

СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ УРОВНЯ ИНФЛЯЦИИ НА ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАЗВИТИЕ

Э.М. Аксень, И.Н. Беляцкий*

В статье представлена методика оценки влияния неопределенности уровня инфляции на динамику макропоказателей (ВВП, внутренние и иностранные инвестиции, уровень инфляции, средняя заработная плата, чистый экспорт и др.). Разработанная нами и используемая в настоящей работе неравновесная непрерывно-временная модель построена с применением микроэкономических подходов для учета рыночных механизмов посредством отражения стремления экономических агентов к увеличению уровня своей полезности. Стохастический характер модели позволяет учитывать производственные и финансовые риски. Для исследования влияния неопределенности инфляции на прогнозные значения макропоказателей в статье предлагается использование коэффициентов, равных производным соответствующих прогнозных значений по относительному изменению нормы векторного коэффициента диффузии уровня цен.

Ключевые слова: макроэкономическая динамика, уровень цен, макропоказатель, экономическая система, стохастическая модель, экономический агент, коэффициент диффузии.

JEL-классификация: С61, Е27.

Краткий обзор существующих подходов к моделированию макродинамики

Автором первой факторной модели экономического роста, построенной на базе производственной функции, был Роберт Солоу (Solow, 1956). В последующее десятилетие его идеи интенсивно развивались другими исследователями (Turnovsky, 2000). В середине 1970-х годов методы исследования макроэкономической динамики претерпели серьезные изменения в связи с началом широкого использования теории рациональных ожиданий, впервые предложенной в работе Мута (Muth, 1961). Отметим, что в отечественной практике для моделирования динамики макропоказателей используются в основном балансовые и эконометрические модели, а также модели, сочетающие в себе черты как балансовых, так и эконометрических моделей, которые адекватно описывают структуру экономики, позволяют отслеживать изменение запасов и движение потоков, выявлять тренды экономического

развития, обнаруживать взаимосвязи экономических факторов. Вместе с тем такие модели, как правило, не описывают мотивы поведения экономических агентов и, следовательно, они не в состоянии достаточно полно отразить процессы функционирования экономики страны. В то же время в последнее десятилетие в зарубежной экономической науке активно развивается такой инструмент макроэкономического анализа, как модели динамического стохастического общего экономического равновесия (ДСОЭР) (Adolfson et al., 2007; Rubaszek, Skrzypczynski, 2008). Данный подход сочетает рациональное поведение агентов, решающих оптимизационные задачи, с формальными методами оценки параметров. Это позволило создать модели ДСОЭР для экономик США и Европы, дающие возможность получать высококачественные прогнозы, но существующие модели ДСОЭР в недостаточной степени описывают особенности белорусской экономики как малой открытой

* Аксень Эрнест Маврициевич (eaksen@mail.ru), кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь);

Беляцкий Иван Николаевич (i.belyackiy@nbrb.by), экономист (г. Минск, Беларусь).

экономики транзитивного типа (такие особенности, как высокий уровень производственных и финансовых рисков, долларизация экономики и основополагающая роль государства в функционировании экономической системы). Исходя из этого при разработке методологии построения используемой в данной работе модели основной упор делался на формализацию поведения экономических агентов в условиях высокого уровня рисков, на учет изменений в поведении агентов вследствие изменений в экономической политике государства и на ключевую роль государства в экономическом развитии страны.

Описание используемой макромоделли

В разработанной нами модели применены микроэкономические подходы для учета рыночных механизмов. Прежде всего, это относится к использованию теории полезности: в рамках модели экономические агенты стремятся увеличить уровень своей полезности. Модель построена в непрерывном времени с применением аппарата стохастических дифференциальных уравнений, что соответствует современным методам моделирования макроэкономической динамики в условиях риска (Merton, 1990; Turnovsky, 2000). При этом случайные колебания переменных модели описываются с помощью (векторного) винеровского процесса, а скачкообразные изменения – с помощью случайной пуассоновской меры (Merton, 1990; Пугачев, Сеницын, 2000).

