БЕЛОРУССКИЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2026. № 1. С. 113–135.
Belarusian Economic Journal. 2026. No 1. PP. 113–135

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ФИНАНСОВЫМИ АКТИВАМИ

М.П. Дымков, С.М. Дымков, Е.В. Братковский, С.П. Макаревич*

Аннотация. В данной работе представлены варианты приложения теории оптимального управления к задачам экономического содержания. В частности, рассмотрены математические модели задач о рациональном использовании финансовых активов и способов финансирования своих инвестиций за счет сочетания нераспределенной прибыли и внешнего капитала. Для решения этих задач предлагается применить принцип максимума Понтрягина, разработанный в теории оптимизации для динамических систем управления. В контексте финансовых операций обсуждается экономический смысл гамильтониана и сопряженных переменных, с помощью которых определяется оптимальное решение. Приведено решение иллюстративных примеров и дано их графическое представление. Обсуждаются варианты обобщения моделей при различных ограничениях на финансовые операции.

Ключевые слова: финансовые активы, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, сопряженные переменные и их экономический смысл.

JEL-классификация: G17.

DOI: 10.46782/1818-4510-2026-1-21-39

Материал поступил 26.11.2025 г.

Введение. В данной работе описывается один из возможных вариантов приложения теории оптимального управления к задачам экономического содержания. В частности, задача рационального использования финансовых активов представляется в виде задачи оптимального управления для линейной динамической системы. Такой подход широко используется при математическом моделировании процессов различной природы (Габасов, Кириллова, 1974; Галеев, Тихомиров, 2000; Dymkou, Dymkov, 2014; Дыхта, Самсонюк, 2003). В области финансов важным является вопрос о принятии решений относительно инвестиционной и дивидендной политики, а также способов ее финансирования на определенный период. К таким способам финансирования относится решение о выпуске акций, удержание прибыли, заимствование и т. д. Такие ситуации можно также моделировать как задачи оптимального управления (Смоляк, 2004; Elton, Gruber, 1975). Некоторые из этих моделей достаточно просты и тем не менее дают полезную информацию для анализа и последующего планирования.

В этой работе мы рассмотрим задачи управления остатком денежных средств и оптимального финансирования своих инвестиций за счет рационального сочетания нераспределенной прибыли и внешнего капитала, причем в разных пропорциях, которые могут изменяться с течением времени. Первая задача в простейшем виде

* **Дымков Михаил Пахомович** (dymkov_m@bseu.by), доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный экономический университет (г. Минск, Беларусь); https://orcid.org/0000-0002-3467-2169;
Дымков Сергей Михайлович (dymkous@gmail.com), Центр аналитических решений, МТБанк (г. Минск, Беларусь);
Братковский Евгений Викторович (bratkovsky.evgeny@yandex.com), Астон софт, Braiora LLCV (г. Минск, Беларусь);
Макаревич Светлана Петровна (svetamak0607@gmail.com), Белорусский государственный экономический университет (г. Минск, Беларусь)

Для цитирования: Дымков М.П., Дымков С.М., Братковский Е.В., Макаревич С.П. 2026. Математические модели управления финансовыми активами. *Белорусский экономический журнал*. № 1. С. 21–39. DOI: 10.46782/1818-4510-2026-1-21-39

представляет собой проблему контроля уровня остатка денежных средств компании для удовлетворения спроса на денежные средства при минимальных общих издержках. Вторая важная проблема в финансах заключается в определении оптимальной схемы выплаты дивидендов и выпуска новых акций с течением времени для максимизации общей стоимости финансовых активов. В отличие от формулировки оптимизационных задач в дискретном времени (Смоляк, 2004; Elton, Gruber, 1975), в работе представлены непрерывные задачи оптимизации функционалов качества терминального и других типов с естественными ограничениями на управляющие воздействия и переменные состояния. Представляют также особый интерес финансовые интерпретации различных функций, таких как гамильтониан системы и сопряжённые функции, возникающие в ходе построения математических моделей и их анализа.

I. **Модель задачи баланса финансовых средств**. Рассмотрим фирму с известным спросом на денежные средства. Для обеспечения этого спроса фирма должна иметь соответствующий запас наличных средств. С одной стороны, если фирма будет держать слишком большой запас наличных денег, она будет терять деньги с точки зрения упущенной выгоды, поскольку фирма может получить более высокую прибыль, покупая надежные активы, например, акции, облигации и т. п. С другой стороны, если фирма имеет слишком малый запас наличности, то она вынуждена продавать ценные бумаги для обеспечения спроса на наличные и, следовательно, должна платить комиссионные брокеру и нести убытки.

Таким образом, задача состоит в нахождении баланса между спросом на наличные деньги и рациональном владении другими активами.

1. **Постановка задачи.** Для каждого момента времени t, $t \in [0, T]$ пусть $x(t)$ обозначает остаток наличных денег (в долларах) на момент t, $y(t)$ – объем других активов, $d(t)$ – интенсивность (или мгновенная скорость) спроса на наличные деньги, $r_1(t)$ – процентная ставка, начисленная на остаток денежных средств, $r_2(t)$ – процентная ставка, начисленная на остаток ценных бумаг, $u(t)$ – темп (интенсивность или скорость) продаж ценных бумаг, причем отрицательное значение интенсивности продаж означает покупку, при этом предполагаем, что покупка или продажа ценных бумаг происходит мгновенно. Обозначим через α – комиссионное вознаграждение брокеру (например, за 1 доллар стоимости проданных или купленных ценных бумаг), T – горизонт планирования. Будем предполагать, что мгновенная скорость изменения наличных денег и ценных бумаг описывается следующими уравнениями (Krousem, 1973; Sethi, Thompson, 1970):

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = r_1(t)x(t) - d(t) + u(t) - \alpha \cdot |u(t)|, \\
&\frac{dy}{dt} = r_2(t)y(t) - u(t), y(0) = y_0, x(0) = x_0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Предполагается, что в качестве управления рассматривается функция $u(t)$, удовлетворяющая ограничениям:

$$
-U_1 \le u(t) \le U_2 \,. \tag{2}
$$

Отметим, что отрицательное значение $u(t) < 0$ означает факт покупки финансовых средств, положительные значения $u(t) > 0$ – продажу своих активов. Поэтому в (1) слагаемое $\alpha \cdot |u(t)|$ отражает факт проведения транзакции (неважно какой).

Задача оптимизации заключается в нахождении управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, такого, что функционал качества вида

$$J(u) = x(T) + y(T) \to \max \tag{3}$$

достигает максимума на решениях системы уравнений (1) при заданных ограничениях (2) на управление.

Оптимальную стратегию продаж и покупок ценных бумаг определим в соответствии с принципом максимума Понтрягина (Габасов, Кириллова, 1974; Дыхта, Самсонюк, 2003), выбирая $u(t)$ так, чтобы максимизировать гамильтониан системы управления

$$H(x, y, \psi, u, t) = \psi_1(r_1 x - d + u - \alpha|u|) + \psi_2(r_2 y - u) . \tag{4}$$

Здесь сопряженные переменные $\psi_1(t), \psi_2(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y, \psi, u, t)}{\partial x} = -\psi_1 r_1(t), \quad \psi_1(T) = 1, \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} &= -\frac{\partial H(x, y, \psi, u, t)}{\partial y} = -\psi_2 r_2(t), \quad \psi_2(T) = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Интерпретация сопряженных переменных и гамильтониана системы. Сопряженные переменные $\psi_1(t), \psi_2(t)$ имеют примерно такой же смысл, как и двойственные переменные в линейном (и нелинейном) программировании. Разница в том, что здесь сопряженные переменные зависят от времени и удовлетворяют специальным дифференциальным уравнениям, построенным по параметрам исходной задачи. Сопряженные переменные имеют естественную интерпретацию: $\psi_1(t)$ – это будущая стоимость (в момент времени t) 1 доллара, хранящегося на денежном счете с момента t до T, а $\psi_2(t)$ – это будущая стоимость 1 доллара, вложенного в ценные бумаги и хранящегося на счете с момента t до T. Другими словами, $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ – это предельная стоимость единицы капитала в момент времени t, которую также называют теневой ценой единицы капитала в момент времени t. В частности, $\psi(0) = (\psi_1(0), \psi_2(0))$ есть предельная скорость изменения максимального значения целевой функции по отношению к изменению начального основного капитала $(x(0), y(0))$. Отметим также, что гамильтониан $H(x, y, \psi, u, t)$ можно интерпретировать как суммарную (от прямых и непрямых вложений) норму прибыли, которая должна быть максимизирована в каждый момент времени t. Тогда уравнения (5) для сопряженных переменных превращаются в соотношения равновесия – предельные издержки равны предельной выручке, что коррелирует с подобными понятиями в экономической литературе. Таким образом, сопряженные переменные имеют естественную интерпретацию – как актуарные оценки конкурентных инвестиций в каждый момент времени.

