А.М. Седун,
кандидат технических наук;
С.Я. Жукович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБУЧЕНИЕМ

В статье предложена математическая модель обучения. Выявлены факторы, влияющие на процесс накопления знаний, построены кривые обучения для непрерывного и дискретного программного управления. Из принципа минимума Понтрягина для автономных систем получены аналитические формулы и графики для оптимального программного управления и оптимальной траектории. Из уравнения Беллмана найдено оптимальное управление с обратной связью, дающее минимум функционала качества. Численными методами построена оптимальная траектория процесса с определенными начальными условиями.

Развитие рыночной экономики обусловливает наличие жесткой конкуренции производимых товаров и услуг во всех сферах деятельности. Особое место занимает система образования. Уровень подготовленности выпускников образовательных учреждений в значительной степени определяет возможности дальнейшей профессиональной подготовки работников и, как следствие, научный, оборонный, культурный и производственный потенциал страны.

В системе высшего образования Беларуси внедряется система менеджмента качества (СМК). Данная статья предлагает математические методы оптимального управления обучением, которые могут быть положены в основу СМК вузов Беларуси.

1. Математическая модель обучения

Система управления — совокупность управляющего устройства и объекта управления. Действия системы направлены на достижение некоторого результата — цели управления. Общим принципом систем управления является принцип обратной связи: управление объектом осуществляется на основе получения информации о желаемом и текущем движениях объекта и их сравнении для нахождения ошибки и выработки такого управляющего воздействия, чтобы ошибка с течением времени стремилась к нулю, и выполнялась конечная цель управления. Математическая модель системы управления — это пара: оператор системы и модель внешних воздействий. Оператором системы называется функция, в соответствии с которой система преобразует внешнее (входное) воздействие в выходной сигнал [2].

Задача обучения может быть сформулирована как задача управления [2, 5]. В этом случае обучаемый выступает в качестве объекта управления, а обучающий или обучающая система — в качестве источника управления.

В [5—7] предлагается математическая модель обучения. Процесс обучения можно описать линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{dZ}{dt} = k_1 u(t)\cos(au(t)) - kZ, \tag{1}$$

где $Z = Z(t)$ — уровень (объем) текущих знаний (в академических часах); $u(t)$ — управляющая функция; k — коэффициент забывания, который показывает, какую часть от текущих знаний Z обучаемый забывает в среднем за сутки; k_1 — коэффициент усвоения новых знаний при обучении с помощью преподавателя ($k \geq 0$, $k_1 \leq 1$);

$$a = \frac{\pi}{2Z_{max}},$$

где $Z_{\max}$ — максимальный объем знаний (объем курса в академических часах);

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

где N — число запланированных занятий; X_i — объем знаний, который дает преподаватель на i-м занятии.

Функция $\cos(au(t))$ в формуле (1) выполняет роль фильтра, не допускающего усвоения слишком большого однократного объема нагрузок ($0 \le \cos(au(t)) \le 1$).

Функцию управления можно разбить на две части [9]

$$u = u_0 + u_1,$$

где u_0 — программное управление, задаваемое в виде заранее запланированной нагрузки; u_1 — управление процессом повторения посредством контрольных и самостоятельных работ; u_1 — управление с обратной связью.

Задача оптимального управления сводится к тому, чтобы найти оптимальное программное управление u_0^* (синтез оптимального программатора) и оптимальное управление с обратной связью u_1^* (синтез оптимального регулятора) [9].

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме эффектов каждого из воздействий в отдельности. Поэтому выходной сигнал линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного движений [1]

$$Z = Z_0 e^{-kt} + e^{-kt} \int k_1 u(t) e^{kt} \cos(au(t))dt, \qquad (2)$$

где Z_0 — начальный объем знаний при $t = t_0$.