Замечание 1. Напомним, что винеровский процесс – это случайный процесс с непрерывными (но не дифференцируемыми) траекториями, приращения которого независимы и нормально распределены. Если дисперсии приращений винеровского процесса равны продолжительностям соответствующих временных интервалов, процесс называется стандартным. Стандартный векторный винеровский процесс $W(t) = [W_1(t), \dots, W_m(t)]$ состоит из независимых друг от друга стандартных (скалярных) винеровских процессов $W_1(t), \dots, W_m(t)$. Случайная пуассоновская мера ν характеризуется, во-первых, параметром λ , равным ожидаемому числу ее скачков за единицу времени, и, во-вторых, вероятностным рас-

пределением P скачков (Пугачев, Сеницын, 2000, С. 439–442).

В условиях модели в каждый момент времени домашние хозяйства, фирмы и иностранные инвесторы принимают решения, увеличивающие, соответственно, их межвременную полезность, ожидаемую полезность доходности собственного капитала и ожидаемую полезность доходности портфеля своих активов. При этом решения, принимаемые экономическими агентами, должны быть сбалансированными. Параметры динамики уровня цен в национальной валюте, реальной заработной платы и доходности заемного капитала устанавливаются в каждый момент времени таким образом, чтобы приблизить состояние соответствующих рынков к равновесному состоянию (Аксень, 2011. Гл. 3).

Формулы, описывающие межвременную полезность фирм, домашних хозяйств и иностранных инвесторов, находятся с использованием методов стохастического дифференциального исчисления (Там же. С. 115, 121, 127).

Для нахождения согласованных (сбалансированных) оптимальных решений экономических агентов решается задача квадратического программирования. Целевая функция в этой оптимизационной задаче представляет собой сумму взвешенных квадратов отклонений принимаемых экономическими агентами решений от оптимальных для них решений, а именно минимизируется следующее выражение (Там же. С. 138):

$$\beta_E \|M_E - \alpha_E Z_E\|^2 + \beta_H \|M_H - \alpha_H Z_H\|^2 + \beta_F \|M_F - \alpha_F Z_F\|^2 + \beta_G \|M_G - \alpha_G Z_G\|^2 \quad (1)$$

Здесь векторы M_E , M_H , M_F , M_G задают ожидаемые направления изменения нормированных векторов $X_E(t)$, $X_H(t)$, $X_F(t)$ и $X_G(t)$, компоненты которых описывают размеры активов (и интенсивности некоторых потоков), соответственно, фирм, домашних хозяйств, иностранных резидентов и государ-

ства. (Например, $M_E(t) = \frac{d}{dt} E_t \left[\frac{X_E(\tau)}{E(\tau)} \right]_{\tau=t}$.)

Минимизация выражения (1) происходит по интенсивностям инвестиций в соответ-

ствующие активы (от которых линейно зависят векторы M_F, M_{FP}, M_P, M_C). Векторы Z_F, Z_{FP}, Z_P и Z_C описывают оптимальные допустимые для экономических агентов решения. (Например, вектор Z_F – это проекция градиента функции межвременной полезности фирм на линейное подпространство, определяемое условием равенства нулю суммы компонент, соответствующих активам фирм.) Параметры α и β (с соответствующими индексами) – положительные экзогенно заданные константы.

Математически динамика экономической системы описывается векторным стохастическим дифференциальным уравнением (Там же. С. 147):

$$dS(t) = \mu_s [S(t)]dt + \sigma_s [S(t)]dW(t) + \int \zeta_{sS} [x, S(t)]v(dx, dt), \quad (2)$$

где $S(t)$ – вектор реального состояния экономики (Там же. С. 134);

$\mu_s(S), \sigma_s(S)$ и $\zeta_{sS}(x, S)$ – векторзначные функции, зависящие от вектора состояния экономики и описывающие, соответственно, сносы, диффузию (случайные колебания) и скачки компонент вектора $S(t)$;

$W(t)$ – стандартный векторный винеровский процесс;

v – случайная пуассоновская мера.

