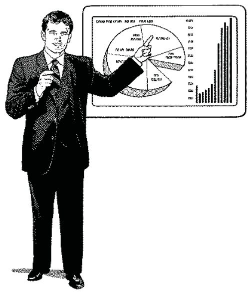

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

С.Я. ЖУКОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ В ВУЗЕ

В последнее десятилетие в системе образования происходят существенные изменения, которые обусловлены переменами в экономике и обществе, связанными с процессами информатизации. Развитие экономики требует новых подходов к подготовке специалистов и переподготовке кадров. Высшее и послевузовское образование развиваются в соответствии со стратегией перехода страны к инновационной экономике, являются основным источником обеспечения ее кадрового потенциала и направлены на дальнейшее повышение качества подготовки высококвалифицированных специалистов на основе новейших достижений науки и техники [1].

Цель данной статьи — предложить математический метод, который позволит повысить качество обучения по дисциплинам учебного плана в вузе на основе теории оптимального управления. Метод может быть положен в основу системы менеджмента качества, внедряемой в вузах Беларуси.

Математическая модель обучения. Система управления — совокупность управляющего устройства и объекта управления. Действия ее направлены на достижение некоторого результата — цели управления. Общим принципом систем управления является принцип обратной связи: управление объектом осуществляется на основе получения информации о желаемом и текущем движениях объекта и их сравнении для нахождения ошибки и выработки такого управляющего воздействия, чтобы ошибка с течением времени стремилась к нулю и выполнялась конечная цель управления. Математическая модель системы управления — это пара: оператор системы и модель внешних воздействий. Оператором системы называется закон, в соответствии с которым система преобразует внешнее (входное) воздействие в выходной сигнал [2].

Задача обучения может быть сформулирована как задача управления [3]. В этом случае обучаемый выступает в качестве объекта управления, а обучающий или обучающая система — в качестве источника управления.

В [4] предлагается математическая модель обучения, в [3] сформулирована математическая модель обучения с помощью преподавателя на основе теории управления с учетом двух видов управления. Процесс обучения можно описать линейным дифференциальным уравнением, учитывая самообучение и используя четыре вида управления:

Сергей Яковлевич ЖУКОВИЧ, ассистент кафедры информационных технологий Белорусского государственного экономического университета.

$$\frac{dZ}{dt} = -kZ + \sum_{i=0}^{3} k_i u_i(t)\cos(au_i(t)), \tag{1}$$

где $Z = Z(t)$ — уровень (объем) текущих знаний (в академических часах); k — коэффициент забывания, который показывает, какую часть от текущих знаний Z обучаемый забывает в среднем за сутки; u_0 — программное управление, задаваемое в виде заранее запланированной нагрузки, осуществляемой преподавателем; k_0 — коэффициент усвоения новых знаний при обучении с помощью преподавателя; u_1 — управление процессом повторения посредством контрольных и самостоятельных работ после обучения преподавателем, u_1 является управлением с обратной связью; k_1 — коэффициент усвоения для управления u_1; u_2 — программное управление для самостоятельного обучения; k_2 — коэффициент усвоения для управления u_2; u_3 — управление с обратной связью при повторении материала, изученного самостоятельно; k_3 — коэффициент усвоения для управления u_3;

$$a = \frac{\pi}{2Z_{\max}},$$

где $Z_{\max}$ — максимальный объем знаний (объем курса в академических часах);

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

где N — число запланированных занятий; X_i — объем знаний, который дает преподаватель на i-м занятии (или при самостоятельном обучении).

Функция $\cos(au(t))$ в формуле (1) выполняет роль фильтра, не допускающего усвоения слишком большого однократного объема нагрузок ($0 \le \cos(au(t)) \le 1$).

Все коэффициенты изменяются в пределах от нуля до единицы ($0 \le k, k_i \le \le 1, i = 0,1,2,3.$)

Решение уравнения (1) представляется функцией

$$Z = Z_0 e^{-\int k dt} + e^{-\int k dt} \int \sum_{i=0}^{3} k_i u_i(t)\cos(au_i(t)) e^{\int k dt} dt, \tag{2}$$

где Z_0 — начальный объем знаний при $t = t_0$.

Свободное движение происходит при отсутствии внешнего воздействия вследствие ненулевых начальных условий. Оно является решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному уравнению:

$$\frac{dZ}{dt} + kZ = 0. \tag{3}$$

Решение уравнения (3)

$$Z = Z_0 e^{-kt}, \tag{4}$$

т. е. происходит экспоненциальное забывание ранее усвоенного объема знаний Z_0.

В данной модели коэффициент забывания k при повторении уменьшается по некоторому закону

$$k_{(n)} = \frac{k}{f(n)}, \tag{5}$$

где $k_{(n)}$ — коэффициент забывания для определенного объема материала, повторенного n раз.

