ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Курс лекций для студентов специальностей

1-23 01 04 Психология и 1-23 01 05 Социология

Курс «Основ высшей математики» содержит основные разделы высшей математики, удовлетворяющие требованиям новых государственных образовательных стандартов к минимуму содержания и уровню подготовки студентов в области математики для специальностей 1-23 01 04 Психология и 1-23 01 05 Социология.

В настоящее время связь гуманитарных наук и математики становится все более тесной и многоплановой, в связи с бурным развитием классической и дискретной математики, а также наличием высокопроизводительных вычислительных средств, позволяющих моделировать и решать реальные прикладные задачи большой размерности, возникающие в психологии, социологии и экономике.

Влияние социологии и психологии на математику также велико. Постоянно возникающие в обществе новые явления, процессы и феномены требуют совершенствования и развития математического аппарата для описания социологических законов в математической форме. В первую очередь сказанное касается областей математики, связанных с анализом и обработкой статистических данных, теоретической основой для которых является теория вероятности и математическая статистика. Овладение методами указанных областей математики позволяет эффективно использовать в своей работе достижения естественных наук, заимствовать их методы исследования, разработанные математические модели, проводить аналогии при решении собственных задач. Таким образом, изучение основ высшей математики студентами-психологами и социологами представляется актуальным и обоснованным.

Дополнительным стимулом изучения основ математики будущими специалистами в области психологии и социологии обусловлен тем, что фундаментальное университетское образования направлено на формирования в университетских стенах высокообразованных культурных молодых людей, которые наряду с гуманитарными знаниями обладают определенным уровнем естественнонаучного и математического знания, являющиеся неотъемлемой частью общечеловеческой культуры.

Современная теория и практика показывает, что специалист в области социологии и психологии должен не только уметь оперировать математическими методами, но и иметь представление о теоретических основах математики, уметь взглянуть на предмет своей науки с точки зрения математика, в противном случае он будет носителем тестов, констатирующих статическое состояние социальных явлений и процессов, без их осмысления и прогнозирования развертывания их во времени. Использование языка математики расширяет видение мира. Овладение этим языком позволяет эффективно использовать в своей работе достижения естественных наук, заимствовать их методы исследования, разработанные математические модели, проводить аналогии при решении практических задач.

Преподавание математики для студентов-гуманитариев должно реализовываться на основе принципа профессиональной направленности преподавания, содержанием которого является адаптация материала к требованиям математической и компьютерной подготовки соответствующих специалистов. Поэтому при составлении программы курса учитывалось, что курс «Основы высшей математики» должен, с одной стороны, быть достаточным для того, чтобы играть развивающую роль, а с другой стороны, содержательным, чтобы студенты научились решать конкретные прикладные задачи.

Объем дисциплина «Основы высшей математики» составляет 138 часов, в том числе аудиторных — 68 часов, из них лекционных — 34 часа, практических занятий — 34 часа, самостоятельная работа — 70 часов.

Пособие включает следующие разделы курса: «Основы математической логики, теории множеств и теории графов», «Основы линейной алгебры», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной и нескольких переменных», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Элементы теории вероятности».

ВЕДЕНИЕ

Термин «Математика» происходит от греческого слова «матема», означающего «знание», «наука». В классическом понимании «Математика» — наука о количественных отношениях и пространственных формах. Но имеются и другие точки зрения на математику. Например, группа математиков, объединенных под псевдонимом Бурбаки, считают, что «Математика в своей аксиоматической форме представляется скоплением таких абстрактных форм и математических структур, что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм».

Математика возникла в глубокой древности из практических потребностей людей. Сначала появилась необходимость в подсчете запасов пищи, пройденного времени, затем понадобилось рассчитывать площади обрабатываемых земель. С появлением цивилизации появились приемы проектирования и расчетов возводимых сооружений. Математические знания помогли древним строителям создать сохранившееся до наших дней одно из «Семи чудес света» — знаменитые египетские пирамиды.

С древних времен математика используется и в создании орудий и техники. Крепость Сиракузы долго оборонялась благодаря изобретениям великого математика и механика Архимеда. Сегодня без математики немыслимы не только создание оружия, запуски космических аппаратов, моделирование новейшей техники, но и научные, а также прикладные исследования в области естественных и гуманитарных наук.

Историю развития математики принято разбивать на 4 периода.

Зарождение математики (13 — 6 вв. до н.э.). Математика в этот период не является самостоятельной отраслью знания. В Египте, Вавилоне, Индии и Китае появляются зачатки арифметики, геометрии, алгебры и тригонометрии. Самой развитой была вавилонская математика, унаследованная от шумеров, живших около 6000 — 4000 л. до н.э. Именно им человечество обязано *шестидесятеричной системой счисления*, используемой в настоящее время при измерении времени и углов (градусы измеряются от 0° до 360°, в минуте 60 секунд, в часе 60 минут), так и атрибутом современной десятичной системы счисления — позиционностью, благодаря которой в Вавилоне был изобретен нуль как принцип записи чисел, а не как знак (вначале «нулем» служил просто пропуск разряда). Значение позиционности для человечества сродни значению алфавита. Имен и фамилий ученых древних веков не сохранилось.

Элементарная математика (6 в. до н.э.— 17 в н.э.). В Древней Греции возникает математика как самостоятельная наука. Развивается в арабских странах. Дедуктивное изложение элементарной геометрии, возникновение теории чисел, понятия действительного числа, создание алгебры как буквенного исчисления. Основное понятие — постоянная величина. Известными древнегреческими математиками являются:

- *Фалес* — отец греческой математики, доказательства свойств равнобедренного треугольника, вертикальных углов, этим геометром были получены результаты, охватывающие почти все содержание современного школьного курса геометрии (640 — 548 гг. до н.э.);
- *Пифагор* — открыла теорему о сумме углов треугольника, доказала теорему Пифагора, установила существование пяти типов правильных многогранников и несоизмеримых отрезков.(570-471 гг. до н.э.);
- *Евдокс* — создал геометрическую теорию пропорций, т.е. теорию пропорциональных чисел, (410 — 356 гг. до н.э.);
- *Аристотель* — крупнейший философ, основатель формальной логики. Ему принадлежит четкое оформление идеи построения геометрии в виде цепи предложений, которые вытекают одно из другого на основе лишь правил логики.(384—322 гг. до н.э.),
- *Евклид* — крупнейший геометр древности, воспитанник школы Платона, жил в Египте (в Александрии). Составленные им "Начала" дают систематическое изложение начал геометрии, выполненное на таком научном уровне, что многие века преподавание геометрии велось по этому сочинению. "Начала" состоят из 13 книг (330-275 гг. до н.э.),
- *Архимед*— открыл правила для вычисления площади поверхности и объема шара и других фигур. Он же нашел приближенное значение числа π.. (287 — 212 гг. до н.э.).

С VII по XIII вв. н.э. развивалась арабская цивилизация. Представителями научной мысли в это время являлись: *Ал-Хорезми (8 в., Омар Хайям (Ал-Хайями, 1048—1131 гг.),* также *Фибоначчи* — крупнейший математик христианского средневековья (Леонардо Пизанский (ок. 1170 — после 1250). Этот математик открыл *ряд Фибоначчи* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…

Математика переменных величин: (17 — 19вв. н. э.). Дальнейшее развитие науки в целом и математики 3-го периода связано с именами европейских ученых: *Ферма, возродивший после арабов арифметику (1601 — 1665 гг.);Блез Паскаль (1623 — 1662 гг.); Рене Декарт (1596 — 1650 гг.); Исаак Ньютон (1643 — 1727 гг.); Лейбниц (1646 — 1716 гг.); Леонард Эйлер (1707 — 1783 гг., работал в России).*

За этот период появились такие математические дисциплины, как математический и функциональный анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, проективная и аналитическая геометрии, возникло основное понятие — функция.

Современная математика (начало 19 в. по настоящее время). Выдающимися математиками начала этого периода являются:

- *Карл Фридрих Гаусс* (1777—1855) — «король математиков», первый признал за неевклидовой геометрией право представлять физическое пространство. Уже в 1813 г. Гаусс разработал эту «странную геометрию», но так ничего и не опубликовал;
- *Николай Иванович Лобачевский* (1792—1856), профессор Казанского университета, создатель неевклидовой геометрии;
- *Бернгард Риман* (1826—1866) — создатель единой теорией геометрии Евклида, Лобачевского и Римана.
- *Эварист Галуа* (1811—1832) — создатель *теорию групп*, которая является основой современной алгебры и геометрии;
- *Г. Кантор* (1845-1918) — создатель теории множеств.

Большой вклад в развитие математической логики был внесен

Дж. Булем (1815-1864), О. де Морганом (1806-1871), Г. Фреге (1848-1925), Б. Расселом (1872-1970), Д. Гильбертом (1862-1943), А. Марковым (1903-1979).

Развитие математического анализа связано с именами *Коши, Лагранжа, Вейерштрасса, Бернулли* и многих других математиков.

Настоящий период характеризуется взрывным развитием математики и проникновение ее во все области науки и практической деятельности. Идет планомерное развитие самой математики: количественных отношений и пространственных форм, дается теоретическое обоснование математики, связанное с возникновение теории множеств и математической логики, происходит развитие теории вероятностей и вычислительной математики, со средины прошлого столетия возникает дискретная математика, являющаяся теоретической базой для создания и применения ЭВМ во всех сферах человеческой деятельности.

Понятия математики отвлечены от конкретных явлений и предметов. Это обстоятельство чрезвычайно существенно для приложений математики. Современные математические методы применимы в физике, экономике, социологии, психологии и многих других естественных и гуманитарных науках.

Изучение законов развития общества, включая его гуманитарную составляющую: экономику, социологию, психологию также невозможно без математики. Свидетельством этому является тот факт, что работы наиболее известных экономистов XX века, удостоенных Нобелевской премии по экономике, таких как Л. Канторович, В. Леонтьев, П. Самуэльсон, Р. Солоу, Д. Хикс, Д. Нэш, Р. Зельтен, связаны с использованием математических методов и моделей.

В настоящее время происходит также синтез аналитических методов классической математики, дискретной и вычислительной математики. В последние десятилетия появились универсальные пакеты символьных вычислений, которые позволяют без знания алгоритмов и программ решать на компьютере сложнейшие численные и аналитические задачи.

Применение математики в психологии. К настоящему времени в психологии сформировалось направление исследований, получившее название *математическая психология*. Это направление относится к области теоретической психологии, использующий для построения теорий и моделей математический аппарат. В рамках математической психологии осуществляться принцип абстрактно-аналитического исследования, в котором изучается не конкретное содержание субъективных моделей действительности, а общие формы и закономерности психической деятельности.

