яний и поглощений. Наконец, будет исключена ситуация занижения налоговой базы посредством включения в консолидированные группы тех предприятий, которые обладают убытками, возникшими до создания консолидированной группы.

Из всего вышесказанного видно, что введение системы консолидированного учета и налогообложения является одной из самых актуальных для мирового сообщества задач в экономической сфере, поскольку это повышает эффективность крупного бизнеса и шансы государства в конкурентной борьбе на мировых рынках. Курс на «догоняющее развитие» не может обеспечить Республике Беларусь достойное место в XXI веке. Поэтому представляется необходимым глубоко изучить опыт пока опережающих нас развитых стран и соотнести его с реалиями белорусской экономики, чтобы подготовить соответствующие дополнения в Налоговый кодекс и внедрить систему консолидированного налогообложения в Беларуси в ближайшие годы.

Список использованных источников:

1 МНС предлагает ввести понятие консолидированной группы налогоплательщиков// Советская Белоруссия № 38, 26.02.2011 [Электронный ресурс]. – Режим доступа:http:/ /pda.sb.by/post/112831/. Дата доступа: 27.02.2011.

2 Консолидированные группы налогоплательщиков // «Корпоративный юрист» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.clj.ru/discussion/state/59015/. – Дата доступа: 22.02.2011.

3 Крупнейшие налогоплательщики, объединяйтесь! [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gzt.ru/topnews/business/170109.html. - Дата доступа: 27.02.2011.

4 К.Айвазян. Консолидированные группы налогоплательщиков //Корпоративный юрист, №1, 2011, с.5-8.

5 Основные аспекты налогообложения холдинговых бизнес-структур в Великобритании, Германии и Испании. – Режим доступа: http://www.taxpravo.ru/analitika/statya-70353-osnovnyie_aspektyi_nalogooblojeniya_holdingovyih_biznes-struktur_v_veliko britanii_germanii_i_ispanii.

В.В Веременюк, канд. физ.-мат. наук, доцент
Л.И.Шевченко, канд.физ.-мат. наук, доцент
УО «БНТУ» (г. Минск)

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ CES ФУНКЦИИ

В большинстве моделей производственная функция зависит лишь от двух основных факторов - капитала и труда, т.е. имеет вид

$$Y = F(K,L).$$

Известны основные ее свойства:

1) областью задания этой функции является множество всевозможных наборов затрат K и L;
2) функция дважды непрерывно дифференцируема в области ее задания;
3) выпуск невозможен, если отсутствует хотя бы один из факторов производства, т.е. $F(0, L) = F(K, 0) = 0$;
4) функция монотонно возрастает по каждому аргументу, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0;$$

1) функция имеет убывающие частные производные первого порядка, т.е.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

Свойство 4) означает, что при увеличении одного из факторов и неизменном объеме другого объем выпуска продукции возрастает. Свойство 5) выражает тот факт, что при фиксированном объеме одного из факторов последовательное увеличение другого приводит к убывающему приросту продукта.

Важными средними характеристиками производственной функции являются:

- средняя производительность труда $y = \frac{Y}{L}$ - отношение произведенного продукта к объему затраченного труда;

- средние затраты труда $l = \frac{L}{Y} = \frac{1}{y}$ - трудоемкость;

- средняя капиталоотдача $\frac{Y}{K}$ - отношение произведенного продукта к объему использованного капитала (фондоотдача);

- средняя капиталоемкость продукции $\frac{K}{Y}$ - фондоемкость;

- средняя капиталовооруженность труда $k = \frac{K}{L}$ - выражает объем капитала, приходящийся на единицу труда, т.е. на одного работника - фондовооруженность.

Наряду с указанными средними характеристиками производственной функции большую роль играют ее предельные характеристики:

- предельная производительность труда $w = \frac{\partial Y}{\partial L}$, которая характеризует величину дополнительного выпуска продукта от затрат дополнительной единицы труда;

- предельная капиталоотдача (фондоотдача) $i = \frac{\partial Y}{\partial K}$, выражающая величину дополнительного выпуска продукта при использовании дополнительной единицы капитала;

- коэффициент эластичности выпуска по фондам (по капиталу)

$$\varepsilon_K = \frac{\partial Y}{\partial K} : \frac{Y}{K} = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y};$$

- коэффициент эластичности выпуска по труду

$$\varepsilon_L = \frac{\partial Y}{\partial L} : \frac{Y}{L} = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}.$$

Как видим, коэффициент эластичности определяют как отношение предельной величины к средней. Он выражает на сколько процентов увеличится выпуск продукции, если объем используемого капитала или труда увеличится на один процент. Сумму $\varepsilon_K + \varepsilon_L = \varepsilon$ называют общим коэффициентом эластичности производственной функции.

