
**РАЗРАБОТКА ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ РАСХОДОВ
(Часть 2. Начало в № 5 2004 г.)**

Поиск несмещенных значений параметров функции потребительских расходов $[C(t) = a + bX(t) + u(t)]$ может быть осуществлен по нелинейному методу наименьших квадратов (МНК) с применением процедуры Хилдрета-Лу [3, 224]. Этот методический подход предполагает последовательный перебор всевозможных значений, которые может принимать коэффициент автокорреляции ρ в интервале от -1 до $+1$ и разработку такого же количества преобразованных моделей потребительских расходов по типу модели (11):

$$C'(t) = C(t) - \rho C(t - 1) = a(1 - \rho) + bX(t) - \rho bX(t - 1) + e(t), \quad (11)$$

которая получена на основе идентификационного уравнения (9) путем перенесения лаговой переменной $\rho C(t - 1)$ с правой на левую сторону. Для оценки параметров уравнения (11) удобнее представить его в преобразованной форме (11а):

$$\begin{aligned} C'(t) &= a(1 - \rho) + b[X(t) - \rho X(t - 1)] + e(t) = \\ &= a(1 - \rho) + bX'(t) + e(t), \end{aligned} \quad (11a)$$

где $C'(t) = C(t) - \rho C(t - 1)$ — преобразованная переменная $C(t)$; $X'(t) = X(t) - \rho X(t - 1)$ — преобразованная переменная $X(t)$.

Оцененные с помощью обычного метода наименьших квадратов значения параметров a и b каждый раз подставляются в оцененное уравнение (9), которое по содержанию является уравнением идентификации параметров. Процедура продолжается до полного схождения параметров, т.е. до того идеального случая, когда коэффициент регрессии при лаговой переменной $C(t - 1)$ совпадет со значением ρ , которое было использовано при разработке преобразованной модели (11а). В свою очередь частное от деления оцененного значения коэффициента регрессии при лаговой переменной $X(t - 1)$ уравнения идентификации (9) на оцененное значение коэффициента регрессии при объясняющей переменной $X(t)$ должно дать значение коэффициента автокорреляции, т.е. совпасть с коэффициентом регрессии при лаговой переменной $C(t - 1)$. Процедура Хилдрета-Лу является достаточно трудоемкой. Нами предложена менее трудоемкая методика достижения приемлемой сходимости параметров. Ее основное содержание и практическое применение приводятся ниже.

В процессе поиска приемлемого решения было выдвинуто предположение о том, что неидентифицируемость параметров происходит из-за наличия шумового эффекта гетероскедастичности переменных модели. Как видно ниже, эта гипотеза подтвердилась.

В соответствии со вторым условием Гаусса-Маркова “дисперсия случайного члена должна быть постоянна для всех наблюдений” [3, 80]. Это условие известно в эконометрике как *гомоскедастичность*, однако выполняется оно далеко не всегда. Нередко может наблюдаться неодинаковый разброс случайных членов, т.е. вариация значений случайного члена $\text{var}(u_t) = \sigma_i^2$ непостоянна. В противополо-

ложность гомоскедастичности это явление получило название *гетероскедастичность* [3, 81].

Явление гетероскедастичности может быть обнаружено по характеру поведения значений случайного члена $u(t)$, полученных по оцененному уравнению (4). Эти значения приведены в графе 5 табл. 1 (см. первую часть статьи [6, 39]). Последовательность вычислительных операций по обнаружению и устранению эффекта гетероскедастичности приводится в табл. 2 (графы 2–9). Для удобства последующих расчетов остатки $u(t)$ повторно воспроизведены в графе 2 табл. 2. В графе 3 определены квадраты значений случайного члена $u^2(t)$, затем на их основе в соответствии с уравнением (12) получены оцененные значения $\hat{u}^2(t) = \sigma^2$ в зависимости от объясняющей переменной $X(t)$, т.е.

$$\hat{u}^2(t) = -22,26 + 0,7758X(t). \quad (12)$$

Таблица 2. Преобразования по устранению эффекта гетероскедастичности в регрессии расходов на конечное потребление в зависимости от ВВП Республики Беларусь за 1990–2002 гг., в постоянных ценах 1990 г., млрд р.