Объектом математической психологии являются естественные системы, обладающие психическими свойствами, соответствующие психологические теории и математические модели, объясняющие их функционирование. *Предметом* математической психологии является разработка и применение математического аппарата для адекватного моделирования систем, обладающих психическими свойствами. *Методы исследования* таких систем включают математическое моделирование и применение адекватного математического аппарата для изучения таких моделей.

Процесс математизации психологии начался с момента ее выделения в экспериментальную дисциплину и включает следующие периоды развития:

- *первый* — применение математических методов для анализа и обработки результатов экспериментального исследования, а также выведение простых психологических законов (конец XIX в. — начало), на протяжении этого периода разработаны законы обучения, психофизические законы и создан метод факторного анализа;
- *второй* — создание моделей психических процессов и поведения человека, использующих ранее разработанный математический аппарат факторного анализа (40 — 50-тые годы XX в.).
- *третий* — выделение математической психологии в отдельную дисциплину, основной целью которой является разработка математического аппарата для моделирования психических процессов и анализа данных психологических экспериментов (60-е годы XX в. — по настоящее время).

Третий этап характеризуется выделением математической психологии а отдельную область теоретической психологии. Термин «математическая психология» стал применяться с появлением в 1963 г. в США «Руководства по математической психологии» [Handbook, 1963]. В эти же годы здесь начинает издаваться журнал «Journal of Mathematical Psychology». Третий период математической психологии характеризуется следующими этапами своего развития.

В 60 — 70-тые годы прошлого столетия получили широкое распространение работы по моделированию обучения, памяти, обнаружения сигналов, поведения, принятия решений. Для их разработки использовался математический аппарат вероятностных процессов, теории игр, теории полезности и др. Было завершено создание математической теории обучения. Наиболее известны модели Р. Буша, Ф. Мостеллера, Г. Бауэра, В. Эстеса, Р. Аткинсона. В это же время появляется множество математических моделей по психофизике, например С. Стивенса, Д. Экмана, Ю. Забродина, Дж. Светса, Д. Грина, М. Михайлевской, Р. Льюса. В работах по моделированию группового и индивидуального поведения, в том числе при ситуации неопределенности, использовались теории полезности, игр, риска и стохастические процессы. Это модели Дж. Неймана, М. Цетлина, В. Крылова, А.Тверского, Р. Льюса, а также были разработаны глобальные математические модели основных психических процессов.

В период до 80-х гг. появляются первые работы по психологическим измерениям: осуществляется дальнейшая разработка методов факторного анализа, аксиоматики и моделей измерения, предлагаются различные классификации шкал, ведется работа над созданием методов классификации и геометрического представления данных, строятся модели, использующие лингвистические переменные (Л. Заде). В это же время особое внимание уделялось уточнению и развитию моделей, связанных с разработкой аксиоматики различных психологических теорий.

Например, в *психофизике* была создана современная теория обнаружения сигналов (Д. Свете, Д.Грин), разработаны структуры сенсорных пространств (Ю. Забродин, Ч.Измайлов), случайных блужданий (Р. Льюс, 1986), различения Линка и т.д.

В области *моделирования группового и индивидуального поведени* предложены модель решения и действия в психомоторных актах (Г. Коренев, 1980), модель целенаправленной системы (Г. Коренев), «деревья» предпочтения А. Тверского, модели системы знаний (Дж. Грино), вероятностная модель обучения (А. Дрынков, 1985), модель поведения в диадном взаимодействии (Т. Савченко, 1986), реализовано моделирование процессов поиска и извлечения информации из памяти (Р. Шифрин, 1974), моделирование стратегий принятия решений в процессе обучения (В. Венда, 1982) и др.

В 90-тые годы по настоящее время проводятся исследования по дополнению и уточнению предложенных ранее психологических моделей, а также продолжается интенсивное развитие теории измерений, теории конструирования тестов; разрабатываются новые более адекватные измерительные шкалы (Д. Льюс, П. Саппес, А. Тверски, А. Марли), широко внедряется в психологию синергетический подход к моделированию.

Применение математики в социологии. Основным объектом изучения в социологии являются *социальные системы*. Под социальной системой понимается способ организации коллектива (множества) людей, который возникает в результате их взаимодействия на основе норм и ценностей, объединяющих их в единое целое. В свою очередь множество людей, образующих социальную систему подразделяется на подмножества, которые образуют подсистемы, связанные между собой разного вида взаимоотношениями. Если обозначить систему греческой буквой Σ, а ее подсистемы, соответственно, Σ_1, Σ_2, …, Σ_n, то математической моделью социальной системы является семейство подмножеств Σ_1, Σ_2, $\cdots$, Σ_n, с заданным набором подмножеств $R_1, R_2, \ldots, R_m$ декартового произведения $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$.

В социологии выделились три основных направления, использующие современный математический аппарат:

- применение математических методов при моделировании социальных явлений и систем;
- разработка методов измерения признаков социальных явлений, в частности разработка измерительных процедур для анкетирования, анализа особенностей социологических данных и их шкалирования;
- разработка методов анализа данных для поиска статистических закономерностей в тех случаях, когда исходные данные не удовлетворяют строгим требованиям математической статистики, и прогнозирование на основе этих закономерностей развития социальных явлений и систем.

Результаты исследований в указанных направлениях отражены в монографиях западных авторов: С.С. Стивенса, П. Суппеса и Дж. Зинеса, П.Ф. Лазарсфельда, классиков теории социологического измерения; Л.Л. Терстоуна, первым предложившего конструктивный способ измерения установки и тем самым способствовавшего активному развитию соответствующей социально-психологической теории; «Американская социология» под редакцией Т. Парсонса, содержащей обзор Р. Макгинниса. А также в ряде фундаментальных статей, ставших классическими: Б.Ф.Грина об измерении установки; Н. Рашевского о модели подражательного поведения; Л. Гуттмана о шкальном анализе; учебника по статистическим методам Д. Мюллера и К. Шусслера, рассчитанного на читателя-гуманитария; сборника "Математические методы в социальных науках" под редакцией П. Лазарсфельда и Н. Генри. Много полезных результатов из области теории измерений в социологии принадлежат таким известным исследователям, как П.К. Фишберн, У.С. Торгерсон,

Математический аппарат широко используется при описании таких сложных социологических систем и моделей, как:

- статистическая психоисторическая система, охватывающая все человеческое общество, которое, по мнению В.И. Вернадского, является глобальным биосферным явлением, определяющим будущее планеты, так как на современном этапе действия отдельных элитарных групп в лидирующих государствах могут оказать катастрофическое воздействие на биосферу Земли, таким образом модель социальных процессов не может рассматриваться изолированно от модели эволюции земной биосферы в целом (при описании модели используются интегралы, ряды Фурье, производные функций);

- динамическая психоисторическая система, которая функционирует во времени (при ее моделировании используются дифференциальные уравнения);
- системы, описывающая поведение определенного типа индивида в жизненном пространстве некоторой группы людей при воздействии на нее некоторых факторов, создающих в этом пространстве определенное состояние (социальное поле), которое, в свою очередь, производит характерное воздействие на определенные объекты, появляющееся в данном жизненном пространстве (при описании таких систем применяются полевые модели, которые используют понятие функции многих переменных);
- недетерминированные стохастические социальные системы, которые подвержены неожиданным случайным малым изменениям с течением времени (при описании таких систем используется аппарат теории вероятности и математической статистики);
- модель формирования общественного мнения, которая включает элементы полевой и стохастической моделей (при описании используется аппарат дифференциального исчисления функций одной и нескольких переменных;
- модель системы распределения власти в иерархической социальной системе, в которой власть может передаваться от инстанции с большей текущей властью к инстанциям с меньшей текущей властью (при математическом описании этой системы используется дифференциальное и интегральное исчисление);
- модель коллективных действий (коллективных рефлексов) группы людей или общества в целом, совершаемых в ответ на изменения, происходящие во внешнем мире, к коллективным относят наследственно-органические рефлексы, коллективное настроение, коллективные мимикосоматические рефлексы, коллективное сосредоточение, коллективное наблюдение, коллективное творчество и согласованные коллективные действия (при математическом описании таких социальных моделей используются производные и дифференциальные уравнения);
- модель социализации индивида, в ходе которой формируется личность, (при описании процесса формирования личности используется математический алгоритм, в основу которого закладывается конкретно выбранная социологическая теория, квадратичная и линейная функции);
- гендерные системы (от англ. слова gender — пол), т.е. социальные системы индивидов, в которых межличностное общение, взаимодействие в семье, социальные отношения в основных институтах общества, в социальных классах, в иерархиях крупных организаций и при формировании структуры занятости в обществе, осуществляется с учетом отношений между мужчинами и женщинами (при моделировании таких систем используются такие математические понятия, как матрицы, определители, отображения, бинарные отношения, системы алгебраических уравнений;

• модель межличностных взаимодействий, т.е системы отношений между индивидами общества (при описании таких систем используется математический аппарат, применяемый при моделировании гендерных систем).

1. ЭЛЕМЕНТЫ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Основные понятия логики высказываний

Для описания способов задания конечных и бесконечных по числу элементов множеств понадобятся некоторые понятия логики высказываний.

Пропозициональные функции. Свойства элементов конечных и бесконечных множеств описываются с помощью «функций-высказываний», т.е *пропозициональных функций*. Согласно мнению известного английского лингвиста Дж. Лайона «*пропозиция — это то, что выражается с помощью повествовательного предложения для утверждения чего-либо*». Таким образом, *пропозиция и высказывание* — синонимы.

Определение 1.1. *Под пропозициональной функцией (функцией-высказыванием или одноместным предикатом) понимается выражение, содержащее переменный символ x.*

Введение в выражение переменного символа позволяет с его помощью описывать свойства элементов, и, следовательно, — сами множества. Например, выражение

«*Петров — студент БГЭУ*»

определяет отдельного человека, если в БГЭУ нет однофамильцев. В свою очередь пропозициональная функция

«*x — студент БГЭУ*»

определяет множество S — всех студентов БГЭУ. Это множество, используя принятые обозначения в теории множеств, записывается следующим образом:

$$S=\{\, x\in U \mid x - студент\ БГЭУ \,\},$$

где U — универсальное множество, например, всех студентов Республики Беларусь. Таким образом, помимо перечисления элементов конечных множеств, их можно определять с помощью пропозициональных функций.

