 3-го порядка можно вычислять также по *правилу треугольников* (*правилу Саррюса*), или по *правилу диагоналей*.

Правило треугольников: *определитель равен сумме взятых со знаком* «+» *произведений элементов его главной диагонали и двух троек элементов, образующих треугольники, окаймляющие главную диагональ и сумме произведений со знаком* «–» *элементов побочной диагонали и двух троек элементов, образующих треугольники, окаймляющие побочную диагональ.*

Правило треугольников можно изобразить в виде следующей схемы:



По правилу диагоналей *к элементам определителя приписываются справа два первых его столбца и находится алгебраическая сумма произведений указанных на схеме «диагональных» элементов*.



Определитель *n*-го порядка и его свойства. Из (3.7) следует, что определитель 3-го порядка представляет собой алгебраическую сумму произведений троек его элементов, стоящих в разных строках и столбцах. При этом вторые индексы любой тройки элементов являются некоторой перестановкой[1] чисел 1,2,3, которая определяет знак произведения. Если перестановка четная, то выбирается знак «+», в противном случае — знак «–». Следовательно, с учетом введенных понятий, определитель квадратной матрицы $A=[a_{ij}]$ третьего порядка можно записать в следующем виде:

$$\det A = \sum_{\tau\in P_3} (-1)^k a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}\,, \qquad (3.8)$$

где P_3 — множество перестановок чисел 1,2,3, $\tau=(i_1,i_2,i_3)$ — любая перестановка, а k — число ее инверсий. Формула (3.8) позволяет по аналогии ввести понятие определителя *n*-го порядка квадратной матрицы $A=[a_{ij}]_{n\times n}$.

Определителем *n*-го порядка называется алгебраическая сумма всевозможных произведений его *n* элементов, стоящих в разных строках и столбцах, при этом знак произведения берется со знаком «+», если перестановка вторых ин-

---

[1] Перестановками чисел 1,2, … ,*n* называются комбинация этих же чисел, отличающихся только порядком их расположения. Перестановки записываются в виде упорядоченных по номерам наборов $(i_1,i_2,\ldots,i_k,\ldots,i_\ell,\ldots,i_n)$ и обозначаются греческими буквами, например, $\tau=(i_1,i_2,\ldots,i_k,\ldots,i_\ell,\ldots,i_n)$. Два элемента i_k и i_ℓ перестановки τ образуют инверсию, если при $k<\ell$ имеет место неравенство $i_k>i_\ell$. Если число инверсий в перестановке четное, то она называется четной в противном случае — нечетной. Множество все перестановок чисел 1,2,…,*n* обозначается P_n.

дексов элементов произведения четная при их записи в порядке возрастания первых индексов. В противном случае выбирается знак «–». Таким образом, аналитическая запись определителя n-го порядка имеет следующий вид:

$$\det A = \sum_{\tau \in P_n} (-1)^k a_{1 i_1} a_{2 i_2} \ldots a_{n i_n} , \qquad (3.9)$$

где P_n — множество перестановок чисел 1,2, … n, $\tau = (i_1, i_2, \ldots i_n)$ — произвольная перестановка, а k — число ее инверсий.

При вычислении определителей квадратных матриц важную роль играют миноры элементов матриц (определителей) и их алгебраические дополнения.

Пусть задана квадратная матрица $A = [a_{ij}]$ порядка n. *Минором* элемента a_{ij} данной матрицы A называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из A вычеркиванием ее i-ой строки и j-го столбца. Миноры обозначаются M_{ij}, где i,j — индексы соответствующего ему элемента.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется произведение минора M_{ij} на степень минус единицы, показатель которой равен сумме индексов элемента a_{ij}, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ik}$.

Основные свойства определителей. Вычисление определителя по формуле (3.9) довольно трудная задача, так как количество слагаемых в (3.9) совпадает с числом всех перестановок, которое равно произведению чисел $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Это число называется n-факториалом и обозначается $n!$ В связи с этим при вычислении определителей используются свойства, которые значительно упрощают его вычисление.

1. Определитель не изменится, если к элементам его любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы любой другой строки (столбца), умноженные на любое число.

2. За знак определителя можно вынести общий множитель элементов его строки или столбца (в частности при умножении элементов строки (столбца) на число определитель умножается на это число).

3. Если элементы некоторой фиксированной строки (столбца) определителя равны суммам двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, все элементы которых равны за исключением элементов зафиксированной строки (столбца), а элементами этой строки (столбца) первого определителе являются первые слагаемые, а второго — вторые слагаемые.

4. Определители исходной и транспонированной матрицы равны.

5. Определитель равен нулю, если в нем имеется нулевая строка или столбец.

6. Определитель равен нулю при наличии в нем одинаковых строк или столбцов.

7. Если в определителе поменять местами две его строки (два столбца), то определитель меняет знак на противоположный.

8. Если некоторая строка (столбец) определителя является линейной комбинацией некоторых других его строк (столбцов), то он равен нулю.

9. Сумма произведений элементов любой строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

10. Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению их определителей.

Замечание 3.2. В основном при вычислении определителей используются свойства 1 — 3. Наиболее важными являются свойства 1 и 2, так как с их помощью вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка. Свойство 3 можно использовать при вычислении определителей, строки которых содержат большие числа. Представляя эти элементы в виде сумм двух слагаемых можно значительно упростить вычисление определителя.