Год	Остатки по уравнению регрессии (4а), $u(t)$	$u^2(t)$	$\hat{u}^2(t)$	$\sqrt{\hat{u}^2(t)} = \sigma_i$	Расходы на конечное потребление, $C(t)$	Валовой внутренний продукт, $X(t)$	$C(t) / \sigma_i = C^*(t)$	$X(t) / \sigma_i = X^*(t)$	$\hat{C}^*(t)$	Остатки, $e(t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1990	-1,67	2,79	11,34	3,3674	31,00	43,3	9,21	12,86	9,31	-0,10
1991	-3,40	11,56	10,95	3,3090	28,83	42,8	8,71	12,93	9,36	-0,65
1992	-2,63	6,92	7,77	2,7874	26,04	38,7	9,34	13,88	10,03	-0,69
1993	-1,57	2,46	5,44	2,3323	24,49	35,7	10,50	15,31	11,04	-0,54
1994	-0,45	0,20	1,95	1,3964	21,70	31,2	15,54	22,34	16,00	-0,46
1995	0,16	0,03	-0,53	0,7280	19,53	28,0	26,83	38,46	27,36	-0,53
1996	0,39	0,15	0,09	0,3000	20,46	28,8	68,20	96,00	67,93	0,27
1997	-0,61	0,37	2,65	1,6278	22,32	32,1	13,71	19,72	14,15	-0,44
1998	-4,08	16,65	4,66	2,1587	25,11	34,7	11,63	16,07	11,58	0,05
1999	0,73	0,53	5,60	2,3664	26,97	35,9	11,40	15,17	10,94	0,46
2000	1,08	1,17	7,23	2,6888	29,14	38,0	10,84	15,91	11,46	-0,62
2001	3,51	12,32	8,62	2,9359	33,13	39,8	11,28	13,56	9,81	1,46
2002	4,55	20,70	10,09	3,1764	35,82	41,7	11,28	13,13	9,50	1,78

Источник: разработана нами по данным табл.1.

Результаты вычислений по уравнению (12) помещены в графе 4 табл.2 Неравные значения $\hat{u}^2(t) = \sigma^2$ свидетельствуют о наличии гетероскедастичности. Далее, в графе 5 произведено вычисление значений среднеквадратических отклонений $\sqrt{\hat{u}^2(t)} = \sigma_i$, которые затем использованы для устранения гетероскедастичности. Устранение эффектов гетероскедастичности осуществлено путем деления наблюдаемых значений переменных $C(t)$ и $X(t)$ (графы 6, 7) на σ_i . Результаты вычислений по устранению гетероскедастичности представлены преобразованными переменными потребительских расходов $C^*(t)$ и ВВП $X^*(t)$ и приведены в графах 8, 9 табл.2.

По преобразованным переменным с учетом устранения эффекта гетероскедастичности разработано уравнение регрессии

$$\hat{C}^*(t) = 0,2444 + 0,7051X^*(t) + e(t) \quad (13)$$

t-статистика: 65,899

DW = 0,955 F = 4342,722 R = 0,9987

при относительной ошибке аппроксимации $\alpha = 5,28 \%$ и одиннадцати степенях свободы.

Параметры уравнения регрессии (13): предельный коэффициент склонности к потреблению $b = 0,7051$, коэффициент корреляции $R = 0,9987$ оказались значимыми по t -критерию Стьюдента на 5%-м уровне значимости и тем более на 1%-м уровне. Аналогичное заключение можно сделать по уравнению (13) и на основании F -критерия. Однако в соответствии с критерием Дарбина-Уотсона (DW) его расчетное значение, равное 0,955, меньше критического [3, 372], что указывает на наличие положительной автокорреляции в остатках $e(t)$. На первом этапе авторегрессионных преобразований разработано идентификационное уравнение (14), для чего использованы данные граф 8 и 9 табл. 2. В оценке по методу наименьших квадратов оно получило следующее выражение:

$$\begin{aligned} \hat{C}^*(t) &= 0,2479 + 0,668C^*(t - 1) + 0,7114X^*(t) - 0,4798X^*(t - 1) + \xi(t) \quad (14) \\ t\text{-статистика: } & 1,563 \qquad 60,508 \qquad 1,580 \\ DW = & 2,014 \qquad F = 1378,422 \qquad R = 0,999 \end{aligned}$$

при относительной ошибке аппроксимации $\alpha = 4,58 \%$ и восьми степенях свободы.

Полученные оценки указывают на значимость коэффициента регрессии (предельного коэффициента склонности к потреблению) при объясняющей переменной $X^*(t)$ по критерию Стьюдента и значимости уравнения регрессии в целом в соответствии с F -критерием Фишера.

По структуре идентификационного уравнения (9) и оцененным его значениям в уравнении (14) коэффициент при лаговой переменной $X^*(t - 1)$ представлен произведением коэффициента регрессии b и коэффициента автокорреляции ρ . При этом $\rho b = 0,4798$; $b = 0,7114$. Отсюда значение коэффициента автокорреляции ρ составит 0,6744 [0,4798 / 0,7114]. Характерно, что в уравнении (14) это его значение в первом десятичном знаке совпадает с коэффициентом регрессии при лаговой переменной $C^*(t - 1)$ и лишь незначительно различается во втором знаке. Можно сказать, что они совпадают с округлением до второго десятичного знака. Тем самым найдено значение коэффициента автокорреляции, не прибегая к трудоемкой процедуре Хилдрета-Лу. Оно идентифицировано как коэффициент регрессии при лаговой переменной $C^*(t - 1)$. На этом основании для проведения авторегрессионных преобразований в качестве коэффициента автокорреляции принято значение $\rho = 0,668$.