В первом приближении будем считать справедливой зависимость:

$$k_{(n)} = \frac{k}{2^n}. \tag{6}$$

Методика определения коэффициентов усвоения и забывания. Коэффициент усвоения новых знаний при обучении с помощью преподавателя (k_0) определяется как отношение объема знаний, усвоенного обучаемым $Z_{УП}$ к объему знаний $Z_П$, который был дан преподавателем

$$k_0 = \frac{Z_{УП}}{Z_П}.$$

На практике сразу после лекции (семинара) обучаемый должен пройти специально разработанный тест, по результатам которого определяется усвоенный объем $Z_{УП}$ для каждого обучаемого (в академических часах).

Коэффициент усвоения при повторении объема, данного ранее преподавателем (k_1), можно определить аналогичным образом, однако целесообразно приравнять его к k_0

$$k_1 = k_0.$$

Коэффициент усвоения новых знаний при самостоятельном обучении (k_2) рассчитывается как отношение объема знаний, усвоенного обучаемым $Z_{УС}$, к объему знаний $Z_С$, который был изучен самостоятельно

$$k_2 = \frac{Z_{УС}}{Z_С}.$$

$Z_{УС}$ определяется с помощью тех же тестов сразу после самостоятельного изучения обучаемым объема $Z_С$. При этом целесообразно полагать, что

$$k_3 = k_2.$$

Коэффициенты k_1, k_2 k_3 являются безразмерными.

Коэффициент забывания (k) рассчитывается из формулы (4) и равен

$$k = -\frac{1}{t}\ln\frac{Z}{Z_0},$$

где Z_0 определяется как усвоенный объем сразу после обучения, Z измеряется как остаточный объем знаний по прошествии времени t (в сутках). Коэффициент забывания k имеет размерность, обратную времени (сут$^{-1}$).

Математическая модель оптимального управления процессом обучения. Рассмотрим общую постановку математической задачи, к которой приводят проблемы, возникающие при оптимизации систем, в частности экономических. Будем считать, что имеется система, состояние которой может измениться под воздействием некоторого количества управляющих воздействий. Задавая тем или иным способом эти воздействия, мы получим определенный процесс изменения состояния системы. Первая задача, которая возникает при управлении системой, — выбор таких воздействий на систему, чтобы происходящий процесс удовлетворял заданным условиям. Подобные процессы принято называть допустимыми.

Решение этой задачи неоднозначно. Допустимые процессы в системе образуют множество. Тогда возникает следующая задача — выбор из этого множества процесса, который является в некотором смысле наилучшим. Другими словами, это задача выбора оптимального процесса.

Рассмотрим множество M с элементами ν ($\nu \in M$). Будем говорить, что на множестве M задан функционал F, если известно правило, которое каждому элементу $\nu \in M$ ставит в соответствие определенное действительное число $F(\nu)$. Можно сказать, что функционал осуществляет отображение множества M (имеющего произвольную природу) на множество действительных чисел.

В общем виде задача оптимизации формулируется как задача отыскания минимального (или максимального) значения функционала $F(\nu)$ на множестве M. Эта задача ставится аналогично задаче об отыскании экстремума функции.

Предположим, что требуется минимизировать функционал $F(\nu)$ на множестве M. Под решением этой задачи мы будем понимать значение ν^* (звездочка обозначает оптимальность) такое, что для остальных элементов ν множества M выполняется неравенство

$$F(\nu) \geq F(\nu^*).$$

Если решение этой задачи существует, то ν^* называется оптимальным элементом множества M, а величина $F^* = F(\nu^*)$ — оптимальным значением функционала. Решения поставленной задачи F^* и ν^* будем записывать следующим образом [5]:

$$F^* = F(\nu^*) \to \min_{\nu \in M} F(\nu).$$

Задача оптимального управления обучением сводится к совместной задаче расчета четырех видов оптимального управления: оптимального программного управления (u_0^*) для обучения с помощью преподавателя, оптимального управления с обратной связью (u_1^*) для обучения с помощью преподавателя, оптимального программного управления (u_2^*) для самостоятельного обучения, оптимального управления с обратной связью (u_3^*) для самостоятельного обучения. Данную задачу можно упростить, разбив функцию Z на две части

$$Z = Z_{\Pi} + Z_{C},$$

где Z_{Π} — объем текущих знаний для материала, который изучен с помощью преподавателя; Z_{C} — объем текущих знаний для материала, который изучен самостоятельно.