Свободное движение происходит при отсутствии внешнего воздействия вследствие ненулевых начальных условий. Оно является решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному уравнению системы

$$\frac{dZ}{dt} + kZ = 0.$$

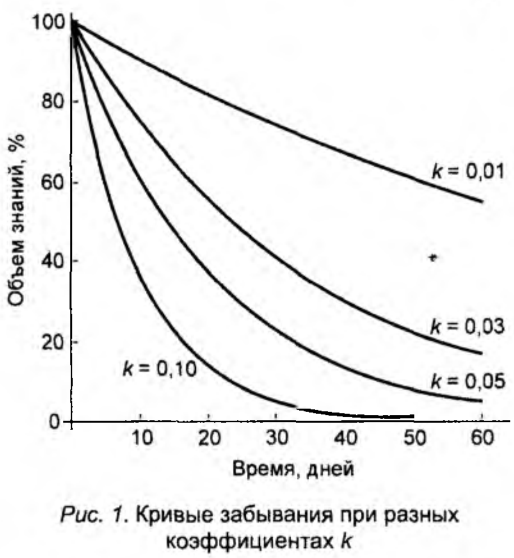

Рис. 1. Кривые забывания при разных коэффициентах *k*

В задаче обучения это соответствует постепенному забыванию ранее усвоенного объема знаний Z_0. Разным коэффициентам забывания соответствуют различные кривые забывания (рис. 1).

Вынужденное движение происходит вследствие внешнего воздействия при нулевых начальных условиях. Вынужденное движение отлично от нуля только после приложения внешнего воздействия. Кривые накопления знаний для разных коэффициентов забывания и усвоения при дискретном равномерном программном управлении описаны в [5].

Кривая обучения для непрерывного равномерного программного управления представлена на рис. 2 ($u_0 = 0{,}852$, $k = 0{,}03$).

Из рис. 2, 3 видно, что форма кривой обучения или ее аппроксимации, получен-

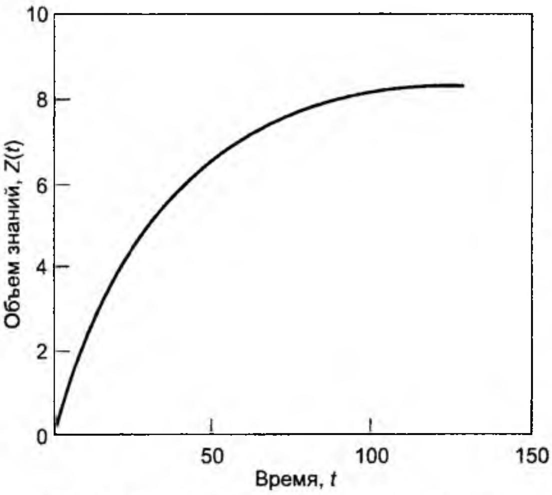

Рис. 2. Кривая обучения для непрерывного программного управления

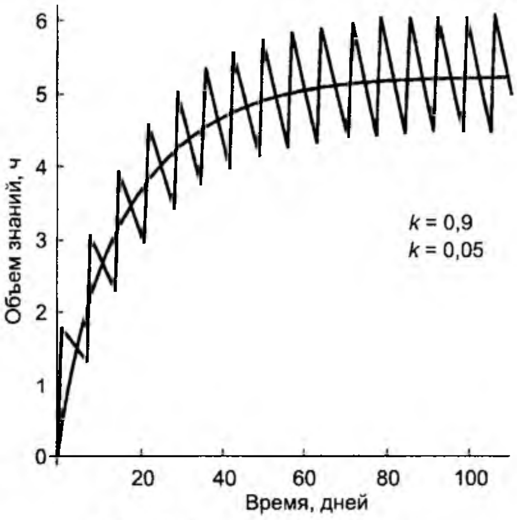

Рис. 3. Аппроксимированная кривая обучения

ных на основе математической модели (2), аналогична феноменологической классической кривой научения, описанной в [5, 11]. Таким образом, при любой равномерной нагрузке теоретически получается классическая кривая научения.

Коэффициент забывания k при повторении уменьшается. Будем считать справедливой зависимость

$$k_{(n)} = k \ / \ 2^n, \tag{3}$$

где n — число повторений материала.