Решение задачи. В данной работе нахождение оптимальной стратегии продаж и покупок ценных бумаг основано на применении принципа максимума Понтрягина. Согласно этому принципу требуется найти функцию $u^0(t), t \in [0, T]$ так, чтобы гамильтониан системы, вычисленный для переменных состояния $x^0(t)$ и сопряженных переменных $\psi^0(t)$, найденных из уравнений (1) и (5) при заданном управлении $u(t) = u^0(t), t \in [0, T]$, соответственно, достигал максимума $H(x^0, y^0, \psi^0, u^0, t) = \max\limits_v H(x^0, y^0, \psi^0, v, t)$ при ограничениях $-U_1 \le v \le U_2$.

Нетрудно видеть, что решением уравнений (5) являются функции

$$\psi_1(t) = e^{\int_t^T r_1(\tau) d\tau}, \qquad \psi_2(t) = e^{\int_t^T r_2(\tau) d\tau} \tag{6}$$

Для удобства выполнения вычислений в (4), связанных с абсолютной величиной $|u|$, представим переменную управления как разность двух новых неотрицательных переменных:

$$u = u_1 - u_2, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \text{ при условии, что } u_1 u_2 = 0. \tag{7}$$

Тогда $|u| = u_1 + u_2$ и следовательно нелинейная функция $|u|$ представляется как линейная с дополнительным квадратичным ограничением $u_1 u_2 = 0$. Другими словами, $u = u_1$, если $u > 0$ и $u = u_2$, если $u < 0$. Заметим, что квадратичное ограничение $u_1 u_2 = 0$ автоматически выполняется для оптимальной стратегии, так как фирма никогда не покупает и не продает одновременно одни и те же ценные бумаги. Таким образом, задачу максимизации нелинейной функции (4) по переменной $|u|$ можно свести к более простой задаче максимизации линейной функции по переменным u_1 и u_2. В соответствии с проведенной заменой переменных управления гамильтониан (4) после преобразований примет вид:

$$\begin{aligned} H(x,y,\psi,u,t) &= \psi_1(r_1 x - d + u - \alpha|u|) + \psi_2(r_2 y - u) = \\ &= u_1[(1-\alpha)\psi_1 - \psi_2] - u_2[(1+\alpha)\psi_1 - \psi_2] + \psi_1(r_1 x - d) + \psi_2 r_2 y. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, задача максимизация гамильтониана $H(x,y,\psi,u,t)$ по переменной u сводится к поиску максимума линейной функции

$$V = u_1[(1-\alpha)\psi_1 - \psi_2] - u_2[(1+\alpha)\psi_1 - \psi_2]$$

по двум переменным u_1, u_2 при ограничениях (2) и (7). В итоге, как нетрудно видеть, решение задачи оптимизации имеет вид $u^0 = u_1^0 - u_2^0$, где

$$u_1^0(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } (1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) < 0, \\ \otimes, \text{ если } (1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) = 0, \\ U_1, \text{если } (1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) > 0. \end{cases} \quad u_2^0(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } -(1+\alpha)\psi_1(t) + \psi_2(t) < 0, \\ \otimes, \text{ если } -(1+\alpha)\psi_1(t) + \psi_2(t) = 0, \\ U_2, \text{если } -(1+\alpha)\psi_1(t) + \psi_2(t) > 0. \end{cases} \tag{9}$$

Другими словами, решение, представленное в (9), описывает оптимальную стратегию поведения фирмы. Так как $u_1(t)$ с учетом наших обозначений означает курс продажи ценных бумаг, то (9) говорит, что если $(1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) > 0$, т. е. если будущая стоимость доллара за вычетом комиссии брокера больше, чем будущая стоимость ценных бумаг в долларах на каком-то промежутке времени, то оптимальным на этом промежутке времени является продажа финансов с максимальной интенсивностью, и не продавать их на этом промежутке времени, если эти будущие значения удовлетворяют обратным неравенствам $(1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) < 0$. Случай, когда выполняется равенство $(1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) = 0$, называют особым и при этом поведение $\otimes$ фирмы не определено. Фактически это означает индифферентность как к продаже, так и к покупке. Нетрудно убедиться, что рассматриваемый особый случай не может поддерживаться ни на каком конечном промежутке времени. Аналогично, $u_2(t)$ представляет собой приобретение ценных бумаг. Тогда мы покупаем, не покупаем или нейтральны на некотором промежутке времени в зависимости от знака выражения $-(1+\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t)$, т. е. если будущая стоимость доллара плюс комиссия брокера меньше чем, больше чем или равна будущей стоимость ценных бумаг, соответственно.

Отметим, что если $(1-\alpha)\psi_1(t) \geq \psi_2(t)$, то $(1+\alpha)\psi_1(t) > \psi_2(t)$. Тогда, так как $u_1(t) > 0$, то как следует из (7) имеем $u_2(t) = 0$. Аналогично, если $(1+\alpha)\psi_1(t) \leq \psi_2(t)$, то $(1-\alpha)\psi_1(t) < \psi_2(t)$. Тогда, если $u_2(t) > 0$, то из (7) следует $u_1(t) = 0$. Другим словами, при оптимальной стратегии квадратичное ограничение $u_1 u_2 = 0$ в (7) всегда выполняется.

На рис.1 изображено оптимальная стратегия поведения фирмы с течением времени t, $t \in [0,T]$ в зависимости от поведения сопряженных переменных $\psi_1(t), \psi_2(t)$. Первая четверть координатной плоскости разбивается на три области в зависимости от предпринимаемых действий (продавать или покупать активы), включая и случай, когда не следует принимать никаких действий. Две прямые представляют линию особого управления. На этом рисунке изображен условный пример возможного поведения траектории сопряженных переменных $\psi_1(t), \psi_2(t)$. Согласно этой траектории, имеется один период времени продажи, два периода покупки и три периода сохранения активов фирмы.

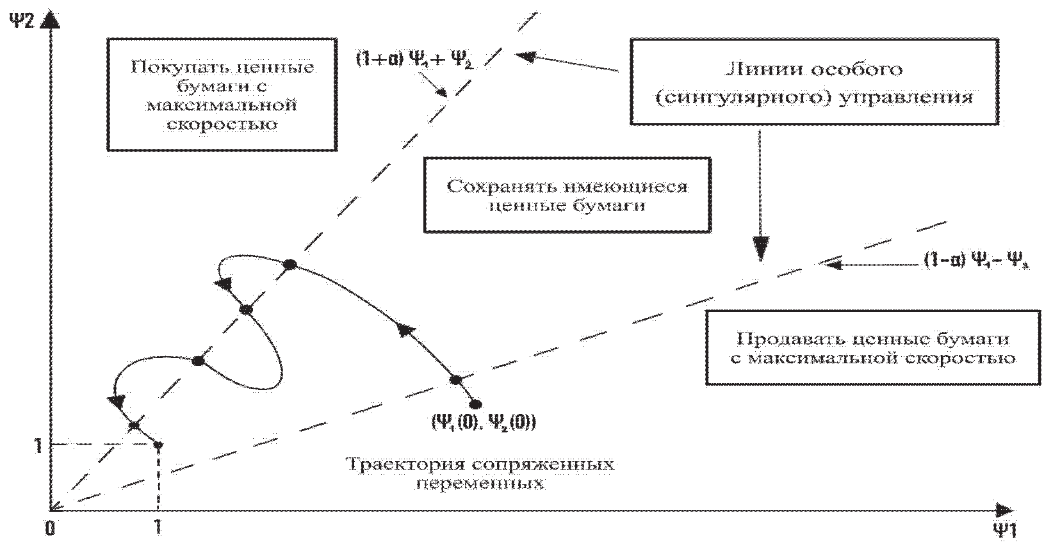

Рис.1. Оптимальная стратегия фирмы в зависимости от поведения сопряженных переменных $\psi_1(t), \psi_2(t)$

Источник. Авторская разработка.

Еще один наглядный способ графического отображения оптимальной стратегии управления активами с течением времени приведен на рис.2 в координатах вида (t,θ), где $\theta(t) = \dfrac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}$.