Если ввести для некоторого множества *высказываний* V (*пропозиций*), (например, повествовательных предложений некоторой страницы некоторой книги) формальные обозначения, например, буквами латинского алфавита f, $p, q, \ldots,$ и т.д., то соответствующие *пропозициональные функции* будут обозначаться $f(x)$, $p(x), q(x), \ldots$ и т.д.

В дальнейшем буквенные обозначения высказываний будут называться *пропозициональными переменными*. Такие переменные в логической формуле могут заменяться любыми высказываниями ложными или истинными.

1.2. Логические операции и их свойства

Операции над высказываниями предикатами. Заданное множество высказываний $V=\{\, f, p, q, \ldots\}$ можно расширить с помощью союзов «и», «или», связывающих высказывания, принадлежащих V, а также их отрицаний. Дополняя V высказываниями:

$$«f \text{ и } p»; \quad «f \text{ или } q»; \quad «p \text{ или } q»; \quad «\bar{f}, \bar{p}, \bar{q}, \ldots»; \quad «\bar{f} \text{ и } q», \quad «f \text{ или } \bar{q}», \ldots$$

получим новое расширенное множество высказываний W. Здесь $\bar{f}, \bar{p}, \bar{q}$ обозначают отрицания высказываний f, p, q. Отрицание $\bar{f}$ высказывания f читается «*не* f». Например, отрицанием высказывания «*Петров — студент БГЭУ*» будет высказывание «*Петров — не студент БГЭУ*».

В математической теории, называемой *формальной логикой высказываний*, выражения «f *и* p» называются *конъюнкциями*, «f *или* q» — *дизъюнкциями*. Для упрощения союзы *и*, *или* обозначаются, соответственно, символами $\wedge$, $\vee$. Таким образом, указанные выше пропозиции записываются в виде следующих логических формул:

$$f \wedge p; \quad f \vee q; \quad p \vee q; \ldots; \quad \bar{f} \wedge q; \quad f \vee \bar{q}; \ldots$$

Аналогичные операции выполняются над пропозициональными функциями, описывающими всевозможные множества:

$$f(x) \wedge p(x); \quad f(x) \vee q(x); \quad p(x) \vee q(x); \ldots; \quad \bar{f}(x) \wedge q(x); \quad f(x) \vee \bar{q}(x); \ldots$$

При формулировке математических утверждений часто используются высказывания вида «*если выполняется f, то справедливо p*», «*f выполняется тогда и только тогда, когда выполняется p*», где f и p — некоторые высказывания. Высказывания первого вида в формальной логике высказываний называются *импликациями* и записываются в виде $f \rightarrow p$, а вторые — равносильными высказываниями, которые записываются в $f \leftrightarrow p$.

Первая запись читается «*из f следует p*» или «*если f, то p*», а вторая «f равносильно p» или «f если и только если p». Первая операция, обозначаемая стрелкой $\rightarrow$, называется *операцией импликации*, а вторая $\leftrightarrow$ — *знаком равносильности* или *знаком тождества* высказываний.

При построении сложных высказываний с помощью приведенных операций *конъюнкции, дизъюнкции, отрицания, импликации* используются круглые скобки, которые определяют порядок выполнения операций. Примерами сложных высказываний являются следующие высказывания:

$$(f \wedge p) \vee (p \wedge q); \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)).$$

1.3. Таблицы истинности логических высказываний.

Любое высказывание может быть либо *истинным*, либо *ложным*, т.е. принимать значение либо «*Л*» — *ложь*, либо «*И*» — *истина*. Часто вместо букв *Л* и *И* используются, соответственно, числа 0 и 1.

При построении с помощью операций *конъюнкции, дизъюнкции, импликации, равносильности, отрицания* новых высказываний возникает проблема распознавания их истинности. Такая проверка осуществляется с помощью *таблиц истинности* высказываний.

Если для заданных высказываний при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных таблицы истинности совпадают, то такие высказывания считаются равносильными (тождественными, эквивалентными). Значениями пропозициональных переменных, как отмечено выше, являются буквы *Л, И* или, соответственно, числа 0 и 1. Ниже приводятся таблицы истинности конъюнкции, дизъюнкции, импликации, равносильности и отрицания.

Таблица 1 конъюнкции		
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица 2 дизъюнкции		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица 3 импликации		
p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица 4 равносильности		
p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таблица 5 отрицания	
p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Проверка истинности сложных высказываний проводится в порядке, предписываемом расстановкой скобок с помощью приведенных выше таблиц истинности.

Высказывания, которые принимают хотя бы одно значение 1 при любых значениях пропозициональных переменных, называются *выполнимыми,* а если все значения равны 1, то — *общезначимыми,*

Пример 1.1. Вычислить таблицу истинности следующей высказывания $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ и определить выполнимо оно или общезначимо.

Решение. Записываем таблицу, в первом и втором столбцах которой приведены возможные значения пропозициональных переменных p и q.

Затем, используя таблицу 1 истинности конъюнкции $p \wedge q$ и таблицу 2 дизъюнкции $p \vee q$, записываем их значения, соответственно, в третьем и четвертом столбцах таблицы для соответствующих значений пропозициональных переменных. После этого, используя вычисленные значения конъюнкции и дизъюнкции и таблицу 3, вычисляем значения импликации $(p \wedge q) \to (p \vee q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Так как все значения данного высказывания равны 1, то оно общезначимо.

Свойства логических операций. Введенные на множестве высказываний операции $\wedge$ — конъюнкции, $\vee$ — дизъюнкции, $\rightarrow$ — импликации, $\leftrightarrow$ — равносильности и отрицания $-$, удовлетворяют соотношениям:

1. $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$, $\quad p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ — закон коммутативности;

2. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $\quad p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ — закон дистрибутивности;

3. $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $\quad (p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ — закон ассоциативности;

4. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$;

5. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$;

6. $\bar{\bar{p}} \leftrightarrow p$ — закон двойного отрицания;

7. $(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$, $\quad (\overline{p \vee q}) \leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$ — законы Моргана.

Пример 1.2. Проверить с помощью таблиц истинность логической формулы $(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$.

Решение. Для проверки истинности формулы $(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$, используя таблицы 1, 2 и 5, вычислим таблицы истинности высказываний $\overline{p \wedge q}$ и $\bar{p} \vee \bar{q}$. Если значения вычисленных таблиц совпадут при соответствующих значениях переменных p и q, то заданная логическая формула верна.

Записываем в вычисляемую таблицу истинности значения переменных p и q, соответственно, в первый и второй столбцы. Затем, используя таблицу 5, записываем в 3-тий и 4-тый столбцы таблицы, соответственно, значения переменных $\bar{p}$ и $\bar{q}$. После этого, используя значения переменных p и q, записываем в 5-тый столбец из таблицы 1 значения конъюнкции $p \wedge q$, а значения ее отрицания $\overline{p \wedge q}$ с помощью таблицы 5 — в шестой столбец.

Далее, используя значения переменных $\bar{p}$, $\bar{q}$ и таблицу 2, в 7-ой столбец таблицы записываем значения дизънкции $\bar{p} \vee \bar{q}$. Сравнивая, вычисленные значения высказываний $\overline{p \wedge q}$ и $\bar{p} \vee \bar{q}$ (в таблице они выделены жирным шрифтом), убеждаемся в том, что они идентичны. Следовательно, логическая формула $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ верна.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	0	0	1	**0**	**0**	1
1	0	0	1	0	**1**	**1**	1
0	1	1	0	0	**1**	**1**	1
0	0	1	1	0	**1**	**1**	1

Замечание 1.1. При проверке равносильности двух высказываний r и s логическая формула $r \leftrightarrow s$ должна быть общезначима. В приведенном примере, вычислив с помощью таблицы 4 (истинности равносильности), убеждаемся в том, что формула $(\overline{p \wedge q}) \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$ — общезначима.

Кванторы общности и существования. В математике, естественных и гуманитарных науках результаты исследований формулируются в виде следующих утверждений:

«*Существует такой* $x \in X$*, что* $p(x)$»;

«Для любого $x \in X$ выполняется $p(x)$».

Здесь X — некоторое множество, а $p(x)$ — некоторый предикат.

Выражение «*Существует такой ...*» называется *квантором существования* и обозначается в математической логике *символом* $\exists$ (перевернутая E — первая буква английского слова Exists — существует).

Выражение «*Для любого ...*» или «*Любой ...*» называется *квантором всеобщности* и обозначается символом $\forall$ (перевернутая A — первая буква английского слова Any — любой).

Используя введенные обозначения, указанные утверждения записываются в виде следующих формул: $\exists(x \in X)\ p(x)$; $\forall(x \in X)\ p(x)$.

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В СОЦИОЛОГИИ

2.1. Понятие множества

Множество — первичное понятие математики, т.е. это понятие не определяется через другие, а только поясняется. Создатель теории множеств Г. Кантор (1845-1918) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Приведенные определения множества нельзя считать математически строгими, такого определения не существует, поскольку понятие множества является исходным, на основании которого вводятся остальные понятия математики, т. е. множество является основным строительным материалом математики.

Множество — это совокупность каких-либо объектов. Так, можно говорить о множестве целых чисел, о множестве точек прямой, о множестве жителей города и т.д. Объекты, входящие в данное множество, называются *элементами множества.* Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди и т. д. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и ее применимость к очень многим областям знания.

Множества, состоящие из конечного числа элементов (причем неважно, известно это число или нет, главное, оно существует), называются *конечными,* а множества, состоящие из бесконечного числа элементов, — *бесконечными.* Множества обычно обозначаются большими латинскими буквами *A, B, X,* а их элементы малыми *a, b, x.*

Математическая запись $x \in X$ означает, что x — элемент множества X и читается «x принадлежит множеству A». Символ $\in$ называется знаком принадлежности. Если же x не принадлежит множеству X, то пишут $x \notin X$.

Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то множество A называется подмножеством множества B. В этом случае используется запись $A \subset B$. Знак $\subset$ называется включением. Запись $A \subset B$ читается «множество A — подмножество множества B» или « A содержится в B ».

Множества A и B называют *равными* $A = B$, если $B \subset A$ и $A \subset B$. Для обозначения равных множеств используется запись $A = B$. Например, множество A — детей сыновей и дочерей отца и множество B — его внуков равны, так как состоят из одних и тех же элементов. Все студенты-юноши БГЭУ образуют подмножество в множестве всех студентов БГЭУ.

Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

В математике принято рассматривать множества, как подмножества, состоящие из элементов некоторого *универсального* множества, которое обозначается буквой U. Указанное соглашение позволяет избегать парадоксов, имеющих место в теории множеств.

Способы задания множеств. Чаще всего используются два способа задания множеств. Конкретное множество задают либо перечислением его элементов, либо описанием свойств элементов множества, которые позволяют отличать их от элементов любых других множеств.