Для производственной функции введем показатели, характеризующие возможность замещения одного фактора другим. Пусть объем L трудовых ресурсов уменьшился на величину ΔL. Естественно встает вопрос: на какую величину ΔK следует увеличить объем K капитала (основных фондов), чтобы выпуск Y продукции остался прежним? Для этого рассмотрим равенство $F(K,L) = C$, где $Y = C$ считается постоянным. Вычислим полный дифференциал от обеих частей данного равенства. Получим

$$\frac{\partial F}{\partial K}\cdot dK+\frac{\partial F}{\partial L}\cdot dL=0.$$

Отсюда находим предельную норму замены труда капиталом

$$n_K=\frac{dK}{dL}=\frac{\Delta K}{\Delta L}=-\frac{\partial F}{\partial L}:\frac{\partial F}{\partial K}, \qquad (1)$$

а также предельную норму замены капитала трудом

$$n_L=\frac{dL}{dK}=\frac{\Delta L}{\Delta K}=-\frac{\partial F}{\partial K}:\frac{\partial F}{\partial L}. \qquad (2)$$

Очевидно, что обе предельные нормы замены связаны соотношением

$$n_K\cdot n_L=1. \qquad (3)$$

Для количественной характеристики скорости изменения предельной нормы замены факторов производства будем использовать величину, называемую эластичностью замены, которая вычисляется, в случае замены труда капиталом, согласно [1] по формуле

$$\sigma_K=\frac{d\ln(K/L)}{d\ln(-n_K)}=\frac{d(K/L)}{K/L}:\frac{dn_K}{n_K}=\frac{dK}{K}:\frac{dn_K}{n_K}. \qquad (4)$$

Эластичность замены в данном случае показывает, на сколько процентов изменится отношение K/L факторов производства (фондовооруженность) при сохранении объема выпуска продукции, если предельная норма замены n_K изменилась на один процент.

Среди макроэкономических производственных функций важную роль играют однородные функции, т.е. функции, для которых выполняется соотношение

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda^m F(K,L) \qquad (5)$$

для любого $\lambda>0$. Число m называют степенью однородности производственной функции и оно характеризует так называемый эффект от расширения масштаба производства. Известно [1], что при $m>1$ имеем возрастающий эффект (одновременное увеличение обоих факторов в λ раз *приводит* к возрастанию объема выпуска продукции больше, чем в λ раз). При $m<1$ имеем убывающий эффект, а при $m=1$ имеем постоянный (неизменный) эффект.

Продифференцируем по λ обе части выражения (5) и полагая $\lambda=1$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial K}\cdot K+\frac{\partial F}{\partial L}\cdot L=mF(K,L)=mY.$$

Разделив обе части данного выражения на Y, получим

$$\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\frac{K}{Y}+\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{L}{Y}=m. \qquad (6)$$

В результате мы получили для однородной производственной функции равенство

$$\varepsilon_K+\varepsilon_L=m. \qquad (7)$$

Пусть теперь $\lambda=\frac{1}{L}$. Имеем

$$F(\lambda K,\lambda L)=F\left(\frac{K}{L},1\right)=\frac{1}{L^m}F(K,L)=\frac{Y}{L^m}. \qquad (8)$$

Рассмотрим однородную производственную функцию с постоянным эффектом от расширения производства $(m=1)$. Из (8) следует

$$Y=L\cdot F\left(\frac{K}{L},1\right)=L\cdot f(k),$$

откуда $\frac{Y}{L}=f(k)$. Полагая $y=\frac{Y}{L}$, получим функцию $y=f(k)$, которая задает зависимость между производительностью труда и фондовооруженностью труда. Укажем ряд свойств этой функции, вытекающих из свойств производственной функции $Y=F(K,L)$:

1) $f(0)=F(0,1)=0$;

2) $\dfrac{f(k)}{k}=\dfrac{1}{k}\cdot F(k,1)=F(1,\dfrac{1}{k})$. Откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{f(k)}{k}=F(1,0)=0$;

3) $\dfrac{df}{dk}=\dfrac{\partial F}{\partial K}$, т.е. $f'(k)>0$. Значит функция монотонно возрастает;

4) $f''(k)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2}<0$. Функция является выпуклой.

Найдем предельную норму замены n_K. Для этого нам понадобятся частные производные $\dfrac{\partial Y}{\partial K}$ и $\dfrac{\partial Y}{\partial L}$.