Оценка параметров уравнения регрессии по преобразованным переменным расходов на конечное потребление и ВВП выполнена в соответствии с (11а) по данным табл. 3. В процессе авторегрессионных преобразований теряется одно наблюдение. Во избежание этой потери первое преобразованное наблюдение по переменным модели потребительских расходов оценено по формуле поправки Прайса-Уинстона [3, 223]. Уравнение регрессии в оценке по преобразованным переменным потребительских расходов $C^*(t)$ и ВВП $X^*(t)$ приводится ниже:

$$\begin{aligned} C^*(t) &= 0,1151 + 0,7131X^*(t - 1) + \xi(t) \quad (15) \\ t\text{-статистика: } & 80,588 \\ DW = & 2,056 \qquad F = 6494,430 \qquad R = 0,999. \end{aligned}$$

Таблица 3. Авторегрессионные преобразования и оценка параметров модели потребительских расходов по экономике Республики Беларусь за 1991–2002 гг. в сопоставимых ценах 1990 г., млрд р. при $\rho = 0,668$

Год	$C^*(t)$	$C^*(t-1)$	$\rho C^*(t-1)$	$C^* = C^*(t) - \rho C^*(t-1)$	$X^*(t)$	$X^*(t-1)$	$\rho X^*(t-1)$	$X^* = X^*(t) - \rho X^*(t-1)$	$\hat{C}^*(t)$	$\xi(t)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1990	9,21	—	—	6,85	12,88	—	—	9,58	6,95	-0,10
1991	8,71	9,21	6,15	2,56	12,93	12,86	8,60	4,33	3,20	-0,64
1992	9,34	8,71	5,82	3,52	13,88	13,93	8,64	5,24	3,85	-0,33
1993	10,50	9,34	6,24	4,26	15,31	13,88	9,27	6,04	4,42	-0,16
1994	15,54	10,50	7,01	8,53	22,34	15,31	10,23	12,11	8,75	-0,22
1995	26,83	15,54	10,38	16,45	38,46	22,34	14,92	23,54	16,90	-0,45
1996	68,20	26,83	17,92	50,28	96,00	38,46	25,68	70,32	50,26	0,02
1997	13,71	68,20	45,56	-31,85	19,72	96,00	64,13	-44,41	-31,55	-0,30
1998	11,63	13,71	9,16	2,47	16,07	19,72	13,17	2,90	2,18	0,29
1999	11,40	11,63	7,77	3,63	15,17	16,07	10,73	4,44	3,28	0,35
2000	10,84	11,40	7,62	3,22	15,91	15,17	10,13	5,78	-1,24	-1,02
2001	11,28	10,84	7,24	4,04	13,56	15,91	10,63	2,93	2,20	1,84
2002	11,28	11,28	7,54	3,74	13,13	13,56	9,06	4,07	3,02	0,72

Источник: 1) исходные данные табл.2, графы 8, 9; 2) оценка по формуле поправки Прайса-Уинстона [3, 223].

Как видно из оценок уравнения регрессии (15), значение критерия Дарбина-Уотсона равно 2,056, что свидетельствует об отсутствии автокорреляции в остатках $\xi(t)$. В соответствии с t - и F -критериями полученные значения параметров уравнения (15) являются статистически значимыми на 5%-м уровне значимости. Отсюда можно заключить, что оценки его параметров являются несмещенными и состоятельными. На их основании с вероятностью 0,954 можно сделать вывод, что с увеличением ВВП Республики Беларусь на 1 млрд р. расходы на конечное потребление увеличиваются на 713,1 млн р.

Из оцененных значений свободных членов $a(1 - \rho) = 0,1151$ преобразованной функции (15) необходимо также найти несмещенную оценку параметра a . В преобразованной модели (15) при $\rho = 0,668$ несмещенное значение параметра a составит 0,3467 [0,1151 / 0,332]. После получения несмещенных значений параметров a и b мы можем перейти от преобразованной функции потребительских расходов к ее первоначальному виду. Искомая функция потребительских расходов с несмещенными значениями параметров приобретет следующий вид:

$$C(t) = 0,3467 + 0,7131X(t) + \xi(t). \quad (16)$$

Оценки параметров модели потребительских расходов (16) являются несмещенными, с теми же оценками надежности, что и в уравнении (15). Уравнение (16) предназначается для объяснения *причинно-следственных отношений* между доходами и расходами на конечное потребление. Так, коэффициент регрессии при $X(t)$, равный 0,7131, указывает на то, что с увеличением объема ВВП на 1 млрд р. (в сопоставимых ценах 1990 г.) расходы на конечное потребление в среднем увеличиваются на 713,1 млн р.