Задание конечных множеств. Первый способ задания применим к конечным множествам. Например, если рассматривается множество первых букв латинского алфавита *a, d, c, d, e,f*, то для обозначения этого множества используется запись

$$A = \{ a, b, c, d, e, f \}.$$

Часто элементы конечного множества нумеруют натуральными числами. В этом случае множество A, состоящее из n элементов записывается в следующем виде:

$$A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \}.$$

Второй способ задания множеств используется как для конечных, так и бесконечных множеств.

Задание бесконечных множеств. Если свойства элементов некоторого бесконечного множества A из универсального множества U определяются одной пропозициональной функцией $p(x)$, то A обозначается

$$A = \{ x \in U \mid p(x) \}.$$

Если с помощью пропозициональных функций $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_k(x)$ перечисляется несколько свойств элементов множества A, то оно записывается следующим образом:

$$A = \{ x \in U \mid p_1(x) \wedge p_2(x) \wedge \ldots \wedge p_k(x) \}$$

Примеры множеств. Множества могут образовывать объекты любой природы, например:

а) множество S студентов группы ДИС-1, которое может быть задано перечислением студентов (списком группы) или с помощью предиката $S_1 = \{ x \in S \mid x - \text{студент ДИС-1} \}$, где S — множество всех студентов БГЭУ;

б) множество индивидов конкретного социума;

в) множество норм и правил поведения данного социума;

г) множество реакций конкретного индивида при воздействии на него определенным набором раздражителей;

Примеры множеств, исследуемых в психологии и социологии:

- множество психических (социологических) явлений;
- множество поведенческих проявлений человека;
- множество норм и правил поведения субъектов в социуме;
- множество условий проявления человеческой сущности;
- множества количественно-качественных результатов психологических (социологических) исследований;
- множества психологических (социологических) гипотез;
- множества психологических(социологических) тестов.

Перечисленные множества исследуются сначала качественно, а затем количественно с помощью математических средств.

Примеры числовых множеств. Числовые множества широко применяются в таких областях психологии, как математическая психология, включая психометрику, психофизику, а также при хронометрии и тестировании способностей человека. В социологии без применения числовых множеств невозможно моделирование и последующая метризация сложных социальных систем.

Ниже приводятся основные числовые множества, которые используются в математике и различных областях человеческой деятельности, включая психологию и социологию.

- Множество натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, возникло в результате необходимости подсчета неделимых предметов обихода.
- Множество целых чисел $Z = \{\ldots -n, \ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n, \ \ldots\}$. введение этого множества позволяет решать простейшие уравнения $a + x = b$ при b меньшем a.
- Множество рациональных чисел $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m \in Z) \wedge (n \in Z) \right\}$. Возникло в результате необходимости решать уравнения вида $ax = b$, в котором $a, b \in Z$. Помимо записи в виде дроби каждое рациональное число, можно записать в виде конечной $\alpha, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k$ (например $\frac{5}{4} = 1{,}25$) или бесконечной периодической десятичной дроби $\alpha, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots$ (например $\frac{4}{3} = 1{,}3333\ldots$).

• Множество иррациональных чисел *IR*, которые записываются в виде бесконечных непериодических десятичных дробей $\alpha, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots\alpha_\ell\ldots$ (например $\sqrt{2}=1{,}414213562\ldots$, $\pi=3{,}141592653\ldots$, $e=2{,}718281828\ldots$). Среди иррациональных чисел различают подмножества алгебраических и трансцендентных чисел, первые из которых являются корнями многочленов с целыми коэффициентами, ко вторым относятся числа *e*, π, значения тригонометрических функций, логарифмов и многие другие иррациональные числа.

• Множество действительных (вещественных) чисел *R*, которое является объединением рациональных и иррациональных чисел, т.е. $R=Q\bigcup I$;

• Наиболее широкое числовое множество образуют комплексные числа вида $a+bi$, содержащее в качестве подмножества множество действительных чисел. В записи комплексного числа i — мнимая единица, равная по определению $i=\sqrt{-1}$, т.е. $i^2=-1$. Введение мнимой единицы обусловлено необходимостью решать простейшие уравнения вида $x^2=-a$, где $a<0$. Таким образом, множество комплексных чисел $C=\{a+bi \mid (x, y\in R)\wedge(i=\sqrt{-1})\}$.

Операции над множествами и их свойства. Во многих теоретических и прикладных областях человеческой практики, включая социологию и психологию, при исследовании множеств возникают задачи, связанные с выделением их общих элементов, построения новых множеств посредством дополнения одного их множеств элементами другого множества или удаления из одного множества их общих элементов, перечисления для заданного множества элементов, обладающих противоположными свойствами. В связи необходимостью выполнения указанных преобразований множеств вводятся операции *пересечения, объединения, разности* двух или более множеств и операция *дополнения*. Далее рассматриваются множества, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества *U*.

Определение 2.1. Объединение двух данных множеств *A*, $B\subset U$ обозначается $A\bigcup B$ и состоит из элементов принадлежащих *A* или *B*, где $\bigcup$ символическое обозначение операции объединения.

Таким образом, пропозициональной функцией, определяющей свойство элементов объединения, является дизъюнкция $(x\in A)\vee(x\in B)$ и, следовательно,

$$A\bigcup B=\{x\in U \mid (x\in A)\vee(x\in B)\}.$$

Определение 2.2. Пересечение двух данных множеств *A*, $B\subset U$ обозначается $A\bigcap B$ и состоит из элементов принадлежащих одновременно *A* и *B*, где $\bigcap$ символическое обозначение операции пересечения.

Таким образом, пропозициональной функцией, определяющей свойство элементов объединения, является конъюнкция $(x\in A)\wedge(x\in B)$ и, следовательно,

$$A\bigcap B=\{x\in U \mid (x\in A)\wedge(x\in B)\}.$$

Определение 2.3. Разность двух данных множеств *A*, $B\subset U$ обозначается $A\setminus B$ и состоит из элементов принадлежащих *A* и не принадлежащих *B*, где $\setminus$ символическое обозначение операции вычисления разности множеств.

Таким образом, пропозициональной функцией, определяющей свойство элементов объединения, является конъюнкция $(x \in A) \wedge (x \notin B)$ и, следовательно,

$$A \setminus B = \{ x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \}.$$

Определение 2.4. Дополнение множеств $A \subset U$ обозначается $\overline{A}$ и состоит из тех элементов универсального множества *U*, которые не принадлежат *A*, где символ $^{-}$ обозначает операцию дополнения.

Таким образом, элементы дополнения $\overline{A}$ определяются пропозициональной функцией $x \notin A$ и, следовательно,

$$\overline{A} = \{ x \in U \mid x \notin A \}.$$

Так как введенные операции определяются простейшими пропозициональными функциями либо функциями, получаемыми из них логическими операциями, то свойства операций, выполняемые над множествами, аналогичны свойствам логических операций, т.е. для любых множеств *A*, *B*, *C* выполняются следующие соотношения:

a) $A \bigcap B = B \bigcap A$, $A \bigcup B = B \bigcup A$ — закон коммутативности;

b) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ — закон дистрибутивности;

c) $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$, $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$ — закон ассоциативности;

d) $(A = B) \leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A))$ — равенство двух множеств;

e) $(A \subset B) \leftrightarrow (A \bigcap \overline{B} = \varnothing)$ — закон включения;

f) $\overline{\overline{A}} = A$ — закон двойного дополнения;

g) $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$, $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$ — законы Моргана для множеств.

Имея заданный набор множеств с помощью введенных операций можно конструировать различные множества, которые определяются формулами, в запись которых входят буквенные обозначения множеств и символические обозначения операций. Порядок выполнения операций определяется расстановкой скобок в формуле. Например, для заданных множеств

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{ 2,4,6\}, \quad C = \{4,5,6\}$$

из универсального множества $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ формулы $(A \bigcap \overline{B}) \setminus C$ и $(C \bigcap \overline{B}) \bigcup \overline{A}$ определяют, соответственно, множества $\{1,3\}$ и $\{5,7,8,9,10\}$, т.е.

$$(A \bigcap \overline{B}) \setminus C = \{1,3\}, \qquad (C \bigcap \overline{B}) \bigcup \overline{A} = \{5,7,8,9,10\}.$$

Типовыми вычислительными задачами данного раздела 1.4 являются:

а) **Задача 1.** По заданному набору множеств из универсального множества и заданной формуле, определяющей некоторое множество, выписать все его элементы;

б) **Задача 2.** Доказать равенство двух множеств, заданных соответствующими формулами, при явном задании элементов множеств, входящих в формулу, и при неявном их задании.

Пример 2.1. Для заданных множеств $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{ 2,4,6\}$, $C=\{4,5,6\}$ из универсального множества $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ найти множество, определяемое формулой $(C\bigcap\overline{B})\bigcup\overline{A}$.

Решение. Последовательно выписываем элементы множеств $\overline{B}$, $C\bigcap\overline{B}$, $\overline{A}$, а затем выписываем элементы искомого множества $(C\bigcap\overline{B})\bigcup\overline{A}$.

Используя определение 2.4, последовательно просматриваем элементы универсального множества *U* и относим к $\overline{B}$ те элементы *U*, которые не принадлежат *B*. В результате получим множество $\overline{B}=\{1,3,5,7,8,9,10\}$.

Затем, используя определение 2.2, просматриваем элементы множества $\overline{B}$ и относим к $C\bigcap\overline{B}$ те его элементы, которые принадлежат множеству *C*. Тем самым определяем множество $C\bigcap\overline{B}=\{5\}$.

После этого, используя определение 2.4, просматриваем элементы универсального множества *U* и выписывая его элементы, не принадлежащие *A*. В результате получим множество $\overline{A}=\{7,8,9,10\}$. Наконец, используя определение 2., к элементам множества $\overline{A}$ добавляем элементы множества $C\bigcap\overline{B}$ и находим искомое множество $(C\bigcap\overline{B})\bigcup\overline{A}=\{5,7,8,9,10\}$.

Пример 2.2. Доказать справедливость равенства $(A\setminus B)\bigcap C=(C\setminus B)\bigcap A$ для множеств $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, $C=\{1,2\}$.