Методы вычисления определителей *n*-го порядка. Первый метод, называемый разложением определителя по строке (столбцу), базируется на теореме Лапласа, которая утверждает: *определитель квадратной матрицы* $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ *равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ik}A_{ik} + \ldots a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\,, \tag{3.10}$$

где i — номер строки, $1 \le i \le n$. Формула (3.10) называется *разложением определителя по i-ой строке*. Аналогичная формула верна для любого j-го столбца:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{kj}A_{kj} + \ldots a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,,\ 1 \le j \le n, \tag{3.11}$$

которая называется *разложением определителя по j-му столбцу*.

Использование формул (3.10) или (3.11) сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению в худшем случае n определителей $(n–1)$-го порядка, что по трудоемкости сравнимо с вычисление определителя по формуле (3.9), так как требуется вычислять n определителей $(n–1)$-го порядка.

Наиболее эффективным методом является *метод понижения порядка*, использующий первые два свойства определителя. Данный метод состоит в выборе в некотором столбце определителя ненулевого элемента a_{ij}, обнулении всех остальных элементов этого столбца, пересчете элементов строк, которым принадлежат обнуляемые элементы и последующем применении формулы (3.11).

При выборе в j-том столбце ненулевого элемента a_{ij} обнуление элемента a_{kj} достигается умножением всех элементов i-той строки $a_{i\ell}$ на дробь $-\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$ и прибавлением $-\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}\cdot a_{i\ell}$ к соответствующим элементам $a_{k\ell}$ k-той строки, $\ell = 1, 2, \ldots, n$. Если обозначить новые элементы k-той строки через $a'_{k\ell}$, то при таком преобразовании определителя для их пересчета получаются формулы

$$a'_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} \cdot a_{ij} = 0, \qquad a'_{k\ell} = a_{k\ell} - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} \cdot a_{i\ell} = \frac{1}{a_{ij}}(a_{k\ell} \cdot a_{ij} - a_{kj} \cdot a_{i\ell}). \quad (3.12)$$

В результате пересчета по первому свойству численное значение определителя не измениться, а в его табличной записи в j-м столбце появиться дополнительный ноль.

Формула (3.12) показывает, что после пересчета все новые элементов k-той строки имеют общий множитель $\frac{1}{a_{ij}}$, который по свойству 2) можно вынести за знак определителя, а элементы $a_{k\ell}$ k-той строки пересчитывать по формулам

$$a'_{k\ell} = a_{k\ell} \cdot a_{ij} - a_{kj} \cdot a_{i\ell}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, n. \quad (3.13)$$

Формулы (3.13) называют *правилом прямоугольника*, так как они имеют простую графическую интерпретацию. Выделенный ненулевой a_{ij}; обнуляемый a_{kj} и пересчитываемый $a_{k\ell}$ элементы определяют единственный четвертый элемент $a_{i\ell}$. Указанная четверка элементов образует «прямоугольник» в записи определителя. Принято считать, что пара $a_{ij}, a_{k\ell}$, определяет *главную*, а $a_{i\ell}, a_{kj}$ — *побочную* диагональ прямоугольника (см. рис. 3.1). Таким образом, с учетом (3.13) правило прямоугольника формулируется сле-дующим образом: *пересчитываемый элемент равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей соответствующего прямоугольника.*

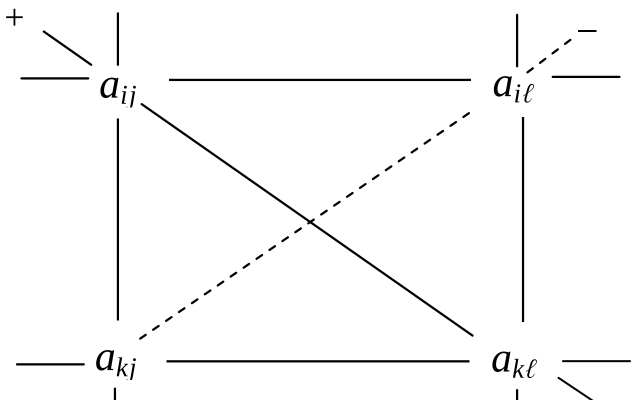


Рис. 3.1.

Если Δ'_n — определитель, который получен из определителя Δ_n в результате обнуления s ненулевых элементов его j-го столбца с помощью ненулевого элемента a_{ij}, а элементы строк, в которых располагались обнуляемые элементы, пересчитывались по правилу прямоугольников, то

$$\Delta_n = \frac{(-1)^{i+j}}{a_{ij}^{s-1}} \cdot \Delta_{n-1}, \quad (3.14)$$

где Δ_{n-1} — определитель (n–1)-го порядка, который получается из определителя Δ'_n вычеркиванием его i-ой строки и j-го столбца. Формула (3.14) непосредственно выводится из (3.11) — (3.13).

Пример 3.7. Вычислить определитель нижнетреугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Решение. Применяя последовательно формулу (3.10), получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}.$$

Таким образом, определитель нижнетреугольной матрицы третьего порядка равен произведению ее диагональных элементов.

Замечание 3.3. Правило вычисления определителей нижнетреугольных матриц третьего порядка применимо к вычислению нижнетреугольных, верхне треугольных и диагональных матриц любого порядка.

