

потребности на величину сверхнормативных запасов при превышении нормы, с тем чтобы вовлечь эту часть в товарооборот.

При расчетах спроса на региональном уровне необходимы также корректировки на изменение розничной торговой сети и численности населения в случае миграции, изменение производства товаров в регионе и некоторых других факторов, влияющих на формирование и развитие спроса.

Приведенные в статье способы расчета спроса и потребности в товарах на краткосрочную перспективу могут использоваться на любом региональном уровне, где не представляется возможным применить более сложные экономико-математические методы и получить необходимую информацию.

Д. С. Кузнецова, А. В. Кузнецов,
кандидаты физ.-мат. наук (БГИНХ)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ СПРОСА НАСЕЛЕНИЯ

Любой набор данных $\{x_t, t=1, 2, \dots, n\}$, состоящий из упорядоченных во времени измерений некоторых количественных свойств явления, можно рассматривать как временной ряд. Всякий временной ряд является отдельной выборочной реализацией порождающего его процесса $\{X_t, t=-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty\}$. Под анализом временного ряда подразумеваются оценка и восстановление по данной реализации свойств процесса, порождающего указанный ряд. Эта задача аналогична извлечению случайной выборки из генеральной совокупности и попытке оценить затем свойства генеральной совокупности по выборке. Чем больше информации будет получено при анализе временного ряда, тем полнее представление о породившем его процессе и надежнее прогноз, осуществленный с помощью его математической модели.

Временные ряды, встречающиеся в практике, бывают дискретными и непрерывными. Экономисты встречаются обычно с дискретными. В настоящее время хорошо изучены временные ряды, для которых порождающий их случайный процесс является стационарным. Одним из подходов к изучению этого процесса является его адекватное описание с помощью младших моментов распределения вероятностей (среднее значение, дисперсия, ковариационная функция, преобразование Фурье ковариационной функции — спектральная плотность, спектральная функция).

Второй подход основывается на предположении, что случайный процесс может быть адекватно описан с помощью некоторой модели, содержащей небольшое число параметров, определяемых по временному ряду. Большинство экономических рядов нестационарно. Например, экономический временной ряд, представляющий валовой национальный продукт развитой индустриальной страны, не

является стационарным рядом, так как уровень его стремится увеличиться с течением времени. Поэтому различные участки этого ряда несравнимы. Качественно стационарный ряд — это такой ряд, который находится в статистическом равновесии, в том смысле, что он не содержит никаких трендов, тогда как свойства нестационарного ряда меняются со временем. Стационарным в широком смысле рядом называют ряд, у которого первые и вторые моменты

$$M[X_t] = m; D[X_t] = M[(X_t - m)^2] = \sigma^2;$$

$$M[(X_t - m)(X_s - m)] = \mu(t - s) = \mu\tau \quad (\text{где } \tau = t - s)$$

не зависят от времени. Большинство методов исследования нестационарных рядов предполагает устранение или отфильтровывание

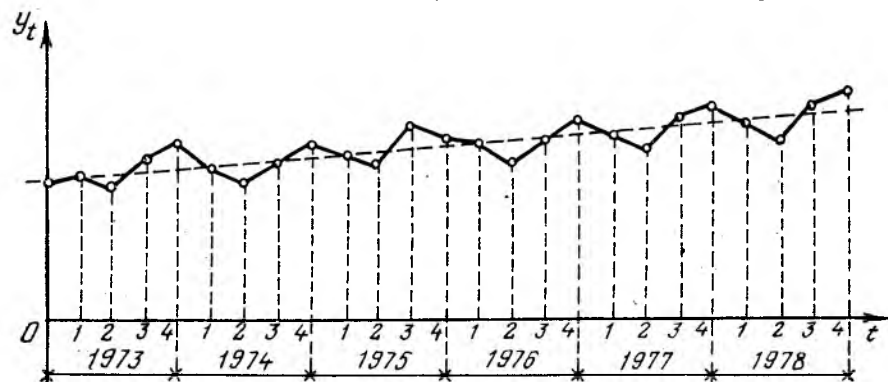


Рис. 1.

нестационарной части. После этого остается ряд, с которым можно обращаться, как со стационарным.