Пример 1. Для иллюстрации изложенной модели рассмотрим пример с условными числовыми характеристиками. Пусть

$$r_1(t) = 0.5,\ r_2(t) = 0.4,\ d(t) = 2,\ x_0 = y_0 = 15,\ U_1 = U_2 = 5,\ \alpha = 0.01,\ T = 1.$$

Найдем функции $\psi_1(t),\ \psi_2(t), t \in [0,1]$ необходимые для построения оптимального управления по формуле (9) и его представления в виде графика, представленного на рис.2. Тогда из (6) имеем

$$\psi_1(t) = e^{\int_t^T r_1(\tau)d\tau} = e^{\int_t^1 0.5d\tau} = e^{0.5-0.5t},\quad \psi_2(t) = e^{\int_t^T r_2(\tau)d\tau} = e^{0.4-0.4t}, \theta(t) = \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = e^{0.1t-0.1}.$$

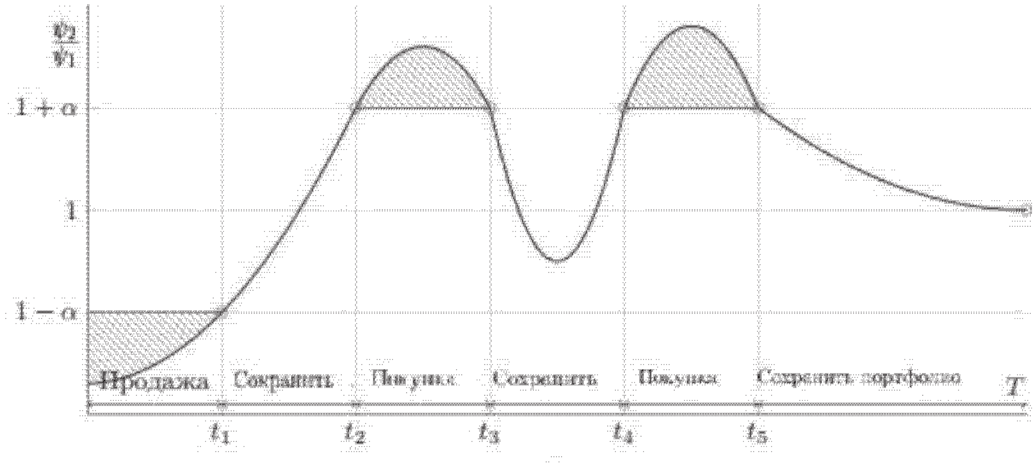

Рис. 2. Оптимальная стратегия фирмы в координатах вида $(t, \frac{\psi_2}{\psi_1})$

Источник. Авторская разработка.

Функция $\theta(t)$ возрастающая, причем $\theta(0) = e^{-0.1} \approx 0.9$, $\theta(1) = e^0 = 1$. Далее, график функции $\theta(t)$ не пересекает на отрезке $t \in [0,1]$ прямую $y = 1+\alpha$, а прямую $y = 1-\alpha$, т. е. прямую $y = 0.99$ пересекает при $t^* \approx 0.9$. Как следует из (9), оптимальное управление имеет вид

$$u_1^0(t) = \begin{Bmatrix} 5, & t \in [0, 0.9] \\ 0, & t \in (0.9, 1] \end{Bmatrix}, \; u_2^0(t) = 0, \; t \in [0,1], \; u^0(t) = u_1^0(t) - u_2^0(t) = \begin{Bmatrix} 5, & t \in [0, 0.9] \\ 0, & t \in (0.9, 1] \end{Bmatrix}.$$

Определим теперь оптимальное значение критерия качества $J(u^0) = x^0(1) + y^0(1)$. Для этого подсчитаем движение наличных денег, решая первое дифференциальное уравнение из (1) с учетом найденного оптимального управления. Заметим, что все последующие вычисления проводятся с некоторой точностью, что в контексте данной работы не является существенным.

На промежутке времени $t \in [0, 0.9]$ имеем уравнение $\frac{dx}{dt} = 0.5x(t) - 2 + 5 - 0.05$ или $\frac{dx}{dt} = 0.5x(t) + 2.95,\; x(0) = 15,$ решением которого является функция $x^0(t) = -5.9 + 20.9e^{0.5t}$ и, следовательно, $x^0(0.9) \approx 26.88.$ Далее, на промежутке $t \in [0.9, 1]$ имеем уравнение $\frac{dx}{dt} = 0.5x(t) - 2,\; x(0.9) = 26.88,$ решением которого есть функция $x^0(t) = 4 + 14.59e^{0.5t}$ и, значит, $x^0(1) \approx 28.05.$

Теперь оценим объем $y(t)$ ценных бумаг. На промежутке $t \in [0, 0.9]$ осуществлялась продажа ценных бумаг с максимальной интенсивностью и, следовательно, динамика изменения описывается уравнением $\frac{dy}{dt} = 0.4y(t) - 5,\; y(0) = 15,$ решением которого является функция $y^0(t) = 12{,}5 + 2.5e^{0.4t}$ и, значит, $y^0(0.9) \approx 16.08.$ На промежутке $t \in [0.9, 1]$ имеем уравнение $\frac{dy}{dt} = 0.4y(t),\; y(0.9) = 16.08,$ решением которого есть функция $y^0(t) = 11.22e^{0.4t}$ и, значит, $y^0(1) \approx 16.74.$

Таким образом, значение критерия качества на оптимальном управлении равно $J(u^0) = x^0(1) + y^0(1) \approx 28.05 + 16.74 = 44.79$.

Проанализируем, какой будет ситуация в случае пассивного поведения, т. е. если бы операции «купли-продажи» ценных бумаг не проводились. Тогда на интервале $t \in [0,1]$ наличные деньги расходовались бы лишь на удовлетворение текущего спроса, а на их остаток начислялись бы проценты, что в совокупности описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = 0.5x(t) - 2,\ x(0) = 15$. Нетрудно проверить, что решением этого уравнения является функция $\hat{x}(t) = 4 + 11e^{0.5t}$ и, значит, $\hat{x}(1) \approx 22.13$. Аналогично, оценим объем ценных бумаг на интервале $t \in [0,1]$. Тогда имеем уравнение $\frac{dy}{dt} = 0.4y(t),\ y(0) = 15$ и $\hat{y}(t) = 15e^{0.4t}$. Следовательно, $\hat{y}(1) \approx 22.37$ и суммарный капитал в конце горизонта планирования равен $\hat{x}(1) + \hat{y}(1) \approx 22.13 + 22.37 = 44.50$.

Итак, сравнивая полученные результаты, получаем, что при использовании оптимальной стратегии суммарный капитал в конце горизонта планирования увеличился по сравнению с пассивным поведением на величину $\Delta K = 44.79 - 44.50 = 0.29$.

Пример 2. Рассмотрим пример, когда темпы роста процентных ставок зависят от времени. Пусть, например, заданы следующие условия:

$$r_1(t) = \frac{1}{2}t,\ r_2(t) = \frac{1}{3},\ d(t) = 1,\ x_0 = y_0 = 2,\ U_1 = U_2 = 5,\ \alpha = 0.01,\ T = 1.$$

Проводя вычисления по аналогии с примером 1, получим:

$$\psi_1(t) = e^{\int_t^T r_1(\tau)d\tau} = e^{\frac{1}{4}(1-t^2)},\quad \psi_2(t) = e^{\int_t^T r_2(\tau)d\tau} = e^{\frac{1}{3}(1-t)}, \theta(t) = \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} = e^{\frac{1}{12}(3t^2-4t+1)}.$$

Функция $\theta(t)$ убывает на промежутке $t \in [0, 2/3]$ и возрастает на $t \in [2/3, 1]$, при этом $\theta(0) = e^{1/12} \approx 1.09,\ \theta(2/3) = e^{-1/36} \approx 0.97,\ \theta(1) = e^0 = 1.$ На отрезке $t \in [0,1]$ график функции $\theta(t)$ пересекает прямую $y = 1 + \alpha = 1.01$ при $t_1^* \approx 0.2782$, а прямую $y = 1 - \alpha = 0.99$ при $\breve{t}_1 \approx 0.4$ и $\breve{t}_2 \approx 0.933$. Эскиз графика представлен на рис. 3.

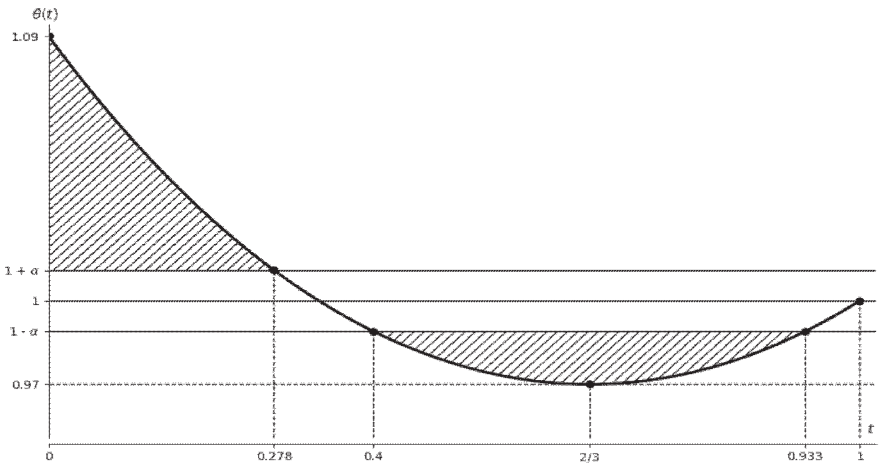

Рис. 3. Оптимальная стратегия для переменной процентной ставки

Источник. Авторская разработка.