Для вычисления определителей квадратных матриц $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, у которых все элементы, расположенные выше (ниже) побочной диагонали равны нулю, справедлива формула

$$\det A = (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n} a_{2\,n-1} \ldots a_{n-1\,2}\, a_{n\,1}. \qquad (3.15)$$

Пример 3.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Выделяя элементы побочной диагонали 5, 2, 4, 1 и используя формулу (3.15), получим $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4 \cdot 3/2} 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 40$.

Пример 3.9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ методом понижения порядка.

Решение. Третий столбец определителя содержит один нулевой элемент. Поэтому, выбрав $a_{13} = 3$, обнулим два остальных ненулевых элемента $a_{23} = 2$, $a_{43} = 2$ этого столбца, и пересчитаем элементы второй и четвертой строк по правилу прямоугольника:

$$a'_{21} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1; \qquad a'_{22} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -2; \qquad a'_{24} = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -3;$$

$$a'_{41} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1; \qquad a'_{42} = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -5; \qquad a'_{44} = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0;$$

В результате получим определитель $\Delta'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Delta_4$. Так как в третьем столбце определителя обнулялось два элемента, то s = 2. Следовательно, используя формулу (3.14), получим

$$\Delta_4 = \frac{(-1)^{1+3}}{3}\Delta_3, \text{ где } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

Для вычисления Δ_3 воспользуемся также методом понижения порядка. Для этого выбрав в его третьем столбце в качестве ненулевого элемента $a_{23} = -1$, обнулив элемент $a_{13} = -3$ и пересчитав остальные элементы первой строки по правилу прямоугольника

$$a'_{11} = (-1)\cdot 1 - (-3)\cdot 3 = 8; \qquad a'_{12} = (-1)\cdot(-2) - (-3)\cdot 4 = 14,$$

получим определитель $\Delta'_3 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 14 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$, который, согласно формуле (3.14), равен: $\frac{(-1)^{2+3}}{1}\begin{vmatrix} 8 & 14 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -\,(8\cdot(-5) - 14\cdot 1) = -(-40-14) = 54$. Подставляя в равенство $\Delta_4 = \frac{(-1)^{1+3}}{3}\Delta_3$ найденное числовое значение определителя Δ_3, находим $\Delta_4 = \frac{1}{3}\cdot 54 = 18$.

3.3. Обратные матрицы и их применение

Квадратная матрица $A = [a_{ij}]$ порядка n называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля, т.е. $\det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется *вырожденной*.

Матрица B называется *обратной* к матрице A, если выполняются равенства

$$AB=BA=E,$$

где E – единичная матрица. Обратную матрицу принято обозначать A^{-1}.

Так как определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей, то из приведенных матричных равенств вытекает справедливость числового равенства

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det E = 1,$$

из которого следует, что обратные матрицы существуют только для невырожденных матриц, при этом для каждой такой матрицы обратная матрица единственная.

Введем в рассмотрение алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A, где $i, j = 1,2,\ldots,n$, и выпишем матрицу $\tilde{A}$, элементами j-го столбца которой являются алгебраические дополнения $A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn}$ элементов j-ой строки матрицы A, $j = 1, 2, \ldots, n$. Матрица $\tilde{A}$ называется *присоединенной* к матрице A и имеет следующий вид:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{j1} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{j2} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1i} & A_{2i} & \ldots & A_{ji} & \ldots & A_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{jn} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Справедливо утверждение: *если A — квадратная невырожденная матрица, а $\tilde{A}$ присоединенная к ней матрица, то* $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det A \cdot E$.

Из приведенного утверждения непосредственно следует формула для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{j1} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{j2} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1i} & A_{2i} & \ldots & A_{ji} & \ldots & A_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{jn} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.16)$$

Для обратных матриц справедливы следующие соотношения:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A; \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \quad \left(A^{n}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{n}.$$

Чтобы убедиться в правильности вычислений обратной матрицы A^{-1}, достаточно проверить справедливость равенств $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Из формулы (3.16) следует, что при заданной матрице $A = [a_{ij}]$ для вычисления ее обратной матрицы A^{-1} нужно выполнить следующие действия:

1) вычислить определитель $\det A$ матрицы A, если он не равен нулю, то выполняется 2), в противном случае вычисления прекращаются;

2) для каждого элемента a_{ij} матрицы A вычислить его алгебраическое дополнение A_{ij} и выписать матрицу $[A_{ij}]$, элементами которой являются вычисленные алгебраические дополнения;

3) транспонировать матрицу $[A_{ij}]$, в результате чего получим присоединенную матрицу $\tilde{A}$;

4) все элементы матрицы $\tilde{A}$ разделить на определитель $\det A$, полученная матрица является обратной для матрицы A.

Замечание 3.4. Равенство $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ равносильно равенству

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A \cdot E.$$

Поэтому для проверки правильности вычисления, достаточно найти произведения $\tilde{A}A$, $A\tilde{A}$ и сравнить их с диагональной матрицей $\det A\cdot E$, у которой все диагональные элементы равны определителю $\det A$. При совпадении всех трех указанных матриц обратная матрица вычислена верно.

Пример 3.10. Вычислить обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\2&0&3\\0&0&1\end{bmatrix}$, в случае ее существования.