После первого повторения материала коэффициент забывания для этого объема знаний будет $k_{(1)} = k \ / \ 2$, после второго — $k_{(2)} = k \ / \ 4$ и т.д. В дальнейшем для переменного $k = k(t)$ будем применять коэффициент забывания, усредненный по времени

$$K(t) = \frac{1}{t}\int_0^T k(t)dt.$$

Коэффициенты k_1 и k определяются для каждого обучаемого по соответствующей дисциплине с помощью специально разработанных компьютерных тестов [8].

2. Метод оптимального программного управления процессом обучения

Для решения задачи оптимального программного управления процессом обучения будем применять один из наиболее эффективных методов в теории оптимального управления — метод Лагранжа—Понтрягина для непрерывных управляемых процессов. С математической точки зрения данный метод состоит в сведении исходной задачи оптимального управления к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений. Эта задача по сравнению с исходной, как правило, значительно проще, что позволяет получать ее аналитическое или численное решение [1, 3, 4, 10].

Рассмотрим функционал качества управления обучением

$$J = \int_0^T (u_0(t) - Z(t))dt - Z(T), \tag{4}$$

где T — конечный момент времени.

Для оптимального управления процессом обучения функционал (4) должен принимать минимальное значение на интервале $[0, T]$. Функционал (4) можно разбить на три слагаемых

$$J = J_1 - J_2 - Z(T),$$

где J_1 — функционал потерь, должен принимать минимальное значение

$$J_1 = \int_0^T u_0(t)dt;$$

J_2 — функционал качества обучения, характеризующий сохранение накопленных знаний после сдачи экзамена (зачета), должен принимать максимальное значение

$$J_2 = \int_0^T Z(t)dt;$$

$Z(T)$ — конечный объем знаний, должен принимать максимальное значение.

Гамильтониан, соответствующий уравнению (1) и функционалу (4)

$$H = [-kZ + k_1 u_0 \cos(au_0)]p + (u_0 - Z)p_0, \tag{5}$$

где $p = p(t)$, $p_0 = p_0(t)$ — дополнительные переменные.

Обычно рассматривают два случая: $p_0(t) \equiv 0$ и $p_0(t) \neq 0$ [1]. Если требуется минимизировать определенный функционал качества управления, то часто полагают $p_0(t) = 1$ [1, 3, 4, 10].

Уравнение (1) автономно, т.е. не содержит в явном виде время t, поэтому гамильтониан (5) в соответствии с принципом минимума Понтрягина для оптимального управления тождественно равен нулю

$$H(p(t), u_0^*(t), Z^*(t)) \equiv 0,\ 0 \le t \le T. \tag{6}$$

Будем считать, что при оптимальном управлении нагрузка дается небольшими порциями для наилучшего усвоения, поэтому примем в (5) $\cos(au_0) \approx 1$. Тогда из (5) получаем выражение для непрерывного программного управления

$$u_0^*(t) = \frac{Z^*(kp+1)}{k_1 p + 1}. \tag{7}$$

Составим систему канонических уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial Z}. \end{cases} \tag{8}$$

Из второго уравнения (8) и (5) получаем дифференциальное уравнение для нахождения дополнительной переменной p

$$\frac{dp}{dt} = kp + 1. \tag{9}$$

Общим решением уравнения (9) является функция

$$p(t) = p(0)e^{kt} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}e^{kt}. \tag{10}$$

Постоянную интегрирования $p(0)$ находим из равенства нулю гамильтониана H в момент времени $t = 0$

$$p(0) = \frac{Z_0 - u_0(0)}{k_1 u_0(0) - kZ_0},$$

где $u_0(0)$ — значение функции управления в момент времени $t = 0$.