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=L\cdot f'(k)\cdot\frac{1}{L}=f'(k).\quad \frac{\partial Y}{\partial L}=f(k)+L\cdot f'(k)\cdot\left(-\frac{K}{L^2}\right)=f(k)-k\cdot f'(k).$$

Следовательно

$$n_K=k-\frac{f(k)}{f'(k)},\qquad (9)$$

а согласно (3), нетрудно получить

$$n_L=\frac{f'(k)}{k\cdot f'(k)-f(k)}.\qquad (10)$$

Таким образом, для однородной производственной функции с постоянным эффектом от расширения масштаба производства предельные нормы замены факторов зависят лишь от величины фондовооруженности k. Используя (4), находим эластичность замены труда капиталом

$$\sigma_K=\frac{f'(k)\cdot[k\cdot f'(k)-f(k)]}{k\cdot f(k)\cdot f''(k)}.\qquad (11)$$

Нетрудно показать, что и эластичность замены капитала трудом σ_L в этом случае также считается по формуле (11). Поэтому, в дальнейшем будем считать $\sigma_K=\sigma_L=\sigma$.

Получим аналитический вид однородной производственной функции с постоянной эластичностью замены, так называемой CES функции. Для этого решим дифференциальное уравнение вида (11), где $\sigma_K=\sigma$.

Из определения эластичности имеем

$$\sigma=\frac{d(\ln k)}{d(\ln(-n_K))}=\frac{dk}{k}:\frac{dn_K}{n_K}=\frac{dk}{k}\cdot\frac{n_K}{dn_K}.$$

Откуда получим

$\dfrac{dn_K}{n_K}=\dfrac{1}{\sigma}\cdot\dfrac{dk}{k}$. Проинтегрировав данное выражение [2], получим

$\ln|n_K|=\dfrac{1}{\sigma}\cdot\ln k+\ln|C|$. Откуда $n_K=C\cdot k^{\frac{1}{\sigma}}$, где согласно (1) $C<0$.

Используя зависимость нормы замены n_K от фондовооруженности труда k, получим

$$k-\frac{f(k)}{f'(k)}=C\cdot k^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Следовательно

$$\frac{df(k)}{f(k)}=\frac{dk}{k-C\cdot k^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Интегрируя это выражение, имеем

$$\ln|f(k)| = \int \frac{dk}{k - C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}}} + C_1 .$$

Для вычисления полученного интеграла воспользуемся заменой [2] $k = t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$. Получим

$$\int \frac{dk}{k - C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \cdot \int \frac{t^{\frac{1}{\sigma-1}} dt}{t^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - C \cdot t^{\frac{1}{\sigma-1}}} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \cdot \int \frac{dt}{t-C} = \frac{\sigma}{\sigma-1} \cdot \ln|t-C| + \ln|C_1| .$$

Таким образом, функция $f(k)$ имеет вид

$$f(k) = C_1 \cdot (t-C)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = C_1 \left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - C \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

Пусть $\frac{1-\sigma}{\sigma} = p$. Тогда

$$f(k) = C_1 \cdot \left(k^{-p} - C\right)^{-\frac{1}{p}} . \qquad (12)$$

Перейдем теперь к переменным K и L. Имеем

$$F(K,L) = L \cdot f(k) = L \cdot C_1 \cdot \left[\left(\frac{K}{L} \right)^{-p} - C \right]^{-\frac{1}{p}} = L \cdot C_1 \cdot \left(K^{-p} - C \cdot L^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{L} = \left(C_1^{-p} \cdot K^{-p} - C_1^{-p} \cdot C \cdot L^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}}$$

Положив $C_1^{-p} = A > 0$; $-C_1^{-p} \cdot C = B > 0$, получим общий вид однородной производственной *CES* функции

$$F(K,L) = \left(A \cdot K^{-p} + B \cdot L^{-p}\right)^{-\frac{1}{p}} , \qquad (13)$$

где эластичность замены $\sigma = \frac{1}{p+1}$.

Литература:

1. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. “Математическое моделирование макроэкономических процессов”, Кишинэу, Еврика, 1997, 314С.
2. Минюк С. А., Самаль С. А., Шевченко Л. И. “Высшая математика для экономистов. Том 1”, Мн., Элайда, 2003, 525С.

Веренич В.А. , аспирант
УО «БГЭУ» (г. Минск)

ИНТЕГРАЦИЯ В АПК РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Развитие интеграционных процессов приобрело стратегическое значение. Это обусловлено, прежде всего, необходимостью стабилизации производственного процесса аграрных формирований: восстановления разрушенных производственно-хозяйственных связей, соблюдения паритета интересов всех отраслей и хозяйствующих субъектов. Аграрные предприятия вступают в интеграционные процессы, стремясь снизить риск, связанный с производством, его зависимостью от природно-климатических условий, стихийностью рынка сельскохозяйственной продукции, необходимостью повышения конкурентоспособности производства. Перерабатывающие предприятия также стремятся обеспечить себе стабильные доходы, благодаря наличию надежной сырьевой базы и рынков сбыта продукции.

Благодаря развитию научно-технического прогресса и интеграционных процессов повышается роль технологического единства, и формируются новые отрасли и