Решение. Используя схему нахождения обратной матрицы:

1) вычисляем определитель матрицы A, разлагая его по второму столбцу $\det A = 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$;

2) вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}=0,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2&0\\0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}=0,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}=3,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}0&2\\2&3\end{vmatrix}=4,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$$

и выписываем матрицу $[A_{ij}]=\begin{bmatrix}0&-2&0\\-1&0&0\\3&4&-2\end{bmatrix}$;

3) транспонируя матрицу $[A_{ij}]$, находим присоединенную матрицу

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0&-1&3\\-2&0&4\\0&0&-2\end{bmatrix};$$

4) умножив все элементы присоединенной матрицы $\tilde{A}$ на $\dfrac{1}{\det A}=-\dfrac{1}{2}$, выписываем обратную матрицу $A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1/2&-3/2\\1&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Для проверки правильности полученного результата вычисляем:

$$\tilde{A}A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&2\\2&0&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&3\\-2&0&4\\0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=\det A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$A^{-1}\tilde{A}=\begin{bmatrix}0&-1&3\\-2&0&4\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\2&0&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=\det A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Три матрицы $\tilde{A}A^{-1}$, $A^{-1}\tilde{A}$ и $\det A\cdot E$ совпадают, следовательно, обратная матрица A^{-1} вычислена верно.

Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы. *Матричным уравнением* называется уравнение, состоящее из двух матричных выражений, связанных знаком равенства, в запись которого входит матрица $X=[x_{ij}]$, элементы которой не определены. Решение такого уравнения состоит в нахождении такой матрицы *X*, при подстановке которой в матричное уравнение и выполнении соответствующих матричных операций оно превращается в матричное равенство.

Социальная модель, сводящаяся к матричному уравнению простейшего вида.

Имеется коллектив работников, состоящий из *m* человек. Для выполнения *n* работ формируется *n* групп работников. Имеется *m* наборов стимулов, каждый из которых состоит из *m* стимулов. Любой *i*-тый набор стимулов можно применять к каждой группе работников, при этом для *j*-го работника предписан *j*-тый стимул из каждого набора. Известны величины s_{ij} каждого *j*-го стимула из *i*-го набора, $i, j=1,2,\ldots,m$, а также величины r_{ij} — реакции *j*-го работника на соответствующий стимул из *i*-го набора, например, объем выполняемой им работы, который пропорционален величине стимула. Коэффициент пропорциональности считается равным *k* для любого работника и любого соответствующего ему стимула, следовательно

$$r_{ij}=k\cdot s_{ij},\ i, j=1,2,\ldots,m.$$

Требуется определить состав групп для выполнения *n* работ, объемы которых заданы для каждого набора стимулов и каждой группы.

Введем в рассмотрение $m\times m$-матрицы $S=[s_{ij}]$ и $R=[r_{ij}]$. Так как группы, формируемые для выполнения работ, являются подмножествами всего коллектива работников, то каждая из них полностью определяется соответствующим характеристическим вектором, который нужно определить.

Пусть $X=[x_{j\ell}]$ — $m\times n$-матрица, ℓ-тый столбец которой является характеристическим вектором ℓ-той группы работников (напомним, что *j*-тая компонента этого вектора равна 1, т.е. $x_{j\ell}=1$, если *j*-тый работник принадлежит ℓ-той группе и $x_{j\ell}=0$ в противном случае). Тогда каждая сумма произведений

$$\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\cdot x_{j\ell},\qquad i=1,2,\ldots,m,\ \ \ell=1,2,\ldots,n$$

определяет суммарный объем работы, который выполнит ℓ-тая группа при поощрении ее членов *i*-тым набором стимулов. Из определения операции умножения матриц следует, что величины

$$t_{i\ell}=\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\cdot x_{j\ell},\qquad i=1,2,\ldots,m,\ \ell=1,2,\ldots,n,$$

являются элементами произведения $RX=[t_{i\ell}]$.

Пусть элементы $m\times n$-матрицы $V=[v_{i\ell}]$ определяют объемы работ, которые выполняют группы при поощрении их членов различными наборами стимулов. Тогда для определения матрицы X получаем следующие равносильные матричные уравнения

$$RX = V, \qquad SX = \frac{1}{k}V, \tag{3.17}$$

которые при невырожденности матриц R и S можно решить с помощью обратных матриц R^{-1} и S^{-1}.

Простейшие матричные уравнения и их решения. Уравнения вида

$$AX = C, \quad XB = C, \quad AXB = C, \tag{3.18}$$

где A — квадратная матрица порядка n, X и C — прямоугольные матрицы размера $n \times p$, а B – квадратная матрица порядка p, называются простейшими матричными уравнениями.

Если A и B — невырожденные матрицы, то единственными решениями уравнений (3.18) являются, соответственно, матрицы

$$X = A^{-1}C, \quad X = CB^{-1}, \quad X = A^{-1}CB^{-1}, \tag{3.19}$$

где A^{-1} и B^{-1} — обратные матрицы для A и B.

Действительно, умножая справа на A^{-1} обе части первого уравнения, убеждаемся в справедливости равенств $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X = A^{-1}C$, следовательно $X = A^{-1}C$ — решение первого уравнения.

Умножение обеих частей второго уравнения на B^{-1} справа приводит к цепочке равенств $(XB)B^{-1} = X(BB^{-1}) = XE = X = CB^{-1}$, из которой следует, что матрица $X = CB^{-1}$ — решение второго матричного уравнения.