Как следует из (9), оптимальные режимы покупки и продаж активов задаются функциями:

$$u_1^0(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,0.4]\cup(0.933,1]\\ 5, & t\in(0.4,0.933]\end{cases},\ u_2^0(t)=\begin{cases}5, t\in[0,0.278,\\ 0, \ \ t\in(0.278,1]\end{cases}.$$

Следовательно, оптимальная стратегия управления финансами имеет вид:

$$u^0(t)=u_1^0(t)-u_2^0(t)=\begin{cases}-5, & t\in[0,0.288\\ 0, & t\in(0.278,0.4]\cup(0.933,1]\\ 5, & t\in(0.4,0.933]\end{cases}.$$

Проведем оценку изменения ценных бумаг $y(t)$ фирмы. На промежутке $t\in[0,0.278]$ осуществлялась покупка активов. Следовательно, имеем уравнение $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}y(t)+5,\ y(0)=2,$ решением которого является функция $y(t)=-15+17e^{\frac{t}{3}}$. Тогда $y(0.278)\approx3.6519$. Далее, на промежутке $t\in[0.278,0.4]$ активы не покупались и не продавались и, следовательно, их изменение описывается уравнением $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}y(t),\ y(0.278)=3.6519,$ решение которого есть функция $y(t)=3.3285\cdot e^{\frac{t}{3}}$ и $y(0.4)\approx3.8032$. На очередном промежутке $t\in[0.4,0.933]$ активы продавались и, следовательно, имеем уравнение $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}y(t)-5,\ y(0.4)=3.8032$, решением которого является функция $y(t)=15-9.8\cdot e^{\frac{t}{3}}$ и $y(0.933)\approx1.6263$. На последнем промежутке $t\in[0.933,1]$ активы не продавались и не покупались и, следовательно, имеем уравнение $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}y(t),\ y(0.933)=1.6263$ и его решение $y(t)=1.1916\cdot e^{\frac{t}{3}}$. Значит, в конце горизонта планирования имеем активы на сумму $y(1)\approx1.663$.

Заметим, что если на всем промежутке $t\in[0,1]$ никаких операций с ценными бумагами не проводилось, то тогда из уравнения $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{3}y(t),\ y(0)=2$ получаем $y(t)=2\cdot e^{\frac{t}{3}}$ и $y(1)\approx2.7912$. Это означает, что доходы от ценных бумаг уменьшились на величину 2.7912–1.663=1.1282. Ожидается, что это уменьшение компенсируется ростом доходов от наличных денег.

Теперь оценим движение наличных денег. Если операции купли-продажи ценных бумаг на промежутке времени $t\in[0,1]$ не проводились, то наличные использовались лишь для удовлетворения спроса на них и описываются уравнением $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2}x(t)-1,\ x(0)=2,$ решение которого можно представить в виде $x(t)=(2-\int_0^t e^{-\tau^2/4}d\tau)e^{t^2/4}=(2-F(t))e^{t^2/4}$, где $F(t)=\int_0^t e^{-\tau^2/4}d\tau$. Для вычисления значений «неберущегося» в элементарных функциях интеграла $F(t)$ воспользуемся стандартной функцией Лапласа $\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-x^2/2}dx$. Можно показать, что $F(t)=\sqrt{\pi}\ \Phi(t/\sqrt{2})$. Следовательно, решение рассматриваемого дифференциального уравнения удобно представить в виде $x(t)=(2-\sqrt{\pi}\ \Phi(t/\sqrt{2})e^{t^2/4}$. Отсюда получаем, что при обязательном удовлетворении текущего спроса и пассивном управлении ценными бумагами наличность в конце горизонта планирования равна $x(1)=(2-\sqrt{\pi}\,\Phi(1/\sqrt{2})e^{1/4}\approx 1.3823$.

Таким образом, при пассивном управлении суммарный капитал в конце горизонта планирования равен $x(1)+y(1)=1.3823+2.7912=4.1735$.

Проведем оценку наличности с учетом найденной оптимальной стратегии управления финансами. Для $t\in[0,0.278]$ имеем уравнение $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}x(t)-6.05,\ x(0)=2,$ решением которого является функция $x(t)=(2-6.05\sqrt{\pi}\,\Phi(t/\sqrt{2})e^{t^2/4}$ и, следовательно,

$x(0.278)=(2-6.05\sqrt{\pi}\,\Phi(0.278/\sqrt{2})e^{0.078/4}\approx 0.355$.

На промежутке $t\in[0.278,0.4]$ операций с ценными бумагами не проводили и, следовательно, имеем уравнение $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}x(t)-1,\ x(0.278)=0.355,$ решение которого есть $x(t)=(0.6969-\sqrt{\pi}\,\Phi(t/\sqrt{2})e^{t^2/4}$ и $x(0.4)=(0.6969-\sqrt{\pi}\,\Phi(0.4/\sqrt{2})e^{0.04}\approx 0.31$.

В период $t\in[0.4,0.933]$ осуществлялась продажа ценных бумаг и поэтому имеем

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}x(t)+3.95,\ x(0.4)=0.31,$ для которого решением является функция $x(t)=(3.95\sqrt{\pi}\,\Phi(t/\sqrt{2}-1.2775)e^{t^2/4}$ и $x(0.933)=(2.95\sqrt{\pi}\,\Phi(0.933/\sqrt{2}-1.2775)e^{0.216}\approx 2.6766$.

На последнем интервале $t\in[0.933,1]$ операции с ценными бумагами не проводились и поэтому имеем $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}x(t)-1,\ x(0.933)=2.6766,\ x(t)=(3.0217-\sqrt{\pi}\,\Phi(t/\sqrt{2})e^{t^2/4}$. Отсюда получаем $x(1)=(3.0217-\sqrt{\pi}\,\Phi(1/\sqrt{2})e^{0.25}\approx 2.6964$.

Таким образом, суммарный капитал при оптимальной стратегии равен

$x^0(1)+y^0(1)=2.6964+1.663=4.3594$, что увеличило его на 4.3594 – 4.1732 = 0.1858, или на 4.5% по сравнению с пассивной стратегией.

II. **Обобщенная модель баланса финансовых средств с запретом овердрафта и коротких продаж.** Дополним рассмотренную выше модель (1) – (3) условием, что существует запрет на проведение коротких продаж и овердрафта. Это предположение требует введения в математическую модель дополнительных ограничений о неотрицательности переменных состояния: $x(t)\ge 0,\ y(t)\ge 0,\ t\in[0,T]$. Для решения этой задачи также применим принцип максимума Понтрягина. При этом следует учесть, что присутствие дополнительных фазовых ограничений $x(t)\ge 0, y(t)\ge 0, t\in[0,T]$ ведет к усложнению решения задачи. Для формулировки принципа максимума введем функцию Лагранжа в виде (Дыхта, Самсонюк, 2003):

$$L(x,y,\psi,\eta,u,t)=H(x,y,\psi,u,t)+\eta_1(r_1x-d+u-\alpha|u|)+\eta_2(r_2y-u)\,. \tag{10}$$

Здесь сопряженные переменные $\psi_1(t),\psi_2(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial x}=-(\psi_1+\eta_1)r_1,\quad \frac{d\psi_2(t)}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial y}=-(\psi_2+\eta_2)r_2, \tag{11}$$

а также условиям трансверсальности и скачка

$$\psi_1(T-0)\ge 1,\ \ (\psi_1(T)-1)\,x(T)=0;\quad \psi_2(T-0)\ge 1,\ \ (\psi_2(T)-1)\,y(T)=0 \tag{12}$$

Множители Лагранжа $\eta_1(t),\ \eta_2(t)$ в свою очередь удовлетворяют уравнению $\dfrac{\partial L}{\partial u}=0$ и условиям дополняющей нежесткости

$$\eta_1(t) \geq 0,\ \eta_1(t)x(t) = 0,\ \eta_1(t)[r_1 x(t) - d(t) + u(t) - \alpha\,|\,u(t)\,|] = 0;$$
$$\eta_2(t) \geq 0,\ \eta_2(t)y(t) = 0,\ \eta_2(t)[r_2 y(t) - u(t) - \alpha\,|\,u(t)\,|] = 0. \tag{13}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина для того, чтобы функция $u^0(t), t \in [0,T]$ была оптимальным решением в данной задаче необходимо найти сопряженные переменные и множители Лагранжа такие, что

$$H(x^0, y^0, \psi, u^0, t) \geq H(x^0, y^0, \psi, v, t) \text{ для всех } -U_1 \leq v \leq U_2, \tag{14}$$

где $x^0(t), y^0(t), \psi(t), \eta(t), t \in [0,T]$ определены из соотношений (1), (11) – (13) при заданном управлении $u(t) = u^0(t), t \in [0,T]$, соответственно.