Решение. Множество $A\setminus B$ состоит из элементов, принадлежащих *A*, которые не входят в *B*. Следовательно, просматривая поочередно элементы из *A* и отбрасывая те, которые принадлежат *B*, получим множество $A\setminus B=\{1,2\}$. Пересечение $(A\setminus B)\bigcap C$ включает элементы, принадлежащие одновременно $A\setminus B$ и *C*, следовательно, $(A\setminus B)\bigcap C=\{1,2\}$. Далее, просматривая элементы множества *C* и отбрасывая те из них, которые принадлежат *B*, находим $C\setminus B=\{1,2\}$. Элементы 1, 2 и только они являются общими элементами множеств $C\setminus B$ и *A*, следовательно, их пересечение $(C\setminus B)\bigcap A=\{1,2\}$. Множества, состоящие из одних и тех же элементов равны, следовательно доказана справедливость равенства $(A\setminus B)\bigcap C=(C\setminus B)\bigcap A$ для данных множеств.

Замечание 2.1. При выписывании элементов объединения двух множеств, повторы элементов исключаются, так как при задании множеств все элементы должны быть различными.

При решении задач второго типа в случае неявного задания множеств, т.е. при вхождении в соответствующие формулы только буквенных обозначений, используются диаграммы Эйлера-Венна.

Диаграммы Эйлера-Венна представляют собой схематическое изображение универсального множества *U* в виде прямоугольника, а его подмножества изображаются в виде кругов. При таком изображении наглядно иллюстрируются свойства операций, выполняемых над множествами, а также множества, определяемые различными формулами. Два множества, заданные формулами, считаются равными, если их изображения в виде диаграмм Эйлера-Венна совпадают. На рис. 2.1 — 2.4 изображены диаграммы Эйлера-Венна, иллюстрирующие результаты выполнения операций объединения, пересечения, вычисления разности двух множеств *A, B* и операции дополнения множества *A*. Соответствующие графические изображения множеств $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$ и $\bar{\bar{A}}$ на рис 2.1 — 2.4 закрашены серым цветом.

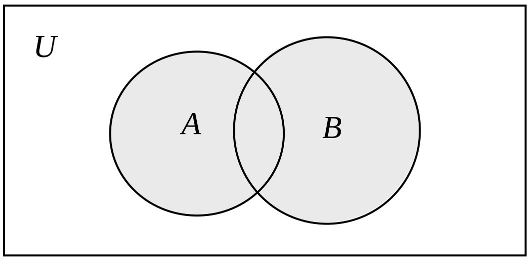

Рис 2.1. $A \bigcup B$

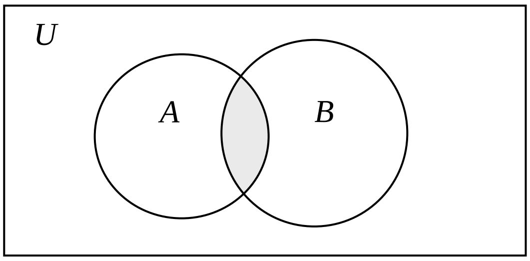

Рис 2.2. $A \bigcap B$

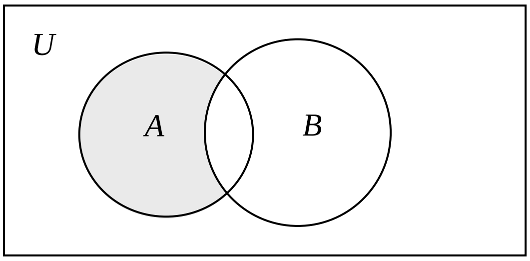

Рис 2.3. $A \setminus B$

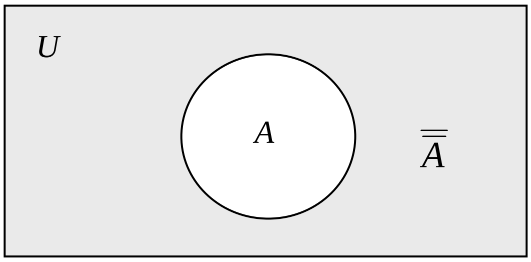

Рис 2.4. $\bar{\bar{A}}$

Пример 2.3. Изобразить в виде диаграммы Эйлера-Венна множество $(C \bigcap \overline{B}) \bigcap \overline{A}$.

Решение. Изображаем три множества *A B C* на диаграмме в виде кругов, которые обозначим теми же буквами и закрашиваем светло-серым цветом внешность круга *B*, которая изображает в силу определения 2.4 множество $\overline{B}$ (см. рис. 2 .5). В силу определения 2.2 пересечением $C \bigcap \overline{B}$ будет являться закрашенная часть прямоугольника, ограниченная окружностью *C* (см. рис. 2 .6). Пересечение множеств $C \bigcap \overline{B}$ и $\overline{A}$ — общая часть внешности круга *A* и закрашенной части круга *C*. Таким образом, множество $(C \bigcap \overline{B}) \bigcap \overline{A}$ на

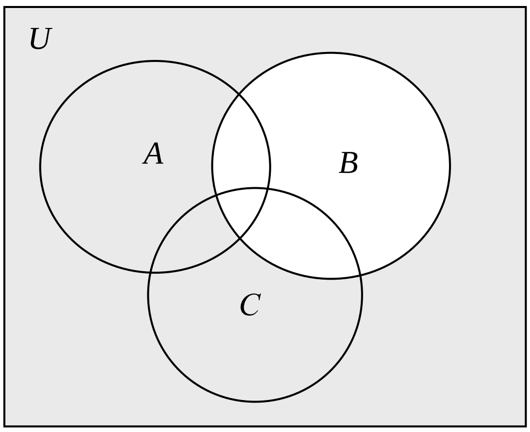

Рис 2.5. $\overline{B}$.

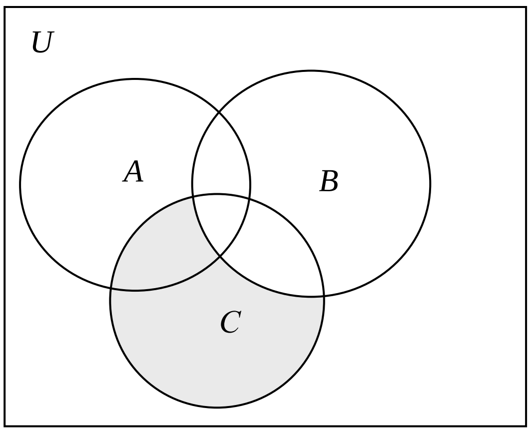

Рис 2.6. $C \bigcap \overline{B}$.

рис. 2.7 изображает закрашенная часть круга *C*.

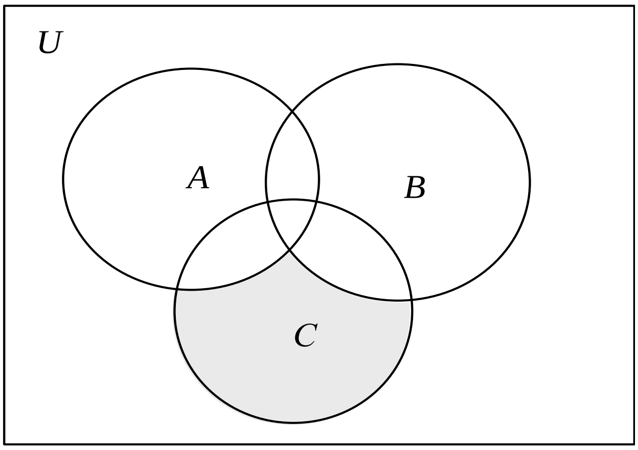

Рис. 2.7. $C\bigcap\overline{B})\bigcap\overline{A}$.

Пример 2.4. С помощью диаграммы Эйлера-Венна доказать справедливость первого закона Моргана для множеств.

Решение. Убедимся в справедливости равенства

$$\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B},$$

изобразив диаграммы его левой и правой частей. В силу определения 2.2. пересечением множеств *A* и *B* является закрашенная часть прямоугольника, изображенного на рис 2.2. Следовательно, в силу определения 2.4 множество $\overline{A\bigcap B}$ изображает закрашенная часть прямоугольника на рис. 2.8.

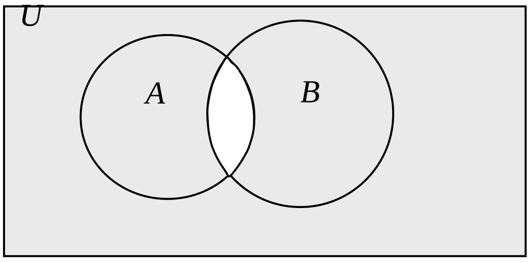

Рис 2.8. $\overline{A\bigcap B}$

Множествам $\overline{A}$ и $\overline{B}$ на диаграмме Эйлера-Венна в силу определения 2.4 соответствуют закрашенные внешности кругов *A* и *B*, изображенных на рис. 2.9 и 2.10. Следовательно, в силу определения 2.1 объединение $\overline{A}\bigcup\overline{B}$ изображает закрашенная часть прямоугольника на рис. 2.8. Так как диаграммы Эйлера-Венна левой и правой частей равенства $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$ совпадают, то оно справедливо.

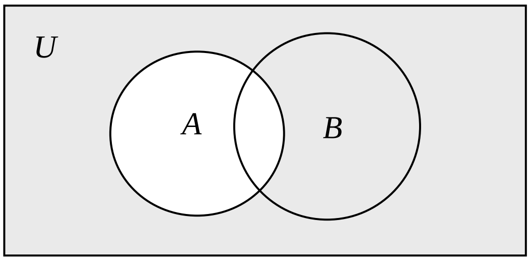

Рис 2.9. $\overline{A}$.

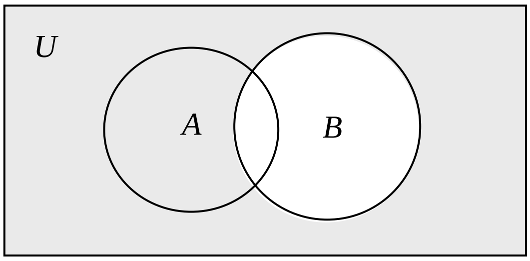

Рис 2.10. $\overline{B}$.

Характеристические вектора и действия над ними. Для задания подмножеств конечных множеств используются *характеристические* вектора. Такой способ задания подмножеств удобен при использовании компьютеров для решения различных задач, включая задачи, приведенные в подразделе 2.1.

Арифметическим *n*-мерным вектором называется произвольный упорядоченный набор действительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n$. Для обозначения векторов используются малые латинские буквы, а наборы чисел окаймляются круглыми скобками, т.е. полагается $x=(x_1,x_2,\ldots x_i,\ldots,x_n)$.

Число n называется длиной вектора, а числа $x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n$ называются его *компонентами*. Если компоненты вектора равны 1 или 0, то такой вектор называется *бинарным* или 0,1-вектором.