При этом функции $\mu_s(S), \sigma_s(S)$ и $\zeta_{sS}(x, S)$ зависят от экзогенных факторов.

Методика калибровки описанной выше модели и соответствующее программное обеспечение представлены в монографии (Там же. С. 148–258, с. 286–303).

С помощью векторного уравнения (2), описывающего динамику экономической системы, методом статистических испытаний можно получить (просчитать) случайные траектории переменных модели и оценить соответствующие вероятностные распределения (Пугачев, Синицын, 2000. С. 565–581). Алгоритм реализован нами на языке программирования пакета MATLAB 7 и представлен в монографии (Аксень, 2011. С. 300–316).

Замечание 2. В 2012–2013 гг. нами была построена более новая версия модели, представленной в монографии (Там же), а так-

же соответствующим образом было обновлено программное обеспечение. Описанные ниже расчеты производились с помощью обновленного программного обеспечения.

Моделирование влияния неопределенности уровня инфляции на динамику системы макропоказателей

В условиях используемой модели для динамики уровня цен $\hat{P}_d(t)$ в национальной валюте справедливо следующее представление (Там же. С. 60):

$$d\hat{P}_d(t) = \hat{P}_d(t) \left[i_d(t)dt + \sigma_p^d dW(t) + \int \zeta_p^d(x)v(dx, dt) \right], \quad (3)$$

где $i_d(t)$ – скалярный коэффициент сноса;
 σ_p^d – векторный коэффициент диффузии (описывающий случайные колебания);
 $\zeta_p^d(x)$ – экзогенно заданная функция (описывающая гиперинфляцию).

Прежде всего, отметим, что, в соответствии с представлением (3), значение коэффициента $i_d(t)$ приблизительно равно ожидаемому уровню инфляции за период единичной продолжительности (например, за год, если в качестве единицы измерения времени взят один год) при условии отсутствия ценовых шоков в течение данного периода времени.

Заметим, что мерой неопределенности уровня инфляции за некоторый временной интервал $[t, t + \Delta t)$ является дисперсия

$\text{Var} \left[\frac{\hat{P}_d(t + \Delta t) - \hat{P}_d(t)}{\hat{P}_d(t)} \right]$ относительного изменения уровня цен $\hat{P}_d(t)$ (Аксень, Беляцкий, 2012).

В силу определений дисперсии случайной величины и производной функции имеет место следующее равенство:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Var} \left[\frac{\hat{P}_d(t + \Delta t) - \hat{P}_d(t)}{\hat{P}_d(t)} \right] / \Delta t = \frac{1}{\hat{P}_d^2(t)} \frac{d}{d\tau} E_t \left[\left\{ \hat{P}_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)] \right\}^2 \right] \Big|_{\tau=t}. \quad (4)$$

Из равенства (3) вытекает (Аксень, 2011. С. 234), что

$$dE_t[\hat{P}_d(\tau)] = \left\{ E_t[\hat{P}_d(\tau)i_d(\tau)] + \lambda E_t[\hat{P}_d(\tau)] \int \zeta_p^d(x)P(dx) \right\} d\tau. \quad (5)$$

Из равенств (3) и (5) получим:

$$d\left\{ \hat{P}_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)] \right\} = \left\{ \hat{P}_d(\tau)i_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)i_d(\tau)] - \lambda E_t[\hat{P}_d(\tau)] \int \zeta_p^d(x)P(dx) \right\} d\tau + \hat{P}_d(\tau) \left[\sigma_p^d dW(\tau) + \int \zeta_p^d(x)v(dx, d\tau) \right]. \quad (6)$$

Из равенства (6) будем иметь (Там же. 232):

$$d\left\{ \hat{P}_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)] \right\}^2 = \left(2\left\{ \hat{P}_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)] \right\} \left\{ \hat{P}_d(\tau)i_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)i_d(\tau)] - \lambda E_t[\hat{P}_d(\tau)] \int \zeta_p^d(x)P(dx) \right\} + \hat{P}_d^2(\tau) \|\sigma_p^d\|^2 \right) d\tau + 2\left\{ \hat{P}_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)] \right\} \hat{P}_d(\tau) \sigma_p^d dW(\tau) + \int \left(2\left\{ \hat{P}_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)] \right\} \hat{P}_d(\tau) \zeta_p^d(x) + \left[\hat{P}_d(\tau) \zeta_p^d(x) \right]^2 \right) v(dx, d\tau). \quad (7)$$