В настоящей работе исследуется временной ряд объема реализации изделий верхнего трикотажа в г. Минске за 1973—1978 гг. (табл. 1). Графическое изображение ряда (рис. 1) показывает, что он обнаруживает тренд (изображен штриховой линией). Методом наименьших квадратов построено уравнение тренда

$$y_t = 8,440 + 0,162t. \quad (1)$$

В графе 6 табл. 1 помещены уровни отфильтрованного с помощью уравнения (1) ряда, по которым построен его график (рис. 2).

Сопоставляя графики рис. 1 и 2, видим, что если уровни исходного временного ряда колеблются около тренда, то уровни отфильтрованного — около его среднего значения $x = 0,004$ (на рис. 2 около оси абсцисс $0t$). По данным рис. 1 и 2, отфильтрованный ряд действительно может рассматриваться как стационарный. Поэтому, обозначая через $V(t)$ нестационарный случайный процесс и порождаемый им временной ряд, можно записать, что

$$V(t) = y_t + x_t, \quad (2)$$

Табл. 1. Результаты исследования уровня поквартального спроса

Год	Квартал	Объем реализации, млн. руб.	t	Расчетные уровни	Отфильтрованный ряд $\{x_t\}$	$x_t - \bar{x}$	$(x_t - \bar{x})^2$
1973	I	8,568	1	8,602	-0,034	-0,038	0,0014
	II	7,970	2	8,764	-0,794	-0,798	0,6368
	III	9,549	3	8,926	0,623	0,619	0,3832
	IV	10,560	4	9,088	1,472	1,468	2,1550
1974	I	8,960	5	9,250	-0,290	-0,294	0,0864
	II	8,044	6	9,412	-1,368	-1,372	1,8824
	III	9,306	7	9,574	-0,268	-0,272	0,0740
	IV	10,347	8	9,736	0,611	0,607	0,3684
1975	I	9,862	9	9,898	-0,036	-0,040	0,0016
	II	9,407	10	10,060	-0,653	-0,657	0,4316
	III	11,499	11	10,222	1,277	1,273	1,6205
	VI	10,689	12	10,384	0,305	0,301	0,0906
1976	I	10,534	13	10,546	-0,012	-0,016	0,0002
	II	9,238	14	10,708	-1,470	-1,474	2,1727
	III	10,724	15	10,870	-0,146	-0,150	0,0225
	IV	11,831	16	11,032	0,799	0,795	0,6320
1977	I	11,082	17	11,194	-0,112	-0,116	0,0134
	II	10,111	18	11,356	-1,245	-1,249	1,5600
	III	11,959	19	11,518	0,441	0,437	0,1909
	IV	12,633	20	11,680	0,953	0,949	0,9006
1978	I	11,724	21	11,842	-0,118	-0,122	0,0149
	II	10,688	22	12,004	-1,316	-1,320	1,7424
	III	12,632	23	12,166	0,466	0,462	0,2134
	IV	13,334	24	12,328	1,006	1,002	1,0040

т. е. представить нестационарный процесс в виде суммы тренда y_t и его стационарной составляющей x_t . По данным табл. 1 найдена дисперсия отфильтрованного ряда $\sigma^2 = 0,675$.

Если ряд $\{x_t\}$ чисто случайный, то соседние значения будут независимы, т. е. на значение величины x_t не влияют значения величин x_{t-1}, x_{t-2}, \dots В общем случае значения временного ряда, расположенные по соседству, коррелированы. Поэтому при стационарном в широком смысле случайном ряде, кроме среднего значения x и дисперсии σ^2 , необходимо найти его автоковариационную функцию