Во множестве бинарных векторов, помимо арифметических операций, вводятся операции специального вида, а именно: операция *бинарного сложения* (обозначение $x \oplus y$), операция *бинарного умножения* (обозначение $x \otimes y$) двух 0,1-векторов x, y и операция *инвертирования* вектора x (обозначение $\bar{x}$).

При вычислении суммы $x \oplus y$, произведения $x \otimes y$ двух 0,1-векторов $x = (x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_i, \ldots, y_n)$ и инвертированного вектора $\bar{x}$ используются таблицы. Если обозначить i-е компоненты векторов $x \oplus y$, $x \otimes y$ и $\bar{x}$, соответственно $x_i \oplus y_i$, $x_i \otimes y_i$ и $\bar{x}_i$, то для их вычисления используются, соответственно, таблицы следующего вида:

Таблица 1

x_i	y_i	$x_i \oplus y_i$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 2

x_i	y_i	$x_i \otimes y_i$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
	1	1

Таблица 3

x_i	$\bar{x}_i$
0	1
1	0

Бинарные вектора используются для задания подмножеств конечного множества мощности n. Если задано множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}$ и некоторое его подмножество B, то компоненты его характеристического вектора $x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ определяется следующим образом: для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ полагается

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in B; \\ 0, \text{ если } a_i \notin B. \end{cases} \tag{2.1}$$

Если задан характеристический вектор $x_B = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ некоторого подмножества B из множества A, то для определения элементов этого подмножества достаточно поочередно просмотреть компоненты x_B и включить в B те элементы множества A, которые соответствуют его ненулевым компонентам.

Операции сложения и умножения характеристических векторов x_B и x_C двух подмножества B и C множества A, определяют, соответственно, характеристические вектора объединения $B \bigcup C$ и пересечения $B \bigcap C$, т.е. справедливы следующие равенства

$$x_B \oplus y_C = x_{B \bigcup C}, \; x_B \otimes y_C = x_{B \bigcap C}. \tag{2.2}$$

Инвертированный характеристический вектор $\bar{x}_B$ является характеристическим вектором дополнения $\overline{B}$ подмножества B в множестве A, т.е. справедливо равенство

$$\bar{x}_B = x_{\overline{B}}. \tag{2.3}$$

Если известны вектора $\bar{x}_B$ и x_C, то для вычисления характеристического вектора разности $B \setminus C$ можно использовать формулу $B \setminus C = B \cap \overline{C}$, из которой следует справедливость равенства

$$x_{B \setminus C} = x_B \otimes \bar{x}_C. \tag{2.4}$$

Используя соотношения (2.2) — (2.4) можно находить элементы подмножеств, заданных формулами, если заданы соответствующие характеристические вектора.

Пример 2.5. Определить характеристический вектор x_B подмножества $B = \{a_1, a_3, a_5\}$, принадлежащего множеству $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.

Решение. Так как мощность множества *A* равна шести, то длина вектора x_B также равна шести, т.е. $x_B = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Далее, используя соотношение (2.1), вычисляем его компоненты. Так как элементы a_1, a_3, a_5 множества *A* принадлежат его подмножеству *B*, то компоненты x_1, x_3, x_5 вектора x_B полагаются равными единице, а остальные — нулю. Таким образом, определен вектор $x_B = (1,0,1,0,1,0)$.

Пример 2.6. Найти подмножество $(B \setminus C) \cup D \subset A$, если $x_B = (1,1,0,0,1,0)$, $x_C = (0,1,1,0,1,0)$, $x_D = (0,1,1,0,0,1)$ и $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.

Решение. В силу (2.4) $x_{B \setminus C} = x_B \otimes \bar{x}_C$. Используя таблицу 3, инвертируем вектор $x_C = (0,1,1,0,1,0)$, заменяя в его записи нули на единицы, а единицы — на нули. В результате получаем характеристический вектор $\bar{x}_C = x_{\overline{C}} = (1,0,0,1,0,1)$. Затем, используя таблицу 2, вычисляем вектор $x_{B \setminus C} = x_B \otimes \bar{x}_C = (1,0,0,0,0,0)$. Далее, используя таблицу 1, вычисляем характеристический вектор $x_{(B \setminus C) \cup D} = x_{B \setminus C} \oplus x_D = (1,1,1,0,0,1)$. Наконец, просматривая компоненты полученного вектора, включаем в $(B \setminus C) \cup D$ элементы множества *A*, соответствующие ненулевым компонентам вектора $(1,1,1,0,0,1)$. В результате получаем множество $(B \setminus C) \cup D = \{a_1, a_2, a_3, a_6\}$.

Мультимножества. Множества, в которых допускается повтор элементов, называются *мультимножествами.* Например, множество $M = \{a, a, a, d, d, c, c, c\}$, в котором элементы *a*, *d*, *c* повторяются, является мультимножеством. Если мультимножество не числовое, то для обозначения его повторяющихся элементов используется запись *k.a,* где *k* — число повторов элемента *a*, которое называется *кратностью* вхождения данного элемента в мультимножество. Используя введенные обозначения мультимножество *M* можно записать в компактном виде $M = \{3.a, 2.d, 3.c\}$. Мультимножества считаются подмножествами универсального мультимножества *U*.

Над мультимножествами выполняются операции объединения, пересечения, вычисления разности и операция дополнения, которые обозначаются так же, как и операции над множествами, и имеют следующую специфику:

а) при вычислении объединения $M_1 \bigcup M_2$ двух мультимножеств M_1 и M_2 кратности их общих элементов складываются, при этом вычисленные кратности не должны превышать кратности соответствующих элементов универсального мультимножества;

б) при вычислении пересечения $M_1 \bigcap M_2$ мультимножеств M_1 и M_2, из двух кратностей их общих элементов оставляется наименьшая;

в) при вычислении разности $M_1 \setminus M_2$ двух мультимножеств M_1 и M_2 из кратности элемента, принадлежащего M_1, вычитается кратность такого же элемента, принадлежащего M_2, и если разность кратностей неположительна, то соответствующий элемент исключается из $M_1 \setminus M_2$;

г) при вычислении дополнения $\overline{M}$ мультимножества M из кратностей элементов универсального множества, одновременно принадлежащих M, вычитаются кратности соответствующих элементов мультимножества M, при равенстве нулю вычисляемой разности кратностей, соответствующий элемент исключается из дополнения.

Примеры мультимножеств. Мультимножества образуют:

1) совокупность книг в библиотеке;

2) список фамилий студентов БГЭУ;

3) список пациентов поликлиники с известным набором симптомов конкретной болезни;

4) список избирателей, отдавших свои голоса за конкретного кандидата на избираемую должность.

Пример 2.10. Вычислить $M_1 \bigcup M_2$, $M_1 \bigcap M_2$, $M_1 \setminus M_2$ и $\overline{M}_1$, если $M_1 = \{3.a, 5.b, 4.\text{г}, 4.\text{д}\}$, $M_2 = \{8.a, 2.\text{г}, \text{д}\}$ и кратности элементов универсального мультимножества достаточно велики.

Решение. Согласно а), складывая кратности общих элементов *а, г, д,* получаем объединение данных мультимножеств $M_1 \bigcup M_2 = \{11.a, 5.\text{в}, 6.\text{г}, 5.\text{д}\}$.

Вычисляя разности 3 – 8 = –5, 4 – 2 = 2, 4 – 1 = 3 кратностей общих элементов *а, г, д*, мультимножеств M_1 и M_2, получаем, согласно б), пересечение $M_1 \bigcap M_2 = \{2.\text{г}, 4.\text{д}\}$. Общий элемент *а* исключен из пересечения, так как разность его кратностей отрицательна.

Нечеткие подмножества конечных множеств. Подмножества конечных множеств полностью определяются своими характеристическими векторами. Если задан характеристический вектор некоторого подмножества, то равенство единице его *i*-й компоненты означает, что *i*-й элемент множества принадлежит подмножеству, заданному своим характеристическим вектором. В противном случае *i*-й элемент множества не принадлежит подмножеству.

В некоторых ситуациях нельзя с полной уверенностью утверждать, что данный элемент множества принадлежит некоторому подмножеству. Например, врач, обследовав пациента, выявил наличие у него отдельных признаков некоторых болезней. Если пациент действительно имеет эти заболевания, то во множестве всех болезней выделено некоторое подмножество, которое можно описать бинарным характеристическим вектором. Если врач не уверен полностью в заболевании пациента конкретной болезнью, то он может говорить о вероятности наличия у больного этой болезни, которая оценивается числом, заключенным между 0 и 1.

В данной ситуации имеется подмножество, принадлежность которому элементов множества (в данном случае болезней), оценивается числами, принадлежащими отрезку [0,1]. Следовательно, такое подмножество определяется характеристическим вектором, компоненты которого могут принимать значения из отрезка [0,1].

Подмножества, компоненты характеристических векторов которых могут принимать значения из отрезка [0,1], называются *нечеткими* или *размытыми* подмножествами конечного множества.

Компоненты характеристического вектора нечеткого подмножества определяют *вероятность* принадлежности элементов основного множества такому подмножеству. При выполнении операций объединения, пересечения вычисления разности и дополнения над такими подмножествами используются методы теории вероятностей и математической статистики.

2.2. Бинарные отношения и действия над ними

Понятие бинарного отношения использует понятие декартового произведения множеств и моделирует различные отношения, в которых находятся явления, объекты и процессы реального мира, включая область отношений между людьми. Например, люди могут находиться в родственных отношениях, между ними могут возникать отношения, основывающиеся на профессиональном интересе и т.д. Молекулы различных химических веществ взаимодействуют при проведении химических реакций, в постоянной взаимосвязи находятся физические элементарные частицы. Если два элемента a и b множества находятся в отношении R, то для констатации этого факта используется запись aRb.

Декартовым произведением двух множеств A и B (обозначение $A\times B$) называется множество упорядоченных пар (a, b), таких, что $a\in A$ и $b\in B$. Пара (a, b) элементов называется упорядоченной, если различают ее первый и второй элементы, т.е. пары (a, b) и (b, a) считаются различными. Таким образом, по определению

$$A\times B=\{(a,b)\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}.$$

По аналогии определяется декартово произведение произвольного конечного набора множеств. Декартовым произведением n множеств A_1, A_2, $\ldots, A_i, \ldots, A_n$ называется множество всех упорядоченных наборов

$$(a_1, a_2, \ldots, a_i, , \ldots, a_n)$$

элементов, выбираемых по одному из каждого множества A_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Декартово произведение n множеств A_1, A_2, …, A_i, …, A_n обозначается аналогичным образом и по определению равно

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_i, , \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}. \quad (2.5)$$

Если все множества A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, совпадают с некоторым множеством A, то их декартово произведение называется n-ой степенью множества A и обозначается A^n. При $n = 2$ декартова степень A^2 называется декартовым квадратом множества A.