Отметим, что присутствие фазовых ограничений $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, t \in [0,T]$ влечет к существованию, вообще говоря, разрывных решений для сопряженных переменных, что требует изучения соответствующих скачков траектории и рассмотрения так называемых импульсных (игольчатых) функций. Аналитическое решение таких задач в общем случае весьма громоздко и не приводится в данной работе.

III. **Модель финансирования инвестиций.** Рассмотрим задачу о финансировании фирмой своих инвестиций за счет рационального сочетания нераспределенной прибыли и внешнего собственного капитала (Krouse, 1973; Sethi, Thompson, 1970). Будем предполагать, что использование заемных средств в качестве источника финансирования не допустимо.

Введем следующие переменные: $y(t)$ – стоимость активов или инвестированного капитала компании; $x(t)$ – интенсивность (скорость) дохода (в тыс. рублей) в момент времени t, $t \in [0,T]$; $u(t)$ – внешнее или новое финансирование за счет собственных средств, выраженное в кратном отношении к текущей прибыли $u(t) \geq 0$; $v(t)$ – нераспределенная доля текущей прибыли, т. е. $1 - v(t)$ представляет долю для выплаты дивидендов, $0 \leq v(t) \leq 1$; $1 - c$ – некоторая константа, характеризующая стоимость размещения внешнего капитала, выраженная в долях от текущего дохода, $0 \leq c \leq 1$ (т. е. эта константа характеризует транзакционные издержки (бонусы и др.) из-за возможной флуктуации стоимости при проведении сделок с внешним капиталом); r – фактическая норма прибыли (предполагается постоянной) на инвестированный капитал фирмы; ρ – постоянная ставка дисконтирования, известная как требуемая акционерами норма прибыли, $r > \rho$; g – верхняя граница темпов роста активов фирмы; T – горизонт планирования.

С учетом введенных обозначений имеем, что текущий доход фирмы равен $x(t) = ry(t)$. Скорость роста стоимости инвестированного капитала $y(t)$ определяется как сумма привлеченного внешнего капитала (с учетом флуктуации сделки) и собственного капитала $\frac{dy}{dt} = cux + vx$. Тогда, учитывая предыдущее равенство, имеем следующее дифференциальное уравнение для текущего дохода $\frac{dx}{dt} = r\frac{dy}{dt} = r(cu + v)x, x(0) = x_0$. С учетом заданного ограничения g на верхнюю границу темпов $\frac{y'}{y}$ роста активов $y(t)$ приходим к соотношениям

$\frac{y'}{y} = \frac{(cu+v)x}{\frac{x}{r}} = r(cu+v) \le g$, или $cu + v \le \frac{g}{r}$, где переменные управления удовлетворяют ограничениям $u \ge 0,\ 0 \le v \le 1$.

Цель фирмы состоит в максимизации ее прибыли, которая равна текущей стоимости будущих дивидендов, начисляемых на активы, находящиеся в обращении в момент $t = 0$. Часть этих дивидендов будет направляться на новый акционерный капитал, который будет получать доходность, равную ставке дисконтирования ρ. Следовательно , она равна $\int_0^T u(t)x(t)e^{-\rho t}dt$ текущей стоимости внешнего капитала, привлеченного с течением времени t. Отметим, что интеграл $\int_0^T (1-v(t))x(t)e^{-\rho t}dt$ представляет собой текущую стоимость всех дивидендов, выплаченных фирмой. Таким образом, чистая текущая стоимость всех будущих дивидендов, которые начисляются на первоначальные акции, представляется как разность $\int_0^T (1-v(t)-u(t))x(t)e^{-\rho t}dt$. Полученный целевой функционал можно расширять, например, включением ликвидационных или других выплат.

Таким образом, задача оптимального управления свелась к нахождению функций $u(t), v(t)$, $t \in [0,T]$, которые доставляют максимум функционалу

$$J = \int_0^T e^{-\rho t}(1-u(t)-v(t))x(t)dt \to \max_{u,v} \tag{15}$$

на решениях дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(cu(t)+v(t))x(t),\ x(0) = x_0 \tag{16}$$

при ограничениях на управление

$$cu(t)+v(t) \le \frac{g}{r},\ u(t) \ge 0,\quad 0 \le v(t) \le 1,\ t \in [0,T]. \tag{17}$$

Для нахождения оптимальной стратегии фирмы финансирования своих инвестиций применим принцип максимума Понтрягина.

Сформулированная задача оптимального управления (15) – (17) является билинейной задачей с двумя управляющими параметрами $u(t), v(t),\ t \in [0,T]$. Классические функции Гамильтона и Лагранжа (Галеев, Тихомиров, 2000; Дыхта, Самсонюк, 2003) для этой задачи имеют вид

$$\tilde{H}(x,\tilde{\psi},u,v,t) = e^{-\rho t}(1-v-u)x + \tilde{\psi}r(cu+v)x,$$

$$\tilde{L}(x,\tilde{\psi},\tilde{\mu},u,v,t) = \tilde{H}(x,\tilde{\psi},u,v,t) - \tilde{\mu}(r(cu+v)-g), \tag{18}$$

соответственно. Здесь сопряженная переменная $\tilde{\psi}(t), t \in [0,T]$ и множители Лагранжа $\tilde{\mu}(t), t \in [0,T]$, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt} = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x},\ \tilde{\psi}(T) = 0,\ \tilde{\mu}(t) \ge 0, \tilde{\mu}(t)(g - r(cu+v)) = 0. \tag{19}$$

Для того, чтобы упростить выражения для сопряженных переменных $\tilde{\psi}(t), t \in [0,T]$ и множителей Лагранжа $\tilde{\mu}(t), t \in [0,T]$, избавимся от дисконтирующего множителя $e^{-\rho t}(t) > 0, t \in [0,T]$. Для этого введем новые сопряженные переменные и множители Лагранжа по формулам: $\psi(t)=e^{\rho t}\tilde{\psi}(t), \mu(t)=e^{\rho t}\tilde{\mu}(t), t\in[0,T]$. Тогда функции Гамильтона и Лагранжа можно представить в виде

$$H(x,\psi,u,v,t)=e^{\rho t}\tilde{H}(x,\tilde{\psi},u,v,t), L(x,\psi,\mu,u,v,t)=e^{\rho t}\tilde{L}(x,\tilde{\psi},\tilde{\mu},u,v,t). \quad (20)$$

Так как $e^{\rho t}(t)>0, t\in[0,T]$, то максимизация гамильтониана $\tilde{H}(x,\psi,u,v,t)$, что предполагает принцип максимума Понтрягина, эквивалента максимизации упрощенной функции $H(x,\psi,u,v,t)$. С учетом проведенной замены переменных, имеем уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=\rho e^{\rho t}\tilde{\psi}(t)+e^{\rho t}\frac{d\tilde{\psi}(t)}{dt}=\rho\psi(t)-\frac{\partial L}{\partial x}, \psi(T)=0 .$$

В итоге, в задаче оптимального управления (15) – (17) гамильтониан можно определить по упрощенной формуле

$$H(x,\psi,u,v,t)=(1-v-u)x+\psi r(cu+v)x , \quad (21)$$

где сопряженная переменная $\psi(t), t\in[0,T]$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi(t)}{dt}=\rho\psi(t)-(1-v(t)-u(t))-\psi(t)r(cu(t)+v(t)), \quad (22)$$

удовлетворяющей условию трансверсальности

$$\psi(T)=0. \quad (23)$$

Как уже отмечалось выше, гамильтониан $H(x,\psi,u,v,t)$ в (21) можно интерпретировать как суммарную (от прямых и непрямых вложений) норму прибыли, которая должна быть максимизирована в каждый момент времени t. При этом сопряженную переменную $\psi(t), t\in[0,T]$ трактуют как предельную стоимость изменения прибыли на единицу в момент времени t. Рассмотрим этот вопрос более детально. В частности, величина $(cu(t)+v(t))x(t)$ означает дополнительные инвестиции в момент времени t, а величина $\psi(t)r$ есть предельная стоимость единичных (паевых) инвестиций в момент времени t. Тогда произведение $\psi(t)r(cu(t)+v(t))x(t)$ есть стоимость для акционеров дополнительных инвестиций, измеренная с точки зрения упущенных дивидендов в момент времени t.