Пусть нужно оптимальным образом попасть из точки $(Z_0, 0)$ в точку (Z_1, T), где $Z_1 \in [Z_{\min}, Z_{\max}]$. В качестве Z^* в формуле (7) возьмем в первом приближении прямую, соединяющую начальную и конечную точки

$$Z^0(t) = Z_0 + \frac{Z(T) - Z_0}{T}t,\ t \in [0, T]. \tag{11}$$

Таким образом, получаются следующие формулы для расчета оптимального программного управления и оптимальной траектории:

$$u_0^*(t) = \frac{Z_0(t)(kp+1)}{k_1 p + 1}, \tag{12}$$

$$Z^*(t) = Z_0 e^{-kt} + e^{-kt}\int k_1 u_0^*(t) e^{kt}\,dt, \tag{13}$$

где дополнительная переменная

$$p(t) = \frac{Z_0 - u_0(0)}{k_1 u(0) - kZ_0} e^{kt} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} e^{kt}. \tag{14}$$

Пусть имеются конкретные параметры процесса: $T = 128, Z_1 = 26, k = 0{,}03, k_1 = 0{,}9$. Тогда графики оптимального программного управления и оптимальной траектории для разных начальных условий представлены на рис. 4, 5.

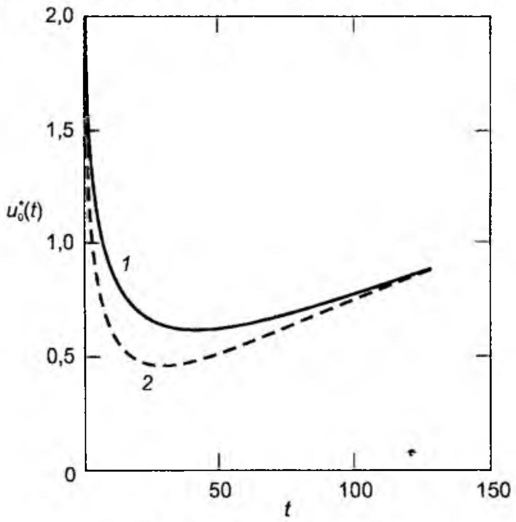

Рис. 4. Оптимальное программное управление: кривая *1* — $Z_0 = 8$, $u_0(0) = 2$; кривая 2 — $Z_0 = 4$, $u_0(0) = 1$

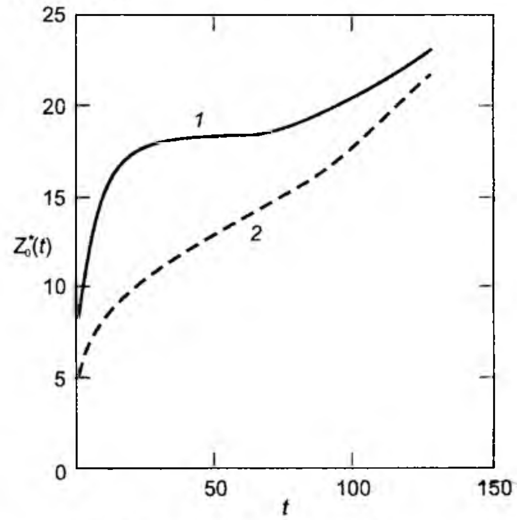

Рис. 5. Оптимальная траектория для программного управления: кривая *1* — $Z_0 = 8$, $u_0(0) = 2$; кривая 2 — $Z_0 = 4$, $u_0(0) = 1$

Общая нагрузка при программном управлении определяется площадью подинтегральной кривой на рис. 4 и равна примерно 100 ч, поэтому для реального учебного процесса необходимо также управление с обратной связью.

3. Метод оптимального управления с обратной связью

При реальном учебном процессе программное управление u_0 заранее задано и является дискретным. Поэтому задача оптимального управления сводится к нахождению оптимального управления с обратной связью $u_1^* = u_1^*(t,\ Z(t))$ (синтез оптимального регулятора) [9].