Умножая далее одновременно левую и правую части третьего равенства слева и справа, соответственно, на матрицы A^{-1} и B^{-1}, убеждаемся (с учетом ассоциативности операции умножения матриц) в справедливости равенств

$$A^{-1}(AXB)B^{-1} = (A^{-1}A)X(BB^{-1}) = EXE = X = A^{-1}CB^{-1},$$

т.е. $X = A^{-1}CB^{-1}$ — решение третьего уравнения.

Пример 3.11. Решить матричное уравнение $AXB = C$, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Решение. Проверяем, являются ли матрицы A и B невырожденными. Для этого вычисляем их определители

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1, \quad \det B = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2.$$

Неравенство их нулю доказывает невырожденность A и B. Далее, используя формулу (3.16), вычисляем обратные матрицы

$$A^{-1} = -1\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 7/2 & -5/2 \end{bmatrix},$$

следовательно, по третьей формуле из (3.19)

$$X=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 3\\ 7/2 & -5/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Пример 3.12. Имеется коллектив работников, состоящий из трех человек, три набора стимулов, величины которых определяются матрицей $S=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Требуется сформировать четыре группы, для выполнения четырех работ. Объемы работ при поощрении групп, соответствующими наборами стимулов, пропорциональны величинам стимулов с коэффициентом пропорциональности $k = 1$ и определяются матрицей $V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

Решение. Пусть $X=[x_{ij}]$ — матрица размера 3×4, столбцами которой являются характеристические векторы формируемых групп работников. Тогда, согласно (3.17), матричное уравнение для определения X имеет вид $S{\cdot}X=V$, а его решением является матрица $X=S^{-1}V$ при условии невырожденности S.

Используя приведенную выше схему нахождения обратной матрицы:

1) вычисляем определитель матрицы S по правилу треугольников

$$\det S=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2+1\cdot2\cdot1+2\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot1-2\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot1=-4;$$

2) вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы S

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{22}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{33}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

и выписываем матрицу $[A_{ij}]=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$;

3) матрица $[A_{ij}]$ симметрическая и совпадает с транспонированной матрицей $[A_{ij}]^T$, следовательно $\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$;

4) умножая присоединенную матрицу на $-\dfrac{1}{4}$, получим обратную матрицу

$$S^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Далее вычисляя произведение $S^{-1}V$, находим матрицу

$$X = S^{-1}V = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Столбцами найденной матрицы X являются характеристические векторы формируемых групп, которые являются подмножествами коллектива, состоящего из трех человек. Следовательно, первая группа состоит из первого и третьего работников, вторая — из первого и второго, третья — из второго и третьего, а четвертая — из первого работника.

Замечание 3.5. При решении матричных уравнений (3.19) элементы матрицы $X = R^{-1}V$ или $X = \frac{1}{k}S^{-1}V$ S, как правило, отличны от нуля и единицы. В этом случае при соответствующей нормировке ее элементов (например, при делении каждого элемента на сумму всех элементов матрицы X) нормированные элементы столбцов матрицы X будут принадлежать отрезку [0; 1] и определять нечеткие подмножества коллектива работников. Величины элементов конкретного столбца в этом случае можно рассматривать как вероятности принадлежности работников соответствующей группе. Следовательно, при формировании группы следует выбирать работников с наибольшими вероятностями принадлежности группе.

3.3. Системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим следующую *социологическую модель*. Имеется система, состоящая из конечного числа элементов, каждый из которых находиться в активном или пассивном состоянии. Система может находиться в одном из допустимых состояний, каждое из которых определяется перечнем активных элементов, т.е. характеристическим вектором подмножества таких элементов. На систему, находящуюся в любом из допустимых состояний, периодически воздействуют внешние факторы, при этом каждый фактор при повторе воздействует только на один и тот же элемент системы. Для каждого элемента опытным путем установлено время реакции на разовое воздействие факторов на систему, при нахождении ее в каждом из допустимых состояний. Требуется найти число возможных повторов воздействия факторов на активные элементы системы, если известны времена реакции всей системы для каждого ее состояния.

При формулировке математической модели для простоты и наглядности будем считать, что система состоит из трех элементов, а ее допустимые состояния описываются 0,1-матрицей $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, строками которой являются характеристические вектора соответствующих подмножеств активных элементов, которые определяют состояния системы.

Пусть элементы первой, второй и третьей строк матрицы $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ определяют время реакции элементов системы, находящейся, соответственно в первом, втором и третьем состояниях, на разовое воздействие факторов. Пусть далее времена реакции всей системы при неоднократном воздействии факторов, определяются матрицей-столбцом $B = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$. Введем в рассмотрение матрицу-столбец $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, где x_1, x_2 и x_3 — число возможных повторов воздействия первого, второго и третьего факторов, соответственно, на первый, второй и третий элементы системы. Так как на воздействие факторов реагируют только активные элементы, то вместо C нужно рассматривать с учетом вида матрицы V следующую матрицу $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Из определения матричного умножения следует, что первый второй и третий элементы произведения AX вида

$$4x_1 + x_2 + 2x_3, \qquad 2x_2 + 3x_3, \qquad 2x_3$$

определяют время реакции всей системы при неоднократном воздействии на нее факторов, при нахождении ее, соответственно, в первом, втором и третьем, состояниях. Следовательно, должно выполняться матричное равенство
$AX = B$, т.е. с учетом определения равенства матриц—соотношения

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \qquad 2x_2 + 3x_3 = 10, \qquad 2x_3 = 4.$$

Таким образом, для определения числа повторных воздействий факторов на активные элементы системы, находящейся в каждом из трех состояний, получена система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ \quad 2x_2 + x_3 = 10, \\ \quad\quad + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Выражая из третьего уравнения $x_3 = 2$ и подставляя во второе уравнение, вычисляем $x_2 = \frac{10 - x_3}{2} = \frac{10-2}{2} = 4$. Далее, подставляя найденные значения x_2 и x_3 в первое уравнение, вычисляем $x_1 = \frac{20 - x_2 - 2x_3}{4} = \frac{20-4-4}{4} = 3$.