Уравнению (22) для сопряженной переменной $\psi(t)$ также можно придать экономический смысл. Если фирма делает дополнительные инвестиции в размере $\psi(t), t\in[0,T]$ (что дает доход в один доллар), то $\rho\psi(t)$ есть ожидаемая доходность от этих инвестиций. В состоянии равновесия эта величина должна быть равна приросту капитала $\frac{d\psi(t)}{dt}$, плюс немедленные дивиденды $(1-v(t))$ за вычетом выплат внешним акционерам $u(t)$, плюс стоимость дополнительных доходов $\psi(t)r(cu(t)+v(t))$.

Таким образом, согласно принципу максимума Понтрягина, если функции $u^0(t), v^0(t), t\in[0,T]$ являются оптимальным решением задачи (15) – (17), то они в каждый момент времени t максимизируют гамильтониан системы $H(x^0,\psi,u,v,t)$ на множестве $u\ge 0, 0\le v\le 1$.

Для удобства определения оптимальной политики инвестирования преобразуем гамильтониан к виду

$$H(x,\psi,u,t)=[M_1u(t)+M_2v(t)]x(t), \text{ где } M_1(\psi)=\psi(t)rc-1, M_2(\psi)=\psi(t)r-1. \quad (24)$$

Отметим, что множитель $x(t)$ вынесен за скобки, так что оптимальные управления не зависят от этой переменной. Так как гамильтониан линеен относительно обеих переменных управления, то оптимальная политика инвестирования будет некоторой комбинацией релейных и сингулярных управлений, что определяется путем решения в каждый момент времени t следующей параметрической задачи линейного программирования вида:

$$M_1(\psi)u + M_2(\psi)v \to \max_{u,v} \qquad \text{при ограничениях} \qquad cu + v \le \frac{g}{r}, u \ge 0, 0 \le v \le 1. \qquad (25)$$

Нетрудно видеть, что ограничение $v \le 1$ становится излишним, если $\frac{g}{r} < 1$. Следовательно, возможны два случая: вариант (A), когда $g \le r$, и вариант (B), когда $g > r$. Каждый из этих случаев приводит к задаче линейного программирования вида (25), которая может быть решена графически. Легко видеть, что множество допустимых решений в (25) представляет собой многоугольник на координатной плоскости двух переменных u, v. Учитывая исходное предположение $0 \le c \le 1$, можно произвести анализ возможных комбинаций параметров билинейной задачи максимизации (25) и найти ее оптимальное решение в каждой из этих комбинаций. Эти комбинации и соответствующие оптимальные решения находятся из графического анализа множества допустимых решений в (25) и поведения на нем градиента целевой функции. Полученные решения приведены ниже для каждого случая A (т. е. когда $g \le r$) и случая B (когда $g > r$) отдельно.

Случай A ($g \le r$):

I. Если $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) < 0$, тогда $u^0(t) = 0, v^0(t) = 0$;

II. Если $M_1(\psi) < cM_2(\psi), M_2(\psi) > 0$, тогда $u^0(t) = 0, v^0(t) = \frac{g}{r}$;

III. Если $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) = 0$, тогда $u^0(t) = 0, 0 \le v^0(t) \le \min\{1, \frac{q}{r}\}$.

Случай B ($g > r$):

I. Если $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) < 0$, тогда $u^0(t) = 0, v^0(t) = 0$;

II. Если $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) = 0$, тогда $u^0(t) = 0, 0 \le v^0(t) \le \min\{1, \frac{q}{r}\}$;

III. Если $0 < M_1(\psi) < cM_2(\psi)$, тогда $u^0(t) = \frac{g-r}{rc}, v^0(t) = 1$;

IV. Если $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) > 0$, тогда $u^0(t) = 0, v^0(t) = 1$;

V. Если $M_1(\psi) = 0, M_2(\psi) > 0$, тогда $0 \le u^0(t) \le \frac{g-r}{rc}, v^0(t) = 1$.

Этот перечень оптимальных режимов для каждой из приведенных выше комбинаций дает возможность синтезировать (с учетом начальных условий) последовательность принятия оптимальных решений в течение рассматриваемого промежутка времени. Заметим, что так как согласно предположениям $c \le 1$, то из (24) следует, что $M_1 \le cM_2$, что в некоторых из описанных выше случаях упрощает анализ.

Синтез оптимальных управлений обычно осуществляется с использованием так называемого попятного движения (Fel'dbaum, 1965; Krouse, 1973). Другими словами, рассматриваются траектории системы управления с «обратным временем». Для этого в рассматриваемых дифференциальных уравнениях введем новую переменную обратного времени формулой $\tau = T - t$. Тогда для любой дифференцируемой функции $y = y(t)$ производная по новой временной переменной имеет вид $\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} = -\dot{y}$. Для того чтобы различать производные по «обратному времени», введем для нее обозначение $\overset{*}{y} = \frac{dy}{d\tau}$ так, что $\overset{*}{y} = -\dot{y}$. Тогда дифференциальные уравнения в обратном времени для сопряженных переменных и состояния получаются из (16) и (22) заменой производных $\dot{y}$ на $\overset{*}{y}$ и знака в правой части. Заметим, что условия трансверсальности для сопряженной дают начальные условия в обратном времени $\psi(t = T) = \psi(\tau = 0) = 0$. Начальные же условия для переменной состояния в обратном времени зададим параметрически $x(t = T) = x(\tau = 0) = \beta$, где параметр β подлежит определению. Таким образом, уравнения (16) и (22) в обратном времени имеют вид

$$\overset{*}{x} = -r(cu + v)x, x(0) = \beta, \ \overset{*}{\psi} = (1 - v - u) - \psi[\rho - r(cu + v)], \quad \psi(0) = 0. \qquad (26)$$

Эти уравнения позволяют осуществить синтез оптимальной стратегии инвестирования для каждой из описанных комбинаций режимов для случаев А и В. Подробное изложение всех случаев и комбинаций весьма объемно. Поэтому в качестве иллюстрации процедуры синтеза оптимальной стратегии рассмотрим некоторые комбинации для случая В.

Отметим, что так как $g > r$, то ограничение $v < 1$ для случая В существенно. В момент времени $t = T$ (или в обратном времени при $\tau = 0$) имеем $\psi(0) = 0$. Тогда из (19) имеем $M_1(0) = M_2(0) = -1 < 0$ и, следовательно, пришли к комбинации $M_1(\psi) = \psi(t)rc - 1 < 0, M_2(\psi) = \psi(t)r - 1 < 0.$ Тогда согласно пункту I из вышеприведенного перечня имеем $u^0(t) = 0, v^0(t) = 0$, что приводит к следующим уравнениям для определения переменных состояния и сопряженной переменной: $\overset{*}{x} = 0, x(0) = \beta$, $\overset{*}{\psi} = 1 - \rho\psi$, $\psi(0) = 0$. Легко видеть, что решение этих уравнений имеет вид:

$$x(\tau) = \beta, \psi(\tau) = \frac{1}{\rho}(1 - e^{-\rho\tau}). \qquad (27)$$

Так как по предположению $0 < c < 1$, и если $M_2 = \psi r - 1 < 0$, то можно видеть, что тогда $M_1 = c\psi r - 1 < 0$ также. Следовательно, чтобы оставаться в этом подслучае при росте времени t, функция $M_2(\tau)$ должна оставаться отрицательной в течение некоторого промежутка времени с ростом τ. Однако, из (27) имеем $\lim\limits_{\tau\to\infty} \psi(\tau) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\rho}(1 - e^{-\rho\tau}) = \frac{1}{\rho}$, и следовательно $\lim\limits_{\tau\to\infty} M_2(\tau) = \lim\limits_{\tau\to\infty}(\psi(\tau)r - 1) = \frac{r}{\rho} - 1$. Так как по предположению $r > \rho$, то существует момент τ_1 такой, что $M_2(\tau_1) = (1 - e^{-\rho\tau_1})\frac{r}{\rho} - 1 = 0.$ Можно проверить, что $\tau_1 = \frac{1}{\rho}\ln\frac{r}{r - \rho}$. Таким образом, имеем вариант II (см. вышеприведенную таблицу вариантов для случая В), когда $M_1(\psi) < 0, M_2(\psi) = 0$ и для которого оптимальное управление имеет вид $u^0(t) = 0, 0 \le v^0(t) \le \min\{1, \frac{q}{r}\}$. Это означает, что оптимальное управление $0 \le v^0(t) \le \min\{1, \frac{q}{r}\}$ особое (сингулярное), т. е. согласно принципу максимума Понтрягина нахождение максимума гамильтониана $H(x^0, y^0, \psi, u, v, t)$ не дает конкретного (единственного) значения управления $0 \le v^0(t) \le \min\{1, \frac{q}{r}\}$. Так как по условию $r > \rho$, то можно показать, что рассматриваемый сингулярный случай II не может поддерживаться ни на каком конечном промежутке времени.