Пусть поведение объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным управлением (1). Требуется минимизировать функционал качества управления обучением

$$J = \int_0^T (u_1(t) - Z(t))dt - Z(T). \tag{15}$$

Достаточным условием минимума функционала (15) является уравнение Беллмана для непрерывных детерминированных систем [1, 4]. Если существует функция $\varphi(t, Z)$, удовлетворяющая уравнению Беллмана

$$\max_{u_1 \le u_{1\max}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z}(-kZ + u_0 + u_1) - u_1 + Z \right] = 0 \tag{16}$$

с граничным условием

$$\varphi(T, Z) = Z(T), \tag{17}$$

и управление u_1, удовлетворяющее условию

$$u_1^* = \arg\max_{u_1 \le u_{1\max}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial Z}(-kZ + u_0 + u_1) - u_1 + Z \right] \tag{18}$$

с ограничением

$$0 \le u_1 \le u_{1\max}, \tag{19}$$

то $u_1^*(t, Z)$ является оптимальным управлением с полной обратной связью, где $u_{1\max}$ — максимально допустимая нагрузка для повторения.

Уравнение Беллмана (16) линейно по u_1, поэтому оптимальное управление u_1^* с ограничением (19) будет релейным [1] и описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial Z} - 1 \right) u_1^* = 0,$$

которое удовлетворяет условию (18).

Тогда оптимальное управление с обратной связью

$$u_1^* = \begin{cases} 0, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial Z} \ne 1, \\ u_{1\max}^*, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial Z} = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Из системы (20) при граничном условии (17) определяется условие включения управления с обратной связью

$$Z(t) = \varphi(t, Z).$$

Пусть нужно оптимальным образом попасть из точки $(Z_0, 0)$ в точку (Z_1, T), где $Z_1 \in [Z_{\min}, Z_{\max}]$. В качестве функции φ удобно взять опорную траекторию (11), соединяющую начальную и конечную точки. Тогда оптимальное управление с обратной связью будет

$$u_1^*(t_j) = \begin{cases} 0, & Z(t_{j-1}) > Z^0(t_{j-1}), \\ Y_i(t), & Z(t_{j-1}) \le Z^0(t_{j-1}), \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, T, \tag{21}$$

где Y_i — объем знаний, повторяемый в момент времени t_j.

Общий объем повторенного материала

$$Y = \sum_{i=1}^{M} Y_i, Y \in X,$$

где M — число контрольных и самостоятельных работ на повторение пройденного материала.

На рис. 6 представлен процесс управления обучением с обратной связью. Пусть обучаемый получает еженедельно объем знаний в два часа в течение семнадцати недель. День сдачи экзамена $T = 128$. Предположим, что нужно достичь объема знаний $Z_1(T) =$ 23 часа. Коэффициенты процесса: $k_1 = 0{,}9$, $k = 0{,}03$. Кривая *1* показывает процесс обучения при программном управлении (без повторения). Прямая *3* — опорная траектория. Кривая *2* представляет процесс обучения при управлении с обратной связью. В этом случае траектория обучения имеет четыре скачка для корректировки значения $Z(t)$. На первой контрольной работе повторяется первая часть предмета (12 ч), на второй — вторая (12 ч), на третьей — последняя. Последний скачок кривой *2* соответствует подготовке студента непосредственно перед сдачей экзамена (повторяется весь материал).

Рассмотрим теперь идеальный случай. Пусть обучаемый усваивает всю информацию ($k_1 = 1$) и полностью ее сохраняет с помощью повторения и применения ($k = 0$). Такой идеальный процесс обучения описывается формулой

$$Z = Z_0 + \int u(t)dt$$

и показан на рис. 7.

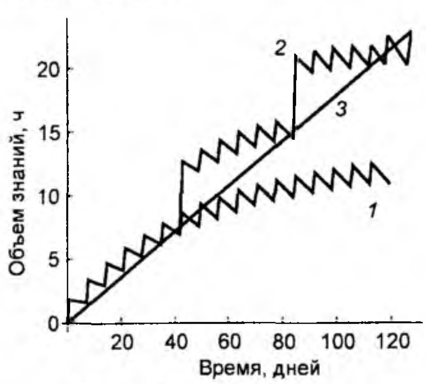

Рис. 6. Процесс управления обучением с обратной связью:
1 — управление без обратной связи,
2 — управление с обратной связью,
3 — опорная траектория