Таким образом, число допустимых повторов для первого, второго и третьего факторов, к соответствующим элементам системы, находящимся в активном состоянии равно, соответственно, 3, 4 и 2.

Если при решении моделирующих систем линейных уравнений будут получаться нецелочисленные значения перемененных, то округляя из до целых значений, с некоторой долей погрешности, получим требуемое решение.

Линейным уравнением, зависящим от n переменных (неизвестных) $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, называется алгебраическое выражение следующего вида:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i. \tag{3.20}$$

Числа a_{ij}, $j = 1,2,\ldots,n$, называются *коэффициентами уравнения*, первый индекс i которых определяет номер уравнения, если их несколько, а второй j — номер переменной, которой соответствует коэффициент a_{ij}. Число b_i называется *свободным членом* уравнения.

Системой линейных уравнений называется совокупность из m линейных уравнений вида (3.20), которая записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.21}$$

Таким образом, система линейных уравнений включает в себя m уравнений, зависящих от n неизвестных, как правило, предполагается $m \le n$. Решением системы (3.21) называется упорядоченный набор действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n$, при подстановке которых вместо соответствующих переменных (с теми же номерами) каждое из уравнений системы превращается в числовое равенство. Система называется *совместной* (*разрешимой*), если имеет, хотя бы одно решение, в противном случае — *несовместной* (*неразрешимой*). Решение системы состоит в выявлении всех ее решений или в установлении ее несовместности.

Матрица $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$, элементами которой являются коэффициенты при переменных, называется *матрицей системы*. Матрица вида

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m_1} & a_{m_2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

называется *расширенной матрицей* системы и получается добавлением к A столбца свободных членов.

Если расширенная матрица имеет ступенчатый вид (см. стр. 35), то (3.21) называется *ступенчатой* системой линейных уравнений. Частными видами ступенчатых систем являются *трапециевидная* и *треугольная* системы, расширенными матрицами которых являются, соответственно, трапециевидная и верхнетреугольная матрицы.

Вводя в рассмотрение матрицу-столбец неизвестных $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ и матрицу-столбец $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ свободных членов, систему линейных уравнения можно записать в *матричном виде:*

$$AX = B. \tag{3.22}$$

Основными точными методами решения систем линейных уравнений являются *метод обратной матрицы, метод Крамера и метод Гаусса*.

Метод обратной матрицы применяется для решения системы (3.20) с числом переменных равным числу уравнений, т.е. при $n = m$, в случае неравенства нулю определителя матрицы системы A. Записав систему (3.20) в матричном виде (3.22), получим простейшее матричное уравнение $AX = B$, решением которого является матрица-столбец, определяемый формулой $X = A^{-1}B$.

Метод Крамера используется для решения системы указанного выше вида в случае неравенства нулю определителя матрицы A, который называется определителем системы и обозначается Δ. Для нахождения решения помимо определителя Δ используются n вспомогательных определителей Δ_i, $i = 1,2,\dots,n$, которые получаются заменой i-того столбца определителя Δ столбцом свободных членов. Если $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет единственное решение, которое вычисляется по *формулам Крамера*:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = 1,2,\dots,n. \tag{3.23}$$

Из равенства $\Delta = 0$ не следует несовместность системы с числом переменных равных числу уравнений, так как такие системы могут иметь бесконечное множество решений. Какой из двух случаев имеет место можно установить, решая систему методом Гаусса.

Метод Гаусса (*метод исключения переменных*) применяется для нахождения всех решения или выявления несовместности системы линейных уравнений (3.20) общего вида с произвольным числом переменных n и любым числом уравнений m. Введем определения необходимые для описания этого метода.

Две системы вида (3.20) называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если их множества решений совпадают или обе они несовместны.

Элементарными преобразованиями системы (3.20) называются следующие преобразования ее уравнений:

1) перемена местами любых двух уравнений системы;

2) умножение коэффициентов и свободного члена любого уравнения на произвольное число, не равное нулю (умножение уравнения на число);

3) прибавление ко всем коэффициентам и свободному члену любого уравнения соответствующих коэффициентов и свободного члена любого другого

уравнения, умноженных на произвольное число, не равное нулю (прибавление к уравнению другого уравнения, умноженного на число).

Теоретической основой, гарантирующей корректность метода Гаусса, является следующее утверждение: *элементарные преобразования любой системы (3.20) приводят ее к эквивалентной системе.*

Метод Гаусса состоит из двух основных этапов, первый из которых называется его *прямым ходом*, а второй — *обратным*.

В результате прямого хода с помощью элементарных преобразований система приводится к эквивалентной ступенчатой системе, если в процессе его выполнения не будет установлена несовместность преобразуемой системы и, следовательно, исходной системы (3.20).