Тогда уравнение (1) можно разбить на два независимых уравнения

$$\frac{dZ_{\Pi}}{dt} = -kZ_{\Pi} + \sum_{i=0}^{1} k_i u_i(t)\cos(au_i(t)), \quad (7)$$

$$\frac{dZ_{C}}{dt} = -kZ_{C} + \sum_{i=2}^{3} k_i u_i(t)\cos(au_i(t)). \quad (8)$$

Решения уравнений (7), (8) представляются функциями

$$Z_{\Pi} = Z_{\Pi 0}e^{-\int kdt} + e^{-\int kdt}\int \sum_{i=0}^{1} k_i u_i(t)\cos(au_i(t))e^{\int kdt}dt, \quad (9)$$

$$Z_{C} = Z_{C0}e^{-\int kdt} + e^{-\int kdt}\int \sum_{i=2}^{3} k_i u_i(t)\cos(au_i(t))e^{\int kdt}dt, \quad (10)$$

где $Z_{П0}$, Z_{C0} — начальные объемы знаний при $t = t_0$ соответственно для обучения с помощью преподавателя и при самостоятельном обучении.

Задача оптимального управления для обучения с помощью преподавателя по исходному уравнению (7) решена в работе [3], получена формула для оптимального управления с обратной связью при обучении преподавателем

$$u_1^*(t_j) = \begin{cases} 0 & , Z_П(t_{j-1}) > Z_П^0(t_{j-1}) \\ Y_{Пi}(t_i), & Z_П(t_{i-1}) \le Z_П^0(t_{j-1}) \end{cases}, \quad j = 1, 2 \ldots, \; T \tag{11}$$

где $Y_{Пi}$ — объем знаний, повторяемый в момент времени t_j; T — конечный момент времени. Общий объем повторенного материала

$$Y_П = \sum_{i=1}^{N} Y_{Пi}, \quad Y_П \in X_П,$$

где N — число контрольных и самостоятельных работ на повторение пройденного материала; $X_П$ — весь объем учебного материала, который нужно освоить с помощью преподавателя; $Z_П^0$ — опорная траектория, удовлетворяющая уравнению

$$Z_П^0(t) = Z_{П0} + \frac{Z_П(T) - Z_{П0}}{T} t, \quad t \in [0, T]. \tag{12}$$

Также в [3] с помощью метода Лагранжа — Понтрягина доказано, что программное управление в виде заранее запланированной нагрузки слабо влияет на конечный результат обучения, обычно сводится к примерно равномерному распределению. Поэтому для реального учебного процесса задача оптимального управления сводится к решению двух задач для управлений с обратной связью $u_1^* = u_1^*(t, Z_П(t))$ и $u_3^* = u_3^*(t, Z_C(t))$. Найдем оптимальное управление с обратной связью при полностью самостоятельном обучении $u_3^* = u_3^*(t, Z_C(t))$.

Пусть поведение объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (8). Требуется минимизировать функционал качества управления самостоятельным обучением

$$J_C = \int_0^T (u_3(t) - Z_C(t))dt - TZ_C(T). \tag{13}$$

Для оптимального управления процессом обучения функционал (13) должен принимать минимальное значение на интервале [0, T]. Функционал (13) можно разбить на три слагаемых

$$J_C = J_{C1} - J_{C2} - TZ_C(T),$$

где J_{C1} — функционал потерь — должен принимать минимальное значение

$$J_{C1} = \int_0^T u_3(t)dt;$$

функционал качества обучения (J_{C2}), характеризующий сохранение накопленных знаний после сдачи экзамена (зачета), должен принимать следующее максимальное значение:

$$J_{C2} = \int_0^T Z(t))dt;$$

конечный объем знаний ($Z_C(T)$) должен принимать максимальное значение.

Будем считать, что при оптимальном управлении нагрузка дается небольшими порциями для наилучшего усвоения, поэтому примем в (8) $\cos(au_i) \approx 1$.

Достаточным условием минимума функционала (13) является уравнение Беллмана для непрерывных детерминированных систем [2; 3; 5]. Если существует функция $\varphi(t, Z)$, удовлетворяющая уравнению Беллмана

$$\max_{u_3 \le u_{3\max}} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial Z_C}(-kZ_C + u_2 + u_3) - u_3 + Z_C \right\} = 0 \qquad (14)$$

с граничным условием

$$\varphi(T, Z_C) = Z_C(T). \qquad (15)$$

и управление u_3, удовлетворяющее условию

$$u_3^* = \arg \max_{u_3 \le u_{3\max}} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial Z_C}(-kZ_C + u_2 + u_3) - u_3 + Z_C \right\}, \qquad (16)$$

с ограничением

$$0 \le u_3 \le u_{3\max}, \qquad (17)$$

то $u_3^*(t, Z_C)$ является оптимальным управлением с полной обратной связью, где $u_{3\max}$ — максимально допустимая нагрузка для повторения.