Например, если A совпадает с множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то $\boldsymbol{R}^n$ является множеством арифметических векторов, введенных в подразделе 2.1. Множества $\boldsymbol{R}^2$ и $\boldsymbol{R}^3$ при введении на плоскости и в пространстве декартовой системы координат эквивалентны множеству точек, принадлежащих, соответственно, плоскости и трехмерному пространству.

Бинарным отношением, определенном на декартовом произведении $A \times B$ называется любое его подмножество $R \subset A \times B$, при этом считается, что элементы $a \in A$ и $b \in B$ находятся в отношении R, т.е. используется запись aRb, если пара $(a,b) \in R$.

Если множества A и B совпадают с некоторым множеством M, то произвольное подмножество $R \in M^2$ называется бинарным отношением, определенным на M.

Так как бинарные отношения, определенные на M, являются подмножествами декартова квадрата M^2, то к ним применимы операции объединения, пересечения, вычисления разности и дополнения подмножеств, которые введены в подразделе 2.1.

Примеры бинарных отношений R:

а) родственные отношения, определенные в множестве людей, такие как «*отец R сын*», «*мать R дочь*», «*муж R жена*»;

б) R — равенство людей по росту;

в) R — отношение порядка на множестве чисел;

г) R — отношение делимости чисел без остатка на заданное число;

д) $M = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1)\}$.

Умножение бинарных отношений. Во множестве бинарных отношений помимо операций объединения, пересечения, разности и дополнения, вводится операция их умножения. Данное математическое понятие, позволяет моделировать и просчитывать вторичные или производные отношения, возникающие в коллективах индивидов при наличии двух или более различных видов основных взаимоотношений.

Например, в заданном множестве людей имеются родственники первого колена, например родители и их дети. В свою очередь дети родителей имею своих детей, которые являются родственниками второго колена, по отношению к родителям своих родителей. Следовательно, первые два отношения «*родители R дети*» и «*дети родителей S их дети*», порождают вторичное или производное отношение «*родители T внуки*». Задача нахождения отношение T в виде подмножества пар людей из заданного множества нетрудно решить, используя операцию умножения бинарных отношений.

Пусть на множестве M заданы два бинарных отношения R и S. Произведением отношений R и S называется отношение, обозначаемое $R{\cdot}S$ и состоящее из пар $(a,b)\in M^2$, для каждой из которых найдется такой элемент $c\in M$, что aRc и cSb. Формально условия, определяющие произведение бинарных отношений, записываются в виде предиката:

$$(aR\cdot Sb)\leftrightarrow\exists(c\in M)((aRc)\wedge(cSb)).$$

Замечание 2.2. Для нахождения произведения $R{\cdot}S$ бинарных отношений R и S множества M, заданных наборами пар, нужно выполнить следующие действия:

1) поочередно выбирать пары, принадлежащие бинарному отношению R;

2) для очередной выбранной пары $(x,y)\in R$ найти в S все пары вида $(y,z)\in S$;

3) отнести к произведению $R{\cdot}S$ пары вида (x,z).

Найденные таким образом пары образуют бинарное отношение $R{\cdot}S$, являющееся произведением бинарных отношений R и S.

Пример 2.11. Во множестве людей, заданном пронумерованным списком фамилий, бинарное отношение $R=\{(1,3),(1,4),(2,5),(2,6)\}$ определяет родственные отношения «*родители R дети*», а $S=\{(3,7),(3,8),(5,9),(6,10)\}$ — родственные отношения «*дети родителей S их дети*». Найти бинарное отношение T, определяющее в заданном множестве людей родственные отношения «*родители T внуки*».

Решение. Любая пара (i,j) из R определяет родителя i и его ребенка j. Следовательно, пара (i,j) и все пары из S вида $(j,\ k)$ порождают пары (i,k), определяющие всех внуков k родителя i, т.е. такие пары определяют родственные отношения «*родители T внуки*». В силу определения операции умножения бинарных отношений пары (i,k) и только они принадлежат $R{\cdot}S$. Таким образом, вычислив произведение $R{\cdot}S$, найдем искомое бинарное отношение $T=R{\cdot}S$. Выбрав пару (1,3) и просмотрев все пары из S, выбираем среди них пары (3,7), (3,8) и выписываем пары (1,7), (1,8), которые принадлежат $R{\cdot}S$. Для пары (1,4) нет в S пар с первым элементом 4, следовательно, она не порождает элементов из $R{\cdot}S$. Для пар (2,5) и (2,6) из R в S имеются по одной паре (5,9) и (6,10), которые порождают еще две пары, соответственно, (2,9) и (2,10), принадлежащие произведению $R{\cdot}S$. Таким образом,

$$T=R\cdot S=\{(1,7),(1,8),(2,9),(2,10)\}.$$

Анализируя полученное бинарное отношение можно сделать следующий вывод. Во множестве людей, заданном пронумерованным списком фамилий, первые два человека имеют по два внука. Фамилии внуков первого человека в списке стоят под номерами 7, 8, а фамилии внуков второго — под номерами 9, 10.

Свойства операции умножения следующие:

1) операция умножения бинарных отношений ассоциативна, т.е.

$$(R \cdot S) \cdot T = R \cdot (S \cdot T),$$

но не коммутативна, т.е. $R \cdot S \neq S \cdot R$;

2) для любых бинарных отношений R_1, R_2, S справедливо равенство

$$(R_1 \cup R_2) \cdot S = (R_1 \cdot S) \cup (R_2 \cdot S);$$

3) если $R' \subset R$, то для любого S имеет место включение $R' \cdot S \subset R \cdot S$.

Обратные и единичные бинарные отношения. Для любого бинарного отношения R существует *обратное отношение* R^{-1}, которое определяется предикатами

$$aR^{-1}b \leftrightarrow bRa \quad \text{или} \quad (a,b) \in R^{-1} \leftrightarrow (b,a) \in R.$$

Из данного определения следует, что для нахождения R^{-1} нужно поменять местами элементы пар, принадлежащих R.

Обратные отношения обладают следующими свойствами, которые используются при решении задач:

1) для любого R выполняется равенство $(R^{-1})^{-1} = R$;

2) если $R \subset S$, то $R^{-1} \subset S^{-1}$;

3) для любых R и S справедливо равенство $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

Единичным бинарным отношением на множестве M называется бинарное отношение $E = \{(a,a) \in M^2 \mid a \in M\}$. Единичное бинарное отношение обладает следующими свойствами:

1) $E^{-1} = E$,;

2) $ER = RE = R$ для любого $R \subset M^2$.

Виды бинарных отношений. Во множестве бинарных отношений, определенных на M, различают следующие отношения:

а) бинарное отношение R называется *рефлексивным*, если оно содержит все пары (a,a), где $a \in M$, т.е. оно определяется предикатом $\forall(a \in M)(aRa)$;

б) бинарное отношение R называется *симметричным*, если ему одновременно принадлежат пары (a,b) и (b,a), т.е. оно определяется импликацией $aRb \leftrightarrow bRa$;

в) бинарное отношение R называется *транзитивным*, если из принадлежности ему пар (a,b) и (b,c) следует принадлежность ему пары (a,c), т.е. оно определяется импликацией $(aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$;

г) бинарное отношение R называется *антисимметричным*, если из принадлежности ему пар (a,b) и (b,a) следует равенство $a = b$, т.е. оно определяется импликацией $(aRb \wedge bRb) \rightarrow a = b$;

д) бинарное отношение R называется *отношением порядка*, если оно одновременно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично;

е) бинарное отношение R называется *отношением эквивалентности*, если оно одновременно рефлексивно, транзитивно и симметрично.

Последних два отношения важны в теоретическом и практическом плане. Отношение порядка, определенное на множестве M, позволяет упорядочивать его элементы, что в свою очередь позволяет применять к любым его подмножествам порядковые или ранговые шкалы.

Отношение эквивалентности, введенное на M, позволяет разбивать его на не пересекающиеся подмножества, объединение которых дает все M, которые называются *классами эквивалентности*. Такое разбиение позволяет значительно упростить решение многих задач на классах эквивалентности.

Для построения классов эквивалентности конечных множеств при заданном отношении эквивалентности R следует выполнить следующие шаги.

1) Выбрать в M произвольный элемент a и включить его в первый класс эквивалентности K_1. Затем найти в R пару (a,b) и включить в класс K_1 элемент b. Далее для b найти пару (b,c) и включать в K_1 элемент c. Если для очередного элемента в R нужной пары не окажется, то класс K_1 построен.

2) Если после построения класса K_1 в M найдется элемент, не принадлежащий K_1, то для него повторяется шаг 1). После повторного применения шага строится второй класс эквивалентности K_2. Если после очередного выполнения шага 1 в M не найдется элемента, который не принадлежит некоторому классу эквивалентности, то разбиение множества M на непересекающиеся классы эквивалентности построено.

2.3. Отображения множеств

Понятие отображения множеств относится к основополагающим математическим понятиям. Это понятие отражает всеобщую взаимосвязь объектов и явления реального мира и широко применяется как в естественных, так и гуманитарных науках, включая социологию и психологию. Например, выявление количественных значений факторов, определяющих функционирование конкретной социальной системы, связано с отображением ее различных подсистем в числовые множества. Математическое моделирование различных феноменов и явлений психической деятельности человека также связано с числовыми отображениями.

Определение 2.1. Пусть заданы произвольные непустые множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y.

Для обозначения отображения множества X в Y используется запись

$$f : X \to Y \quad \text{или} \quad x \to y.$$

Элемент $y \in Y$, на который отображается $x \in X$, называется *образом* элемента x и обозначается $f(x)$, т.е. $y = f(x)$. Объединение всех образов элементов $x \in X$ называется *образом* множества X при отображении f и обозначается $f(X)$.

Элемент $x \in X$, такой, что $f(x) = y$ называется *прообразом* элемента y. Объединение всех прообразов элемента y, образует некоторое подмножество множества X, которое называется *полным прообразом* y и обозначается

$f^{-1}(y)$. Для некоторых отображений полный прообраз элемента $y \in Y$ может быть пустым подмножеством, т.е. $f^{-1}(y) = \varnothing$.

Виды отображений. Различают три вида отображений *сюръективное, инъективное* и *биективное* (*взаимно-однозначное*).