В результате выполнения обратного хода находится решение ступенчатой системы, которое одновременно является решением исходной системы.

Первый шаг прямого хода состоит в исключении переменной x_1 из всех уравнений системы (3.20), кроме одного, например i-го, содержащего эту переменную с ненулевым коэффициентом.

Для исключения переменной x_1 из k-го уравнения, достаточно выполнить элементарное преобразование вида 3), т.е. умножить i-тое уравнение на дробь $-\dfrac{a_{k1}}{a_{i1}}$ и прибавить к k-му уравнению. Если обозначить новые коэффициенты и свободный член преобразованного k-го уравнения, соответственно, $a'_{k\ell}$, и b'_i, то в силу определения преобразования 3) имеют место равенства:

$$a'_{k\ell} = \frac{1}{a_{i1}}(a_{k\ell}\cdot a_{i1} - a_{k1}\cdot a_{i\ell}),\ \ell = 1,2,\ldots,n, \qquad b'_k = \frac{1}{a_{i1}}(b_k\cdot a_{i1} - a_{k1}\cdot b_i).$$

Приведенные формулы показывают, что после выполненного элементарного преобразования 3) все коэффициенты и свободный член k-го уравнения приобретают общий множитель $\dfrac{1}{a_{i1}}$. Умножая далее k-тое уравнение на a_{i1}, получим уравнение, коэффициенты $a'_{k\ell}$, и свободный член b'_i которого пересчитываются по формулам

$$a'_{k\ell} = a_{k\ell}\cdot a_{i1} - a_{k1}\cdot a_{i\ell},\ \ell = 1,2,\ldots,n, \qquad b'_k = b_k\cdot a_{i1} - a_{k1}\cdot b_i,$$

т.е. по правилу прямоугольника.

После исключения переменной x_1 из всех уравнений, i-тое уравнение меняется местами с первым уравнением системы. На этом первый шаг метода Гаусса закончен.

На втором шаге прямого хода метода Гаусса, не затрагивая первое уравнение, исключается переменная x_2 из остальных ее уравнений, кроме одного из них, содержащего переменную x_2 с ненулевым коэффициентом. Если подсистема, с исключенным первым уравнением, не содержит переменную x_2, то удаляется переменная с наименьшим номером, которая входит в подсистему. Исключение очередной переменной в подсистеме проводится по аналогии с первым шагом.

На третьем шаге, исключается очередная переменная из подсистемы с удаленными первым и вторым уравнениями системы, полученной на втором шаге прямого хода метода Гаусса.

Последовательные шаги прямого метода Гаусса выполняются до тех пор, пока не будет получена подсистема, состоящая из одного уравнения, или получено уравнение, коэффициенты которого равны нулю, а свободный член отличен от нуля. В последнем случае выполнение метода Гаусса прекращается, так как такое уравнение не имеет решения, что означает несовместность соответствующей подсистемы и, следовательно, несовместность исходной системы (3.20). Кроме этого, в процессе выполнения прямого хода метода Гаусса из подсистем удаляются уравнения, коэффициенты и свободный член которых равны нулю, так как такие уравнения выполняются при любых значениях переменных.

Результатом выполнения прямого хода метода Гаусса является ступенчатая система линейных уравнений эквивалентная исходной системе.

Обратный ход метода Гаусса состоит в нахождении решения ступенчатой системы, полученной в результате выполнения прямого хода. Для этого любая переменная в последнем уравнении объявляется *базисной*, а остальные его переменные — *свободными* переменными всей системы. После этого базисная переменная последнего уравнения выражается через свободные переменные, и ее значение подставляется в предшествующее уравнение.

Разрешив предшествующее уравнение относительно его базисной переменной, найденные значения двух базисных переменных подставляются в уравнение, предшествующее двум последним уравнениям. После этого его базисная переменная выражается через свободные переменные и т.д. Обратный ход метода Гаусса выполняется до тех пор, пока не будет выражена базисная переменная x_1 из первого уравнения через свободные переменные системы.

Формулы, выражающие базисные переменные через свободные, определяют *общее решение* системы линейных уравнений. Для получения любого *частного* (числового) *решения* системы нужно придать любые числовые значения свободным переменным, и, используя формулы общего решения, вычислить значения базисных переменных. Полученный набор чисел будет частным решением системы.

Замечание 3.6. Из описания прямого хода метода Гаусса следует, что при реализации элементарных преобразований системы все вычисления проводятся с коэффициентами и свободными членами ее уравнений, т.е. с элементами ее расширенной матрицы. Поэтому более удобно преобразовывать не уравнения системы (3.20), а проводить элементарные преобразования строк расширенной матрицы для приведения ее к ступенчатому виду.

После приведения расширенной матрицы к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса) выписывается соответствующая ей ступенчатая система линейных уравнений и выполняется обратный ход метода Гаусса.

Замечание 3.7. Если в процессе выполнения прямого хода метода Гаусса получена расширенная матрица, являющаяся верхнетреугольной, то при выполнении обратного хода находятся числовые значения всех переменных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, которые являются единственным решением системы (3.20).

Пример 3.13. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 2, \\ \ x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$ методом обратной матрицы.