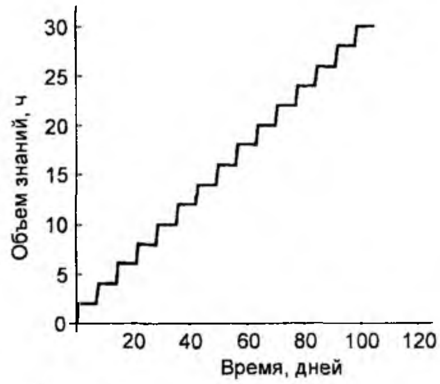

Рис. 7. Кривая идеального обучения

Таким образом, оптимальная траектория процесса обучения для управления с обратной связью должна быть ограничена снизу опорной траекторией *3* (см. рис. 6), а сверху — кривой идеального обучения (см. рис. 7).

Заключение

В данной работе описана математическая модель обучения в виде линейного дифференциального уравнения (1). Построены кривые обучения для непрерывного и дискретного программного управления. Показано, что при любой равномерной нагрузке из формулы (2) теоретически получается классическая кривая научения.

Для решения задачи оптимального программного управления использован метод Лагранжа—Понтрягина. Приведен функционал (4), характеризующий достижение нужного уровня знаний и их качество при минимуме потерь. Выписан гамильтониан (5), составлена и решена система канонических уравнений (8) для данной задачи. Из принципа минимума Понтрягина для автономных систем получены аналитические формулы и графики для оптимального программного управления (12) и оптимальной траектории (13).

Для решения задачи оптимального управления с обратной связью выписано уравнение Беллмана в частных производных и найдено соответствующее оптимальное управление с обратной связью (20), дающее минимум функционала качества (15). Численными методами построена оптимальная траектория процесса с определенными начальными условиями.

Литература

1. *Пантелеев, А.В.* Теория управления в примерах и задачах / А.В. Пантелеев. — М.: Высш. шк., 2003. — 382 с.

2. *Растригин, Л.А.* Адаптация сложных систем / Л.А. Растригин. — Рига: Зинатне, 1981. — 375 с.

3. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969. — 384 с.

4. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов [и др.]; под ред. В.Ф. Кротова. — М.: Высш. шк., 1990. — 430 с.

5. *Седун, А.М.* Математический метод управления процессом обучения на сетевом курсе / А.М. Седун, С.Я. Жукович, А.Э. Януш // Весн. Беларус. дзярж. экан. ун-та. — 2008. — № 5.

6. *Седун, А.М.* Управление процессом обучения на сетевом курсе / А.М. Седун, С.Я. Жукович, А.Э. Януш // Менеджмент и маркетинг: опыт и проблемы: сб. науч. тр. — Минск, 2008. — 436 с.

7. *Седун, А.М.* Метод управления процессом обучения на сетевом курсе / А.М. Седун, С.Я. Жукович // Формирование финансового механизма инновационного менеджмента: материалы VIII междунар. науч.-практ. конф., Минск, 22—23 мая 2008 г. — Минск, 2008. — 136 с.

8. *Хлебников, В.А.* Теория и методы оценки эффективности систем обучения коллективного пользования: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.01 / В.А. Хлебников. — М., 2006. — 44 с.

9. *Воронов, А.А.* Теория автоматического управления / А.А. Воронов. — М.: Высш. шк., 1986. — 504 с.

10. *Чаки, Ф.* Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Ф. Чаки. — М.: Мир, 1975. — 420 с.

11. *Крайг, Г.* Психология развития / Г. Крайг, Д. Бокум. — 9-е изд. — СПб.: Питер, 2005. — 940 с.

С.А. Сергейчик,
доктор биологических наук, профессор

ЭКОЛОГО-ФИЗИОЛОГИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ФИТОТОКСИЧНОСТИ ФОРМАЛЬДЕГИДА

Формальдегид (НСНО) изменяет параметры флуоресценции хлорофилла, содержание фотосинтетических пигментов и водорастворимых белков листьев 15 видов хвойных и лиственных древесных растений. Установлено, что разные виды древесных растений проявляют неодинаковую толерантность к формальдегиду. Рекомендованы таксоны деревьев, перспективных для оптими-