Далее, так как $r>\rho$, то нетрудно проверить что $\dot{\psi}(\tau_1)=(r-\dfrac{\rho}{r})>0$ в рассматриваемом случае. Отсюда следует, что функция $M_2(\tau)$ возрастающая и, следовательно, $M_2(\tau_1+0)>0$.

Это означает, что в момент $\tau=\tau_1$ происходит переключение режима управления от варианта II к комбинации IV: $M_1=cr\psi-1<0, M_2=r\psi-1>0$, где оптимальные управления имеют вид $u^0(t)=0, v^0(t)=1$. С учетом предыдущего, дифференциальные уравнения для переменной состояния и сопряженной переменной имеют вид: $\dot{x}=-rx(t), x(\tau_1)=\beta$, $\dot{\psi}=\psi(r-\rho)$, $\psi(\tau_1)=\dfrac{1}{r}$. Отсюда следует, что прибыль растет экспоненциально со скоростью r, а функция $\psi(\tau)$ возрастает со скоростью $(r-\rho)$, когда τ растет, начиная с момента $\tau=\tau_1$. Легко видеть, что сопряженная переменная имеет вид $\psi(\tau)=\dfrac{1}{r}e^{(r-\rho)(\tau-\tau_1)}$, $\tau\geq\tau_1$. С возрастанием $\psi(\tau)$, функция M_1 также возрастает и, следовательно, ее значение достигает нуля в некоторый момент $\tau=\tau_2: M_1(\tau_2)=cr\psi(\tau_2)-1=ce^{(r-\rho)(\tau_2-\tau_1)}-1=0$. Отсюда получаем $\tau_2=\tau_1+\dfrac{1}{r-\rho}\ln\dfrac{1}{c}$.

Таким образом, в момент $\tau=\tau_2$ фирма переключается в новый режим V, когда $M_1(\psi)=0, M_2(\psi)>0$, а оптимальное управление имеет вид $0\leq u^0(t)\leq\dfrac{g-r}{rc}, v^0(t)=1$. Управление $u^0(t)$ является сингулярным. Для сохранения этой сингулярности на каком-то ненулевом конечном промежутке времени необходимо требовать, чтобы функция $M_1(\tau)=0$ на этом промежутке. Это означает, что $\dot{M}_1(\tau)=0$, что в свою очередь влечет $\dot{\psi}(\tau)=0$. Для определения функции $\dot{\psi}(\tau)$ надо оптимальные управления этого варианта подставить в уравнение (21). Тогда имеем

$$\dot{\psi}=-u^0-\psi[\rho-r(cu^0+1)]. \tag{28}$$

Так как $M_1(\tau)=0$, то $\psi(\tau)=\dfrac{1}{rc}$. Подставив полученное в дифференциальное уравнение (28) и приравняв его правую часть к нулю, получим $\rho=r$, что противоречит сделанному исходному предположению $\rho<r$. Отметим, что нет смысла осуществлять инвестиции, если норма прибыли на инвестированный капитал фирмы меньше ставки дисконтирования $\rho>r$.

Таким образом, обеспечить сингулярность оптимального управления на ненулевом промежутке времени невозможно и, следовательно, фирма не может находиться в режиме V в течение сколь угодно малого промежутка времени. Так как $\rho<r$, то из (23) получаем $\dot{\psi}(\tau_2)=\dfrac{r-\rho}{rc}>0$. Это означает, что функция $\psi(\tau)$ монотонно возрастающая и, следовательно, функция $M_1(\tau)$ также возрастающая.

Таким образом, в момент времени τ_2 система переключается в новый режим III, где $0<M_1(\psi)<cM_2(\psi)$ и оптимальное управление имеет вид $u^0(t)=\dfrac{g-r}{rc}, v^0(t)=1$. Соответствующие дифференциальные уравнения для переменных состояния и сопряженной имеют вид:

$$\dot{x}=-gx,\quad \dot{\psi}=-\frac{g-r}{rc}+\psi(g-\rho). \tag{29}$$

Так как $\dot{\psi}(\tau_2) = \dfrac{r-\rho}{rc} > 0$, то функция $\psi(\tau)$ возрастающая. Более того, так как для изучаемого случая B выполняются условия $\rho < r, g > r, \rho < g$, то из (29) следует, что $\dot{\psi}(\tau) > 0$ непрерывно возрастающая функция на всем промежутке. Таким образом, система продолжает функционировать в этом режиме на всем оставшемся промежутке времени.

Для графической иллюстрации (рис. 4) определим полученное решение в ключевых точках переключения режимов и в конце горизонта $t = T$. В начальный момент $t = 0$ объем наличных денег составлял велечину $x(0) = x_0$. На первом промежутке времени $t \in [0, \tau_1]$ система находилась в режиме III, используя при этом для инвестирования долевое финансирование и свои доходы. Тогда из первого дифференциального уравнения в (29) получаем решение $x(t) = x_0 e^{gt}$, $t \in [0, \tau_1]$ и к моменту переключения в момент $t = T - \tau_2$ объем капитала составляет величину $x(T-\tau_2) = x_0 e^{g(T-\tau_2)}$. После первого переключения система на втором промежутке времени $t \in [\tau_2, \tau_1]$ переходит в новый режим IV, когда для финансирования используются лишь свои доходы и нет внешнего долевого финансирования. На этом промежутке времени дифференциальные уравнения состояния имеют вид $\dot{x} = -rx(t), x(T-\tau_2) = x_0 e^{g(T-\tau_2)}$. Решением этого уравнения является функция вида $x(t) = x_0 e^{(T-\tau_2)(g-r)+rt}$, $t \in [\tau_2, \tau_1]$ и к моменту второго переключения при $t = T - \tau_1$ объем капитала составляет величину $x(T-\tau_1) = x_0 e^{g(T-\tau_2)+r(\tau_2-\tau_1)}$. На последнем промежутке времени система переходит в режим I, когда внешнее долевое финансирование не привлекается и все свои доходы используются не для финансирования, а для выплаты дивидендов. Этот режим приводит к следующему уравнению для определения состояния $\dot{x} = 0, x(T-\tau_1) = x_0 e^{g(T-\tau_2)+r(\tau_2-\tau_1)}, t \in [T-\tau_1, T]$. Легко видеть, что решение этого уравнения есть постоянная величина, которая равна искомому параметру $\beta = x_0 e^{g(T-\tau_2)+r(\tau_2-\tau_1)}$.

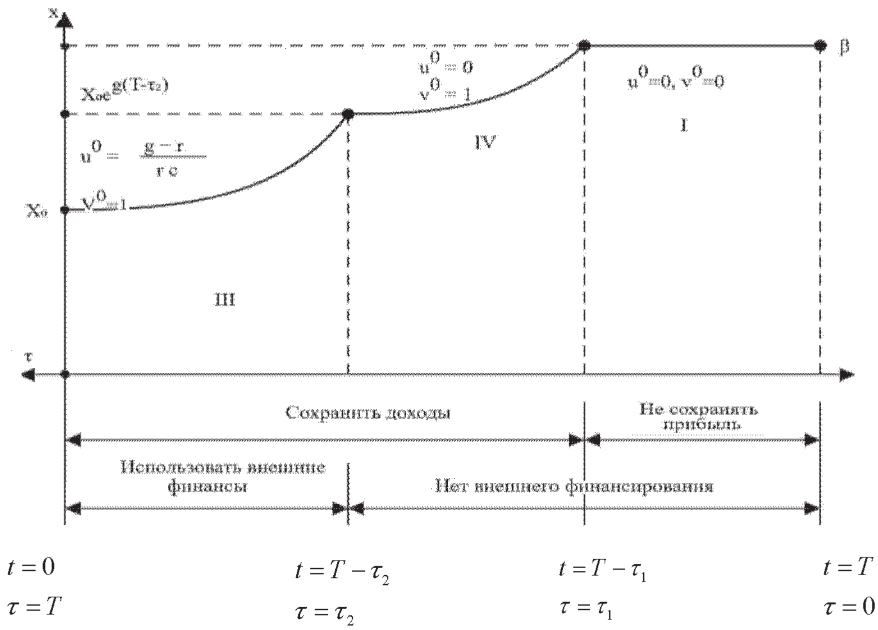

Рис.4. Оптимальная стратегия инвестирования для случая B

Источник. Авторская разработка.