Отсюда следует (Там же. 234):

$$\frac{d}{d\tau} E_t \left[\left\{ \hat{P}_d(\tau) - E_t[\hat{P}_d(\tau)] \right\}^2 \right] \Big|_{\tau=t} = \hat{P}_d^2(t) \left\{ \|\sigma_p^d\|^2 + \lambda \int [\zeta_p^d(x)]^2 P(dx) \right\}. \quad (8)$$

Подставив формулу (8) в правую часть равенства (4), получим следующее соотношение:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \text{Var}_t \left[\frac{\hat{P}_d(t + \Delta t) - \hat{P}_d(t)}{\hat{P}_d(t)} \right] / \Delta t = \|\sigma_p^d\|^2 + \lambda \int [\zeta_p^d(x)]^2 P(dx), \quad (9)$$

где $\|\sigma_p^d\|$ – евклидова норма $\|\sigma_p^d\|$ векторного коэффициента диффузии представления для динамики уровня цен (Там же. С. 194).

Из соотношения (9), в частности, следует, что при небольших значениях Δt справедливо приближительное равенство

$$\text{Var}_t \left[\frac{\hat{P}_d(t + \Delta t) - \hat{P}_d(t)}{\hat{P}_d(t)} \right] \approx \left\{ \|\sigma_p^d\|^2 + \lambda \int [\zeta_p^d(x)]^2 P(dx) \right\} \Delta t. \quad (10)$$

Таким образом, в качестве меры неопределенности уровня инфляции в момент времени t выступает значение $\|\sigma_p^d\|^2 + \lambda \int [\zeta_p^d(x)]^2 P(dx)$, которое (в соответствии с равенством (10)) приблизительно равно дисперсии уровня инфляции за период единичной продолжительности (например, за год, если в качестве единицы измерения времени выбран один год).

В настоящей работе исследуется влияние изменения значения $\|\sigma_p^d\|$ на макроэкономическую динамику.

Для того чтобы коэффициенты корреляции уровня инфляции и других переменных модели оставались неизменными, будем считать, что компоненты вектора σ_p^d меняются пропорционально. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\sigma_p^d = \bar{\sigma}_p^d \cdot \alpha, \quad (11)$$

где $\bar{\sigma}_p^d$ – исходный векторный коэффициент диффузии уровня цен в национальной валюте;

σ_p^d – новый коэффициент диффузии;
 α – некоторый скаляр.

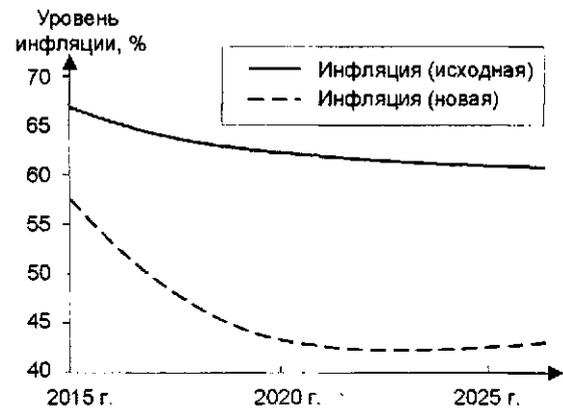
С помощью упомянутого выше программного обеспечения (Там же. С. 300–316) мы получили прогнозные значения макропоказателей при исходном векторе σ_p^d (рассчитанном нами на основе реальных данных для экономики Беларуси) и при новом векторе σ_p^d , значения компонент которого в 2 раза меньше соответствующих значений исходного вектора. Эти значения, рассчитанные на основе реальных статистических данных по 2010 г., приведены в таблицах Б8 и Б21 монографии (Там же. С. 252–253, 275–276).