Определение 2.2. Отображение $f : X \to Y$ множества X на множество Y называется *сюръективным*, если для любого элемента $y \in Y$ в множестве X найдется такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$.

Используя, кванторы общности и существования определение 2.2 можно записать, используя логические формулы, следующим образом:

$f : X \to Y$ — *сюръективно, если* $\forall(y \in Y)\ \exists(x \in X)(\ y = f(x)\ )$.

Для сюръективных отображений справедливо утверждение:

Теорема 2.1. *Если* $f : X \to Y$ *сюръективное отображение, то полный прообраз любого элемента* $y \in Y$ *не является пустым множеством, т.е.* $\forall(y \in Y)(\ f^{-1}(y) \neq \varnothing)$.

Определение 2.3. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если для любых двух различных элементов из множества X следует несовпадения их образов, принадлежащих множеству Y, т.е. — при выполнении импликации $(x_1 \neq x_2 \in X) \to (f(x_1) \neq f(x_2))$ для любых $x_1 \neq x_2 \in X$.

Если отображение $f : X \to Y$ инъективно, то могут существовать элементы $y \in Y$, для которых полные прообразы пусты, т.е. $f^{-1}(y) = \varnothing$.

Определение 2.4 Отображение $f : X \to Y$ называется *биективным* (*взаимно однозначным* отображением), если оно одновременно является сюръективным и инъективным.

Во множестве отображений вводится *операция умножения*, под которой понимается их последовательное выполнение. Эта операция обозначается символом $\circ$ и называется также *композицией отображений*.

Определение 2.5. Если задано отображение $f : X \to Y$ и отображение $g : Y \to Z$, то их произведением (композицией) называется такое отображение $h : X \to Z$, что $h(x) = g(y)$, где $y = f(x)$.

Произведение отображений f и g обозначается $g \circ f$. Из определения 2.5 следует, что образы $h(x)$ при отображении $h : X \to Z$ в случае $h = g \circ f$ определяются равенствами $h(x) = g(f(x))$ для любых $x \in X$.

Введенная операция умножения отображений обладает следующими свойствами:

1) *произведение инъективных отображений инъективно;*

2) *произведение сюръективных отображений сюръективно;*

3) *произведение биективных отображений биективно.*

Умножение отображений подчинено ассоциативному закону.

Теорема 2.2. *Если f, g и h — такие отображения, что существует хотя бы одно из двух произведений* $(h \circ g) \circ f$ *или* $h \circ (g \circ f)$, *то существуют оба эти произведения и выполняется равенство*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Примеры отображений. Важным примером биективного отображения является отображение $e_X : X \to X$ множества *X* на себя, при котором $e(x) = x$ для любого $x \in X$. Указанное отображение называется *тождественным преобразованием множества X*.

Нетрудно устанавливаются соответствия, определяющие отображения, между:

1) множеством студентов ДИП-1 и множеством их имен;

2) множеством людей и множеством их профессий;

3) множеством исследуемых психологических явлений и их числовыми характеристиками, полученными в результате исследований;

4) числовыми множествами, такие отображения называются числовыми функциями;

5) человеком и его отражением в зеркале.

Из приведенного определения 2.5 вытекает

Теорема 2.3. *Для произвольного биективного отображение* $f : X \to Y$ *и любого элемента* $y = f(x)$ *из множества Y его полный прообраз не пуст и состоит из единственного элемента x, принадлежащий множеству X.*

Формально это утверждение записывается в виде следующего предиката

$$\forall (y \in Y)((f^{-1}(y) \neq \varnothing) \wedge f^{-1}(y) = \{x\}).$$

Из теоремы 2.3. следует, что при наличии биективного отображении $f : X \to Y$ каждому образу $y \in Y$ можно поставить в соответствие его единственный прообраз $x \in X$, такой что $y = f(x)$. Поставив в соответствие каждому образу $y \in Y$ его прообраз $x \in X$, определяем тем самым отображение множества *Y* на *X*, которое называется *обратным к f отображением* и обозначается f^{-1} . Следовательно, для каждого биективного отображения $f : X \to Y$ существует обратное отображение $f^{-1} : X \to Y$.

Для отображения *f* и f^{-1} справедливы следующие утверждения:

1) *отображение* $f^{-1} : Y \to X$ *является биективным тогда и только тогда, когда* $f : X \to Y$ *— биективное отображение;*

2) *если* $f : X \to Y$ *— биективное отображение, то произведение* $f \circ f^{-1}$ *является тождественным преобразованием множества Y, а* $f^{-1} \circ f$ *— тождественным преобразованием множества X, т.е.*

$$(f \circ f^{-1} = e_Y) \wedge (f^{-1} \circ f = e_X),$$

где e_X *и* e_Y *— тождественные преобразования, соответственно, множеств X и Y.*

Примеры сюръективных, инъективных и биективных отображений.

а) Отображение, ставящее в соответствие каждому человеку отпечаток одного из его пальцев руки, является биективным, так как такие отпечатки у различных людей не совпадают и для каждого снятого отпечатка можно указать соответствующего человека.

б) Отображение, идентифицирующее группу людей по фамилиям, является инъективным в случае отсутствия однофамильцев, так как в этом случае различные люди имеют различные фамилии, и не является таковым при наличие однофамильцев. Не сюръективность такого отображения обусловлена тем, что множество фамилий любой группы людей, исключая все население Земли, не исчерпывает всевозможные фамилии.

в) Отображение множества студентов группы ДИС-1, включающей более 10 человек, на множество чисел $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, которое ставит в соответствие каждому студенту оценку за контрольную работу, является сюръективным в случае наличия всех оценок от 1 до 10, и не является таковым, если отсутствует, хотя бы одна оценка.

Типовыми для данного подраздела являются следующие задачи:

а) выявление вида заданного отображения $f : X \leftrightarrow Y$;

б) указание для заданных элементов множества *X* их образов;

в) нахождение образа заданного подмножества, принадлежащего *X*;

г) нахождение полных прообразов для заданных элементов множества *Y*.

Так как множества, исследуемые в социологии и психологии, являются конечными, то при решении задач а) — г) целесообразно использовать графическое представление отображения $f : X \leftrightarrow Y$ в виде диаграммы в случае конечности множеств *X* и *Y*. Для этого в верхней части диаграммы в строку выписываются элементы множества *X*, а в нижней ее части — элементы множества *Y*. Далее стрелками указываются образы элементов множества *X*.

При графическом представлении отображения легко устанавливается его вид. В случае его биективности в каждый элемента множества *Y* должна входить только одна стрелка, если их несколько, то отображение не является биективным. Если на диаграмме в каждый элемент множества *Y* входит хотя бы одна стрелка, то отображение сюръективно. Если на диаграмме имеются элементы множества *Y*, в которые не входят стрелки, а в каждый из остальных элементов из *Y* входит только одна стрелка, то отображение инъективно.

При невыполнении указанных условий отображение не является инъективным, сюръективным и тем более биективным. Для определения:

- образа заданного элемента *x* из *X*, достаточно выделить элемент множества *Y*, на который указывает стрелка, выходящая из *x*;
- образа заданного подмножества из *X* нужно выписать объединение всех образов элементов этого подмножества;
- полного прообраза заданного элемента *y* из *Y*, достаточно выписать все те элементы множества *X*, из которых выходят стрелки, указывающие на элемент *y*.

Пример 1.7. Пусть $X=\{a,b,c,d,e\}$, $Y=\{i,j,k\}$. Для отображения $f:X\leftrightarrow Y$, определяемого соотношениями

$$f(a)=i,\quad f(b)=k,\quad f(c)=i,\quad f(d)=j,\quad f(e)=k,$$

а) выявить его вида;

б) указать для элементов a и c из множества X их образы;

в) найти образ подмножества $\{a,c,e\}\subset X$;

г) найти полные прообразы элементов i и j из множества Y.

Решение. Строим диаграмму отображения. Для этого записываем в ее верхнюю и нижнюю части, соответственно, элементы множеств X и Y. Далее соединяем эти элементы стрелками, используя заданные в условии задачи соотношения. В результате получаем диаграмму, изображенную на рис. 2.11.

а) Так как в i входят две стрелки, то отображение не является инъективным и тем более биективным. Так как полные прообразы элементов i, j, k не являются пустым множеством, то отображение сюръективно.

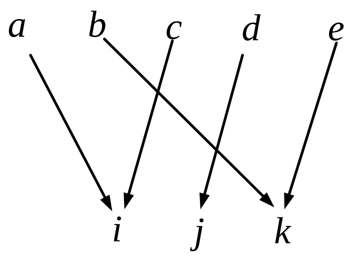

Рис. 2.11.

б) Из элементов $a,c\in X$ выходят стрелки, указывающие на элемент $i\in Y$, следовательно, этот элемент является их общим образом.

в) Образ $i\in Y$ элементов $a,c\in X$ найден. Стрелка, выходящая из элемента $e\in X$, указывает его образ $k\in Y$. Следовательно, образом подмножества $\{a,c,e\}\subset X$, является подмножество $\{i,k\}\in Y$.

в) На элемент $i\in Y$ указывают две стрелки, выходящие из $a,c\in X$. Следовательно, полным прообразом элемента i, является подмножество $f^{-1}(i)=\{a,c\}$. По аналогии определяется полный прообраз $f^{-1}(j)=\{d\}$.

Мощность множеств и их эквивалентность. Под *мощностью* конечных множеств понимается число их элементов. Например, если множество A включает n элементов, его мощность обозначается $|A|$ и приравнивается n, т.е. полагается $|A|=n$. Понятие мощности бесконечных множеств использует понятие их эквивалентности. Считается, что два множества *эквивалентны,* или *равномощны*, или имеют одну и ту же *мощность* (*кардинальное число*), если между ними существует взаимно однозначное соответствие, т.е. биективное отображение. Таким образом, множество *конечных кардинальных чисел* образуют мощности конечных множеств.

Бесконечное множество называется *счетным*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел. Таким образом, мощность счетных множеств совпадает с мощностью множества натуральных чисел N и является бесконечным кардинальным числом, которое обозначается символом $\aleph_0$.

Счетные множества обладают следующими свойствами:

- множество целых чисел Z — счетное множество;
- множество рациональных чисел Q — счетное множество;

- всякое непустое подмножество счетного множества конечно или счетное;
- объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетное.

Мощность множеств, эквивалентных множеству чисел, принадлежащих отрезку [0; 1], называется *мощностью континуума.* Эта мощность является вторым бесконечным кардинальным числом и обозначается $\aleph$. Множества, мощность которых равна $\aleph$, называются *континуальными множествами.*

К такими множествами относятся: множества всех иррациональных, действительных и комплексных чисел.