Уравнение Беллмана (14) линейно по u_3, поэтому оптимальное управление u_3^* с ограничением (17) будет релейным [2; 3] и описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Z_C} - 1 \right) u_3^* = 0,$$

которое удовлетворяет условию (16).

Тогда оптимальное управление с обратной связью

$$u_3^* = \begin{cases} 0 & , \dfrac{\partial\varphi}{\partial Z_C} \ne 1 \\ u_{3\max}^* & , \dfrac{\partial\varphi}{\partial Z_C} = 1 \end{cases}. \qquad (18)$$

Из системы (18) при граничном условии (15) определяется условие включения управления с обратной связью

$$Z_C(t) = \varphi(t, Z_C).$$

Пусть нужно оптимальным образом попасть из точки $(Z_{C0}, 0)$ в точку (Z_{C1}, T), где $Z_{C1} \in [Z_{C\min}, Z_{C\max}]$. В качестве функции φ удобно взять опорную траекторию Z_C^0, соединяющую начальную и конечную точки, имеющую уравнение

$$Z_C^0(t) = Z_{C0} + \frac{Z_C(T) - Z_{C0}}{T} t, t \in [0, T]. \qquad (19)$$

Тогда оптимальное управление с обратной связью будет

$$u_3^*(t_j) = \begin{cases} 0 & , Z_C(t_{j-1}) > Z_C^0(t_{j-1}) \\ Y_{Ci}(t_i) & , Z_C(t_{j-1}) \le Z_C^0(t_{j-1}) \end{cases}, \qquad j = 1, 2 .., T \qquad (20)$$

где Y_{Ci} — объем знаний, повторяемый в момент времени t_j. Общий объем повторенного материала

$$Y_C = \sum_{i=1}^{M} Y_{Ci}, \qquad Y_C \in X_C,$$

где M — число контрольных и самостоятельных работ на повторение пройденного материала; X_C — весь объем учебного материала, который нужно освоить самостоятельно.

Математический метод повышения качества обучения в вузе. Рассмотрим, каким образом можно повысить качество обучения по конкретному предмету для отдельного обучаемого, группы (подгруппы), потока. Это достигается с помощью математической модели оптимального управления на трех уровнях. Запишем этапы для метода повышения качества обучения. Первые три этапа будут одинаковы для всех трех уровней.

1. Обучаемые проходят специальное тестирование.
2. По результатам тестирования определяется объем начальных (текущих) знаний для каждого обучаемого по данному предмету.
3. Вычисляются индивидуальные параметры каждого студента: коэффициенты усвоения k_1, k_2 и коэффициент забывания k.

Для отдельного обучаемого последний этап заключается в построении двух оптимальных кривых обучения. Одна из них строится по математической модели для оптимального управления с обратной связью u_1^*. При этом программное управление при обучении с помощью преподавателя задается в соответствии с учебными планами. Вторая оптимальная кривая строится для учебного материала, который необходимо изучить самостоятельно (оптимальное управление u_3^*). Так достигается повышение качества обучения для отдельного студента за счет точного следования оптимальной модели управления, построенной по личным коэффициентам студента k_1, k_2, k.

Для группы (подгруппы), потока проводится усреднение коэффициентов усвоения и забывания каждого коллектива. Далее по средним значениям строится оптимальная модель управления обучением конкретного коллектива по данному предмету и достигается повышение качества обучения для группы (подгруппы), потока.

Таким образом, математический метод повышения качества обучения позволяет оптимально управлять обучением отдельных студентов и коллективов учащихся. При этом достигается максимальный результат на экзамене (зачете) и обеспечиваются устойчивые знания по окончании обучения, при дальнейшем обучении и в профессиональной деятельности выпускников.

Литература и электронные публикации в Интернете

1. Государственная программа инновационного развития Республики Беларусь на 2011—2015 годы [Электронный ресурс]. — Минск, 2011. — Режим доступа: http://www.government.by/upload/docs/file5a5cae06fafe4b28.PDF. — Дата доступа: 26.05. 2011.
2. *Пантелеев, А.В.* Теория управления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. — М.: Высш. шк., 2003.
3. *Седун, А.М.* Математические методы оптимального управления обучением / А.М. Седун, С.Я. Жукович // Научные труды БГЭУ; редкол.: В.Н. Шимов [и др.]. — Минск, 2010. — С. 369—376.
4. *Седун, А.М.* Математический метод управления процессом обучения на сетевом курсе / А.М. Седун, С.Я. Жукович, А.Э. Януш // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2008. — № 5. — С. 36—41.
5. *Кротов, В.Ф.* Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов [и др.]; под ред. В.Ф. Кротова. — М.: Высш. шк., 1990.

Статья поступила
в редакцию 01.03. 2012 г.