Замечание 3. В рамках исследований, представленных в настоящей работе, нами использовались реальные данные по 2012 г. и получены обновленные прогнозные значения в сравнении с приведенными в указанной монографии (см. также замечание 2 выше).

На рисунке приведены графики динамики прогнозного ожидаемого уровня инфляции i_d при указанных выше векторах σ_p^d . Как видно, снижение неопределенности уровня инфляции ведет к уменьшению уровня инфляции. Данный результат говорит в пользу использования механизмов государственного регулирования ценообразования в целях уменьшения темпов инфляции, что согласуется с выводом известных белорусских ученых-экономистов о

необходимости использования институциональных механизмов для уменьшения уровня энтропии (прежде всего в условиях экономик транзитивного типа).

Влияние неопределенности уровня инфляции на ожидаемый уровень инфляции



Источник. Построено авторами.

Как видно, снижение неопределенности уровня инфляции ведет к уменьшению уровня инфляции. Данный результат говорит в пользу использования механизмов государственного регулирования ценообразования в целях уменьшения темпов инфляции, что согласуется с выводом известных белорусских ученых-экономистов о необходимости использования институциональных механизмов для уменьшения уровня энтропии (прежде всего в условиях экономик транзитивного типа).

Для исследования влияния неопределенности инфляции на прогнозные значения макропоказателей \hat{x}_i введем коэффициенты a_p , описывающие зависимость значений \hat{x}_i от значения $\|\sigma_p^d\|$.

Считая, что компоненты вектора σ_p^d меняются пропорционально, с учетом формулы (11) получим следующее соотношение:

$$\sigma_p^d = \bar{\sigma}_p^d \cdot (1 + \varphi). \quad (12)$$

Следовательно, можно считать, что вектор σ_p^d является функцией от параметра φ . Поскольку прогнозные значения макропоказателей зависят от вектора σ_p^d , эти значения также являются функциями от параметра φ , т. е. $\hat{x}_i = \hat{x}_i(\varphi)$. Коэффициенты a_i

положим равными производным функций $\hat{x}_i(\varphi)$ по параметру φ , т. е.

$$a_i = \frac{d\hat{x}_i}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} \quad (13)$$

Значение коэффициента a_i , деленное на 100, показывает изменение прогнозного значения показателя x_i при увеличении значения $\|\sigma_p^d\|$ на 1%.

В силу равенства (13) для численной оценки коэффициентов a_i можно использовать приближенную формулу

$$a_i \approx \frac{\hat{x}_i(\varphi) - \hat{x}_i}{\varphi} \quad (14)$$

при достаточно малых изменениях φ . (Здесь $\hat{x}_i(\varphi)$ – прогнозируемое значение макропоказателя при изменении вектора σ_p^d , соответствующем значению φ , а \hat{x}_i – прогнозируемое значение макропоказателя при отсутствии такого изменения.)

Значения коэффициентов a_i найдены нами с помощью упомянутого ранее программного обеспечения и приведены в таблице Б22 монографии (Там же. С. 276–278). (См. также замечания 2 и 3 выше.)

Например, значение коэффициента a_i для уровня инфляции i_d в начале 2021 г. равно 0,4762. Это значит, что при увеличении значения $\|\sigma_p^d\|$ на 1% (от исходного значения) уровень инфляции i_d возрастает на 0,4762%, а при уменьшении значения $\|\sigma_p^d\|$ на 1% уровень инфляции уменьшается на это же количество процентов.