Решение. Выписываем матрицу системы $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. и вычисляем с помощью методам треугольников $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 2 - 1 - 6 = -16.$

Так как матрица A — невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Для ее определения находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Используя формулу (3.16) для вычисления обратной матрицы, выписываем

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Вводя матрицы-столбцы переменных $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ и свободных членов $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ и записывая данную систему в матричной форме, получим матричное уравнение $AX = B$, решение которого является матрица-столбец.

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} (-4)\cdot 2 + (-4)\cdot 2 + 0\cdot 7 \\ (-1)\cdot 2 + 7\cdot 2 + (-4)\cdot 7 \\ 3\cdot 2 + (-5)\cdot 2 + (-4)\cdot 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{bmatrix} -16 \\ -16 \\ -32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 1,\ x_2 = 1, x_3 = 2$ — решение системы линейных уравнений.

Пример 3.14. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad\quad x_2 \qquad - 2x_4 = 2, \\ \ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ \ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

методом Гаусса, используя элементарные преобразования ее уравнений.

Решение. Для удобства пересчета коэффициентов и свободных членов уравнений системы поменяем местами первое и третье уравнения. В результате получаем систему,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

в которой коэффициент $a_{11} = 1$. Далее умножая последовательно первое уравнение на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}} = -2$, а затем на $-\dfrac{a_{41}}{a_{11}} = -1$ и прибавляя его, соответственно, к третьей и четвертой строкам системы, получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \underline{x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1,} \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Оставляя без изменений первое уравнение (для наглядности оно отделено чертой), преобразуем подсистему, образованную вторым, третьим и четвертыми уравнениями. Прибавляем ко второму и третьему уравнению выделенной подсистемы первое, умноженное на –3, получим систему уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ \underline{x_2 - 2x_4 = 2,} \\ x_3 + 5x_4 = -4, \\ 3x_3 + 8x_4 = -4. \end{cases}$$

Не изменяя первое и второе уравнение полученной системы, преобразуем ее подсистему, отделенную чертой. Для этого умножаем ее первое уравнение на –3 и прибавляем к ее второму. В результате получаем треугольную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ \underline{x_2 - 2x_4 = 2,} \\ x_3 + 5x_4 = -4, \\ -7x_4 = 8. \end{cases}$$

На этом шаге прямой ход метода Гаусса закончен.

Далее выполняем обратный ход метода Гаусса. Из последнего уравнения находим значение переменной $x_4 = -\dfrac{8}{7}$ и, подставляя его в третье уравнение, вычисляем значение переменной $x_3 = -4 - 5 \cdot \left(-\dfrac{8}{7}\right) = \dfrac{12}{7}$. После этого, подставляя числовое значение четвертой переменной во второе уравнение, находим

$x_2 = 2 + 2\cdot\left(-\frac{8}{7}\right) = -\frac{2}{7}$. На последнем шаге обратного хода подставляем найденные числовые значения второй, третьей и четвертой переменных в первое уравнение и вычисляем $x_1 = -1 + \left(-\frac{2}{7}\right) + 2\cdot\left(\frac{12}{7}\right) - \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{23}{7}$. Таким образом, получено решение исходной системы $x_1 = \frac{23}{7}$, $x_2 = -\frac{2}{7}$, $x_3 = \frac{12}{7}$, $x_4 = -\frac{8}{7}$.

Подставив найденные числовые значения переменных в каждое уравнение исходной системы и вычислив значения их правых частей, убеждаемся в справедливости числовых равенств

$$2\cdot\left(\frac{23}{7}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) - 3\cdot\left(\frac{12}{7}\right) + \left(-\frac{8}{7}\right) = 0, \quad -\frac{2}{7} - 2\cdot\left(-\frac{8}{7}\right) = 2,$$

$$\frac{23}{7} - \left(-\frac{2}{7}\right) - 2\cdot\left(\frac{12}{7}\right) + \left(-\frac{8}{7}\right) = -1, \qquad \frac{23}{7} + 2\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{12}{7} + 3\cdot\left(-\frac{8}{7}\right) = 1,$$

которые свидетельствуют о правильности проведенных вычислений.

Пример 3.15. Решить систему линейных уравнений из примера 3.14, используя элементарные преобразования строк ее расширенной матрицы.

Решение. Выписав расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

выбрав в первой строке в качестве ненулевого элемента $a_{11} = 2$, обнулив третий и четвертый элементы первого столбца и пересчитав элементы третьей и четвертой строк по правилу прямоугольника, определяемого формулами (3.16), получим преобразованную матрицу

$$A' = [a'_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Выбрав в ней в качестве первого ненулевого элемента второй строки $a'_{22} = 1$, обнулив ненулевые элементы второго столбца, лежащие ниже a'_{22} и пересчитав элементы третьей и четвертой строк по правилу прямоугольника, приходим к матрице следующего вида:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & -4 \end{bmatrix}.$$

На последнем шаге прямого хода метода Гаусса выбираем в третье строке полученной матрицы в качестве первого ненулевого ее третий элемент, обнуляем четвертый ненулевой элемент третьего столбца и пересчитываем по правилу прямоугольника элементы четвертой строки, начиная с ее четвертого элемента. В результате получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -16 \end{bmatrix}.$$

Разделив на 2 элементы четвертой строки, выписываем для полученной матрицы ступенчатую систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ \qquad x_2 \qquad - 2x_4 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 + 5x_4 = -4, \\ \qquad\qquad\quad -7x_4 = 8, \end{cases}$$

решение которой приводится в предыдущем примере.