По уравнению (16) также могут оцениваться ожидаемые расходы на конечное потребление, обусловленные текущим спросом (объемом ВВП в текущем временном периоде).

Для оценки и идентификации параметров причинно-следственных взаимосвязей ВВП и расходов на конечное потребление с учетом влияния лаговых переменных рекомендуется использовать уравнение (14). По сравнению с уравне-

нием (16) в нем дополнительно присутствуют лаговые переменные $C^*(t - 1)$ и $X^*(t - 1)$. Тем самым уравнение (14) приобретает форму *динамической модели* потребительских расходов. В силу этого оно становится пригодным для оценки ожидаемых значений потребительских расходов.

Результативный показатель уравнения (14) представлен в преобразованной по фактору гетероскедастичности форме. Существует два варианта перехода к первоначальным единицам измерения. По первому из них обратное преобразование может быть проведено путем умножения $C^*(t)$ на σ . По второму варианту требуется преобразовать оцененное значение свободного члена уравнения (14) в соответствии с его структурой, показанной в идентификационном уравнении (9). Так как $a(1 - \rho) = 0,2479$, то при $\rho = 0,668$ значение свободного члена a составит $0,2479 / (1 - 0,668) = 0,7467$, а само уравнение (14) в записи по первоначальным значениям переменных приобретет следующий вид:

$$\hat{C}(t) = 0,7467 + 0,668C(t - 1) + 0,7114X(t) - 0,4798X(t - 1) + \xi(t). \quad (17)$$

Параметры динамической модели расходов на конечное потребление (17) в зависимости от объема ВВП оценены по исходным данным за 1990–2002 гг. Оценка ожидаемых значений расходов на конечное потребление $\hat{C}(t)$ в последующие годы может быть осуществлена по уравнению (17) путем подстановки в него ожидаемых уровней первоначальных объясняющих переменных $C(t - 1)$, $X(t)$ и $X(t - 1)$. Так, известно, что в 2003 г. по сравнению с предыдущим годом объем ВВП, т.е. $X(t)$ увеличился на 6,8 % [2, 76] и в ценах 1990 г. составил 44,536 млрд р. ($41,7 \cdot 1,068$). В результате подстановки значения объясняющей переменной $X(t) = 44,536$ и лаговых значений $C(t - 1)$, $X(t - 1)$, которые приводятся в табл. 1 (графы 2 и 3) за 2002 г., в динамическую модель (17) ожидаемая в 2003 г. оценка функции потребительских расходов составит:

$$\hat{C}(t = 2003) = 0,7467 + 0,668 \cdot 36,82 + 0,7114 \cdot 44,5356 - 0,4798 \cdot 41,35 = 36,35 \text{ млрд р.} \quad (18)$$

при относительной ошибке прогноза $\alpha = 4,58$ %.

При установленном задании прироста ВВП на 2004 г. в размере 10 % ожидаемая величина расходов на конечное потребление достигнет 38,54 млрд р. и тем самым увеличится на 6,0 %, что видно из следующего расчета:

$$\hat{C}(t = 2004) = 0,7467 + 0,668 \cdot 36,35 + 0,7114 \cdot 48,989 - 0,4798 \cdot 44,5356 = 38,54 \text{ млрд р.} \quad (19)$$

Для оценки ожидаемых значений потребительских расходов на более длительную перспективу необходимо располагать ожидаемыми значениями ВВП. Последние необходимы для построения функций потребительских расходов (14), (17) и могут быть получены с помощью модели авторегрессии ВВП, разработка которой представляет самостоятельную методологическую проблему [7, 98–109].

Литература

1. Республика Беларусь в цифрах: Крат. стат. сб. Мн., 2001.
2. Национальные счета Республики Беларусь 2003. Мн., 2003.
3. *Дугерти К.* Введение в эконометрику / Пер. с англ. В.Н. Лукаш и др.; Науч. ред. О.О. Замков. М., 1997.
4. *Браун М.* Теория и измерение технического прогресса / Пер. с англ. В.В. Зотова; Под ред. Г.Г. Пирогова. М., 1971.
5. *Савицкая А.Н.* Анализ динамики процентных ставок на денежном рынке Республики Беларусь // Бухгалт. учет и анализ. 2001. № 5.
6. *Новиков М.М.* Разработка динамической модели потребительских расходов // Весн. беларус. дзярж. ун-та. 2004. № 5.
7. *Новиков М.М.* Макроэкономические закономерности циклообразования, стабилизации и равновесного развития рыночных процессов (методология статистического моделирования и анализа). Мн., 2000.