Итак, в данной статье описана разработанная нами методика оценки влияния неопределенности уровня инфляции на динамику макропоказателей (ВВП, внутренние и иностранные инвестиции, уровень инфляции, средняя заработная плата, чистый экспорт и др.), основанная на использовании стохастической динамической непрерывно-временной модели. Методика позволяет оценивать изменение прогнозных значений макропоказателей при изменении коэффициента диффузии динамики уровня цен. Применение данной методики в условиях национальной экономики позволило сделать вывод о целесообразности использования механизмов государственно-

го регулирования ценообразования в целях уменьшения темпов инфляции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

- Аксень Э.М.** 2011. Стохастическое моделирование макроэкономической динамики. Белорус. гос. экон. ун-т. Минск. Деп. в БелИСА 25.10.2011 г., № Д201151. *Новости науки и технологий*. № 2 (19).
- Aksen' E.M.** 2011. Stokhasticheskoe modelirovanie makroekonomicheskoi dinamiki. [Stochastic modeling of macroeconomic dynamics]. Deposited in BelISA 25.10.2011, No D201151. *Novosti nauki i tekhnologii*. No 2 (19).
- Аксень Э.М., Беляцкий И.Н.** 2012. О стохастическом моделировании влияния неопределенности уровня цен на динамику макропоказателей. *Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы XIII Междунар. науч. конф.*, Минск, 25–26 окт. 2012 г. Науч.-исслед. экон. ин-т М-ва экономики Респ. Беларусь. Минск. Т. 3. С. 191–193.
- Aksen' E.M., Belyacki I.N.** 2012. O stokhasticheskom modelirovanii vliianiia neopredelennosti urovnia tsen na dinamiku makropokazatelei. [On stochastic modeling of the impact of the price level on the dynamics of macro-indicators]. *Problemy prognozirovaniia i gosudarstvennogo regulirovaniia sotsialno-ekonomicheskogo razvitiia: materialy XIII Mezhdunar. nauch. konf.*, Minsk, 25–26 okt. 2012 g. [Problems of forecasting and state regulation of social economic development: proceedings of XIII international scientific conference, Minsk, October 25–26, 2012]. Nauch.-issled. ekon. in-t M-va ekonomiki Resp. Belarus. Minsk. Vol. 3. P. 191–193.
- Пугачев В.С., Синицын И.Н.** 2000. *Теория стохастических систем*. Москва: Логос.
- Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.** 2000. *Teoriia stokhasticheskikh sistem*. [Theory of stochastic systems]. Moscow: Logos.
- Adolfson M., Linde J., Villani M.** 2007. Forecasting performance of an open economy DSGE model. *Econometric reviews*. Vol. 26. No 2–4. P. 289–328.
- Muth J.** 1961. Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica*. No 39 (July).
- Merton R.C.** 1990. *Continuous-time finance*. Cambridge: Blackwell.
- Rubaszek M., Skrzypczynski P.** 2008. On the forecasting performance of a small-scale DSGE model. *International Journal of Forecasting*. Vol. 24. No 3. P. 498–512.
- Solow R.** 1956. A contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics* 70, 1 (Feb.).
- Turnovsky S.J.** 2000. *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Cambridge: MIT Press.

STOCHASTIC MODELING OF THE IMPACT OF THE INFLATION LEVEL UNCERTAINTY ON ECONOMIC DEVELOPMENT

Ernest Aksen¹, Ivan Belyacky²

Authors affiliation: ¹Belarusian State Economic University (Minsk, Belarus);

²National Bank of the Republik of Belarus (Minsk, Belarus).

Corresponding authors: Ernest Aksen (caksen@mail.ru), Ivan Belyacky (bin_minsk@mail.ru).

ABSTRACT. The paper presents a methodology of assessing the inflation rate uncertainty on the dynamics of macro-indicators (GDP, domestic and foreign investments, inflation rate, average wages, net export, etc.). The non-equilibrium continual model developed by the authors and used in this research paper has been designed with the employment of microeconomic approaches to accommodate market mechanisms by taking into account economic agents' desire to increase their utility levels. The stochastic nature of the model enables to take into consideration production and financial risks. In order to explore the impact of the inflation rate uncertainty on the forecasted values of the macro-indicators, the authors suggest using the factors equal to the derivatives of the relevant forecasted values with respect to the relative change in the norm of the vector diffusion quotient of the price level.

KEYWORDS: macroeconomic dynamics, price level, macro-indicator, economic system, stochastic model, economic agent, diffusion quotient.

JEL code: C61, E27.



Материал поступил 22.08.2013 г.