$$\gamma(k) = M[(X(t) - \bar{x})(X(t+k) - \bar{x})],$$

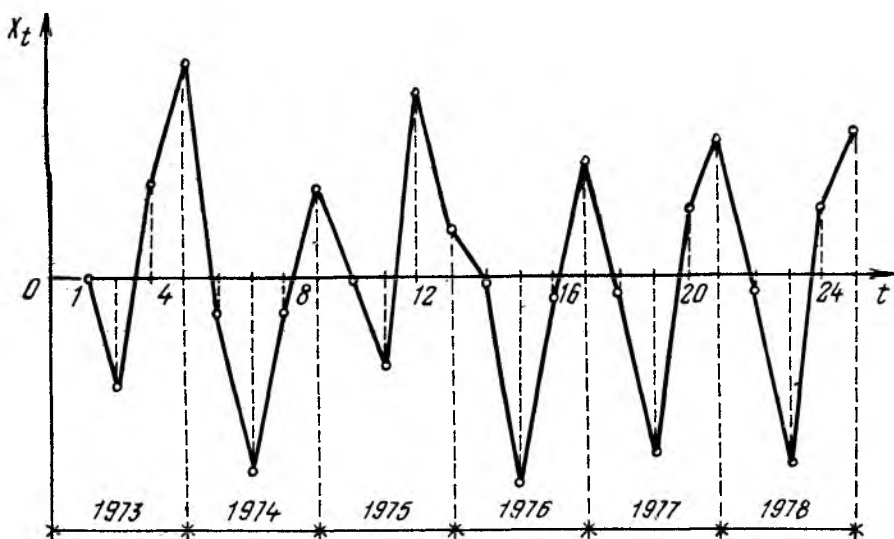


Рис. 2.

характеризующую степень коррелированности членов ряда в зависимости от запаздывания k . На практике $\gamma(k)$ может быть оценена с помощью функции

$$c(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3)$$

называемой выборочной автоковариационной функцией временного ряда. Иногда удобно для сравнения рядов с разными масштаба-

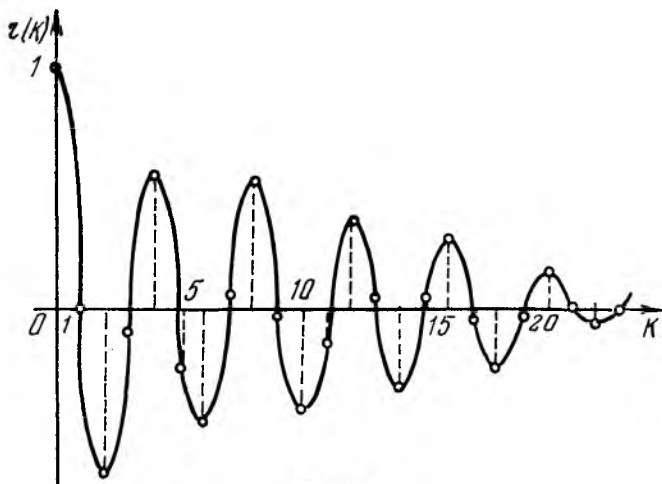


Рис. 3.

ми измерений нормировать $c(k)$ с помощью деления на дисперсию $\sigma^2 = c(0)$. Таким образом, определяется выборочная автокорреляционная функция

$$r(k) = c(k)/c(0). \quad (4)$$

В табл. 2 помещены значения выборочной автокорреляционной функции, найденные по формулам (3) и (4) для отфильтрованного ряда $\{x_t\}$. На рис. 3 изображен график этой функции. Для большей наглядности точки $[k; r(k)]$ соединены плавной кривой.

Табл. 2. Значения выборочной автокорреляционной функции

к	$r(k)$	к	$r(k)$	к	$r(k)$	к	$r(k)$
0	1	6	-0,489	12	0,384	18	-0,265
1	0,007	7	0,056	13	0,059	19	-0,022
2	-0,698	8	0,533	14	-0,333	20	0,175
3	-0,104	9	-0,022	15	0,027	21	0,018
4	0,551	10	-0,427	16	0,308	22	-0,050
5	-0,265	11	-0,130	17	-0,025	23	-0,001

Из табл. 2 и рис. 3 видно, что корреляции меняют знак. Это отражает реальное положение: за повышенным спросом на изделия верхнего трикотажа (служащие потребителю длительное время) в одном квартале следует, как правило, пониженный спрос — в другом. С математической точки зрения, изменение знака корреляции является следствием одной из причин: либо соседние значения корреляционной функции коррелируют между собой, либо процесс является периодическим.

Для того чтобы проверить, что соседние значения являются некоррелированными (слабо коррелируют), т. е. временной ряд чисто случайный, поступают следующим образом. Вычисляют среднее квадратическое отклонение σ выборочной одиночной оценки одиночного значения корреляционной функции $\sigma_b = 1/\sqrt{n} = 1/\sqrt{24} = 0,204$. 95-процентные доверительные границы для одиночной корреляции $r(k)$ приблизительно равны: $\pm 0,204 \cdot 1,96$ или $-0,399$ и $+0,399$.

Легко подсчитать, что пять (при $k=2, 4, 6, 8, 10$) из 24 доверительных интервалов не накрывают нуля. Исходя из доверительного уровня, следовало бы ожидать: 5% от 24 доверительных интервалов (один или два) не накроют нуля. Это свидетельствует о том, что соседние значения ряда коррелируют между собой. Но график корреляционной функции (см. рис. 3) — затухающая синусоида — говорит о том, что корреляция в основном возникает за счет периодичности. Итак, исследование автокорреляционной функции показало: временной ряд (а значит, и порождающий его про-

цесс) обладает свойством периодичности, а потому может быть аппроксимирован многочленом Фурье:

$$x_t = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t). \quad (5)$$

Слагаемое $a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$ в (5) называют k -й гармоникой; a_0, a_k, b_k — коэффициентами Фурье; $\omega_k = 2\pi k/p$, где p — число отрезков времени в анализируемом периоде (в нашем случае рассматривается шестилетний период, состоящий из 24 кварталов, поэтому $p=24$); m — число гармоник, равное $[p/2]$ (в нашем случае $[p/2]=12$).

Коэффициенты Фурье определяют способом наименьших квадратов. Их оценками служат

$$a_0 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i; \quad (6)$$

$$a_k = \frac{2}{p} \sum_{i=1}^p x_i \cos \left(\frac{2\pi}{p} kt \right); \quad (7)$$

$$b_k = \frac{2}{p} \sum_{i=1}^p x_i \sin \left(\frac{2\pi}{p} kt \right). \quad (8)$$

$$\text{При четном } p \ a_{p/2} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i \cos(\pi t), \ b_{p/2} = 0.$$

Но прежде чем переходить к определению параметров a_0, a_k и b_k модели (5), следует изучить спектральные (частотные) свойства рассматриваемого нами временного ряда, способные дать дополнительную информацию об изучаемом процессе, которую нельзя получить иным путем. С этой целью рассмотрим преобразование Фурье оценки (3) автоковариационной функции $\gamma(k)$, которое называют спектральной плотностью или просто спектром процесса $X(t)$. Спектральная плотность обладает всеми свойствами плотности распределения вероятности. Процесс вполне определяется, если известна его спектральная плотность. Для дискретного временного ряда оценкой спектральной плотности является функция

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[c(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} c(j) \cos j\omega \right]; \quad (0 \leq \omega \leq \pi), \quad (9)$$

где $c(0) = \sigma^2$; $c(j)$ находится по формуле (3); ω — угловая частота, равная $2\pi/n$ (где n — число уровней временного ряда). Значения функции (9) вычисляются в точках $\omega_i = 2\pi i/n$ ($i=0, 1, 2, \dots, n/2$). Построенный по таким точкам график функции $f(\omega)$ для рассматриваемого (отфильтрованного) временного ряда изображен на рис. 4. График имеет в точке $\pi/2$ ярко выраженный пик и в точках $\pi/4$ и π еще два размытых побочных пика.

Определим, какому временному периоду соответствует указанный пик. Поскольку исследуются ежеквартальные данные, годовая частота равна $2\pi/4$, следовательно, $\omega_j = 2\pi_j/24 = 2\pi/4$. Отсюда $j=6$. Значит, годовая компонента будет лежать в точке $\omega_6 = 2\pi \cdot 6/24 = \pi/2$, период (цикл) рассматриваемого процесса равен 1 году. Для подтверждения достоверности сделанного вывода определяют так называемую статистическую значимость пика. Пик считают статистически значимым, если по соседству с ним на частотах, кратных его частоте, имеются размытые пики. Как видно из рис. 4, в нашем случае такие размытые пики как раз находятся в точках $\pi/4$ и π .

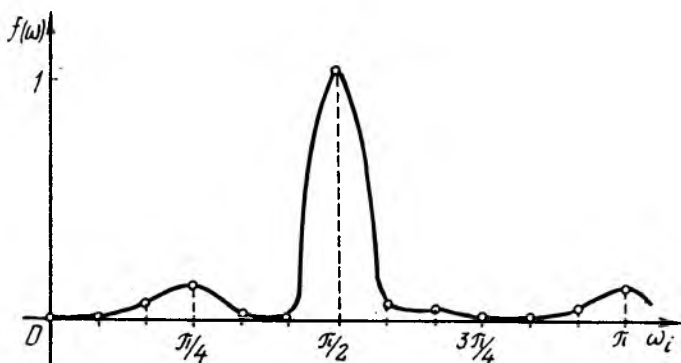


Рис. 4.

Спектральная плотность $f(\omega)$ временного ряда показывает, как его дисперсия σ_x^2 распределена по частотам ω . Вклад в дисперсию частотной полосы $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ вычисляется по формуле $\Delta F(\omega) = F(\omega_2) - F(\omega_1)$. При этом $F(\omega)$ и $f(\omega)$ связаны соотношением $f(\omega) = dF(\omega)/d\omega$, откуда

$$dF(\omega) = f(\omega) \cdot d\omega. \quad (10)$$

$F(\omega)$ называется спектральной функцией распределения или интегральным спектром процесса X_t . По формуле (10) определим вклад важнейших частотных полос в суммарную дисперсию процесса. Так как $f(\omega)$ имеет пик в точке $\omega = \pi/2$, частотная полоса $[\pi/2 - \Delta\omega; \pi/2 + \Delta\omega]$ с центром в этой точке вносит наибольший вклад dF в суммарную дисперсию: он равен $\Delta F(\pi/2) \approx dF(\pi/2) = f(\pi/2) \cdot \Delta\omega$. При $\Delta\omega = \pi/6$ получаем $dF(\pi/2) = 0,529$. Таким образом, рассматриваемая частотная полоса вносит $0,529/0,675 = 0,784$, т. е. 78,4%, в суммарную дисперсию. Аналогично находим вклады в суммарную дисперсию частотных полос с центрами в точках $\pi/4$ и π : соответственно 9,51 и 9,8%, так что общий вклад указанных частотных полос составляет 97,7%. Выполненные расчеты позволяют сделать вывод о том, что из 12 гармоник гармоники с номерами $k=3,6$ и 12 вносят наибольший вклад в суммарную дисперсию процесса. Поэтому в модель (5) целесообразно включить только эти три гармоники.

Вычисляя по формулам (6) — (8) коэффициенты Фурье для указанных гармоник, получаем в соответствии с (5) следующую модель стационарной составляющей процесса:

$$x_t = 0,004 + (-0,147 \cos \pi/12 \cdot 3t - 0,075 \sin \pi/12 \times \\ \times 3t) + (0,999 \cos \pi/12 \cdot 6t - 0,249 \sin \pi/12 \cdot 6t) + \\ + (-0,145 \cos \pi/12 \cdot 12t + 0). \quad (11)$$

В соответствии с (2) модель исходного временного ряда с учетом (1) и (11) примет следующий вид:

$$Y(t) = 8,444 + 0,162t + (-0,147 \cos \pi/12 \cdot 3t - \\ - 0,075 \sin \pi/12 \cdot 3t) + (0,999 \cos \pi/12 \cdot 6t - \\ - 0,249 \sin \pi/12 \cdot 6t) + (-0,145 \cos \pi/12 \cdot 12t). \quad (12)$$

Математические модели временных рядов используются для исследования экономических явлений, и в частности для решения таких важных задач, как оптимизация и прогнозирование процессов. Так, желая разработать прогноз объема реализации верхнего трикотажа на 1979 г., нужно в формуле (12) последовательно положить $t = 25, 26, 27$ и 28 . Тогда для 25-го (I квартала 1979 г.) получим 12,233 млн. руб.; 26-го (II квартала 1979 г.) — 11,437; 27-го (III квартала 1979 г.) — 13,263 и для 28-го (IV квартала 1979 г.) — 13,981 млн. руб.

Л и т е р а т у р а

1. Кобринский Н. Е. Информационные фильтры в экономике.— М., 1978.
2. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения.— М., 1971, вып. 1. 3. Гренджер К., Хатинака М. Спектральный анализ временных рядов в экономике.— М., 1972. 4. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление.— М., 1974, вып. 1.

Л. А. Кондратова, асп. (БГИНХ)

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ХОЗЯЙСТВЕННОГО МЕХАНИЗМА В ГОСУДАРСТВЕННОЙ ТОРГОВЛЕ

Повышение социально-экономической эффективности торговли неразрывно связано с дальнейшим укреплением и совершенствованием хозяйственного расчета как основного метода социалистического хозяйства в условиях товарно-денежных отношений. Возросшие масштабы производства, научно-технический прогресс, постоянный рост потребностей населения предъявляют все более высокие требования к управлению торговлей. Совершенствование управления предусматривает широкое использование экономических рычагов. Поэтому в современных условиях, когда экономические методы управления становятся все более преобладающими, развитие хозяйственного расчета приобретает особую актуальность.