Существенность присутствия двух моментов переключения для случая В имеет свою экономическую интерпретацию. Если τ_1 есть оставшееся время до горизонта T, то фирме безразлично, инвестировать из своей прибыли или выплачивать ими дивиденды. Интуитивно понятно, что внешний акционерный капитал как источник финансирования инвестиций дороже нераспределенной прибыли, так как внешнее финансирование требует большего времени для его окупаемости. Таким образом, величина $\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{r-\rho}\ln\frac{1}{c}$ представляет собой время, необходимое для компенсации стоимости размещения внешнего капитала. Для доказательства этого предположим, что фирма выпускает акции на сумму в 1 денежную единицу (1 доллар) в момент времени $t = T - \tau_2$. Хотя стоимость этой эмиссии составляет один доллар, приобретаемый капитал составляет c долларов из-за стоимости размещения $1 - c$. Так как мы пытаемся найти время безубыточности для внешнего акционерного капитала, то очевидно, что сохранение всей прибыли для инвестиций остается по-прежнему выгодным. Значит, дивиденды с момента $t = T - \tau_2$ до момента $t = T - \tau_1$ отсутствуют и прибыль фирмы растет с темпом r. Следовательно, приведенная стоимость за время $\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{r-\rho}\ln\frac{1}{c}$ этих инвестиций, сделанных в момент $t = T - \tau_2$, определяется формулой $ce^{(r-\rho)(\tau_2-\tau_1)} = ce^{\ln\frac{1}{c}} = 1$. Последнее равенство показывает, что один доллар внешнего капитала в момент $t = T - \tau_2$, который для фирмы принес c долларов капитала, эквивалентен одному доллару инвестирования в момент $t = T - \tau_1$. Но фирме безразлично, инвестировать или не инвестировать нераспределенную прибыль без издержек в момент времени $t = T - \tau_1$. В итоге, фирме безразлично, выпускать акции на сумму в один доллар в момент времени $t = T - \tau_2$, или нет. До момента $t = T - \tau_2$ выгодно выпускать акции в максимальном объеме насколько это возможно. После этого момента выпуск акций становится невыгодным.

Замечание. Отметим, что анализ случая А осуществляется по такой же схеме, как и случай В. Однако в отличие от В здесь имеется лишь один момент переключения режимов.

*   *   *

Предположение о мгновенной продаже или покупке ценных бумаг носит в некотором смысле условный характер. Один из возможных вариантов моделирования такой ситуации заключается в расширении класса допустимых управлений за счет введения так называемых импульсных (взрывных) функций (Дыхта, Самсонюк, 2003). К сожалению, расширение класса допустимых функций усложняет математический аппарат, необходимый для исследования этого случая.

Представляет особый интерес случай, когда горизонт планирования T в рассматриваемых моделях достаточно большой (т. е. когда $T \to +\infty$), что позволяет осуществлять долгосрочное планирование. Такой случай предполагается исследовать в последующих работах.

Как отмечалось выше, аналитическое решение рассмотренных задач оптимального управления в общем случае весьма затруднительно, громоздко и требует, вообще говоря, разработки алгоритмов их численного решения. Тем не менее, для иллюстрации предложенного подхода можно рассмотреть характерные частные случаи моделей с конкретным заданием ее параметров. Например, в модели задачи о балансе финансовых средств полезно исследовать различные режимы изменения спроса на наличные деньги, курсов процентных ставок и др. В частности, в этой задаче были проведены предварительные расчеты для случая «волнового» характера колебания процентных ставок. Например, для исходных данных вида

$$r_1(t)=0.2,\ r_2(t)=0.2+0.2\sin\pi t,\ d(t)=20,\ x_0=y_0=300,\ U_1=U_2=100,\ \alpha=0.1,\ T=5$$

оптимальная стратегия управления финансами имеет вид

$$u_1^0(t)=0,\ t\in[0,5],\ \ u_2^0(t)=\begin{cases}100, & t\in[0,1/3]\cup[4/3,7/3]\cup[9/3,11/3],\\ 0, & t\in(1/3,4/3)\cup(7/3,9/3)\cup(11/3,5]\end{cases}.$$

Подробное изложение расчетов роста объемов наличных денег и ценных бумаг в каждом временном периоде ограничивает рекомендуемый объем статьи.

Интересными могут оказаться и другие исходные данные, которые характерны для современных финансовых операций в рамках предложенных моделей. Анализ таких сценариев может быть полезным для аналитиков и специалистов в данной области, что планируется осуществить на платформе (Братковский, 2022) стартапа Braiora LLC.

Предложенные математические модели могут быть использованы преподавателями, аспирантами и студентами экономических вузов при изучении соответствующих разделов финансовой математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
(REFERENCES)

Братковский Е.В. 2022. Модели и алгоритмы кредитного скоринга. Сборник научных трудов по материалам IV Международной научно-практической конференции «Современные тенденции развития науки и мирового сообщества». Анапа: Издательство «НИЦ ЭСП» в ЮФО. С. 56–58. [Bratkovski E.V. Models and algorithms of credit scoring. Proceedings of scientific papers based on the materials of the IV International scientific and practical conference «Modern trends in the development of science and the world community» Publisher NIZ ESP. Anapa. PP. 56–58. (In Russ.)]

Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. 1974. *Принцип максимума в теории оптимального управления*. Мн.: Наука и техника, Минск. 272 с. [Gabasov R.F., Kirillova F.M. 1974. *Maximum Principal for Optimal Control Theory*. Minsk: Nayka i Technika. 272 p. (In Russ.)]

Галеев Э.М., Тихомиров В.М. 2000. *Оптимизация: теория, примеры, задачи*. М.: Эдиториал, 320 с. [Galeev E.M., Tikhomirov V.M. *Optimization: theory, examples, problems*. Moscow: Editorial. 320 p. (In Russ.)].

Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. 2003. *Оптимальное импульсное управление с приложениями*. М.: Физматгиз. 256 с. [Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. 2003. *Optimal Impulse Control with Applications*. Moscow: Fizmatgiz. 256 p. (In Russ.)]

Смоляк С.А. 2004. Оптимальное поведение фирмы на финансовом рынке и ставка дисконта. *Экономика и математические методы*. Том 40(2). С. 72–87. [Smolyak S.A. 2004. Optimal Behavior of a Firm in the Financial Market and the Discount Rate. *Economics and Mathematical Methods*. Vol. 40(2). PP. 72–87. (In Russ.)].

Dymkou S., Dymkov M. 2014. Boundary Control in Large Scale Distributed Gas Transportation Network Systems. *Journal of Research and Applications in Economics*. Vol. 2. PP. 21–25.

Elton E., Gruber M. 1976. Finance as a Dynamic Process. *Operational Research Quarterly (1970–1977)*. Vol. 27. No 1. Part 2. PP. 279–281. Palgrave Publishers. New York. DOI: 10.2307/3009155

Fel'dbaum A.A. 1965. *Optimal Control Systems*. Publisher: Academic Press. New York. 452 p.

Krouse C.G. 1973. Optimal Financing and Capital Structure Program for the Firm. *Journal of Finance*. Vol. 27. PP. 1057–1071. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1972.tb03023.x

Sethi S.P., Thompson G.L. 1970. Applications of Mathematical Control Theory to Finance: Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 5 (4–5). PP. 381–394, Cambridge University Press. DOI: 10.2307/2330038

MATHEMATICAL MODELS FOR MANAGING FINANCIAL ASSETS

Michael Dymkov[1] (https://orcid.org/0000-0002-3467-2169),

Sergey Dymkou[2],

Yevgeniy Bratkovskiy[3],

Svetlana Makarevich[1]

[1] Belarusian State Economic University (Minsk, Belarus).

[2] MTBank (Minsk, Belarus).

[3] Aston soft, Braiora LLCV (Minsk, Belarus).

Corresponding author: Michael Dymkov (dymkov_m@bseu.by).

ABSTRACT. This paper describes several applications of optimal control theory to economic problems. In particular, it examines mathematical models concerning the rational management of financial institutions' assets and methods for financing investments through a rational combination of retained earnings and external capital. To solve these problems, the application of Pontryagin's maximum principle — developed in optimisation theory for dynamic control systems — is proposed. In the context of financial transactions, the economic significance of the Hamiltonian and the adjoint variables used to determine the optimal solution is discussed. Detailed solutions for two illustrative examples are provided, alongside graphical representations of the resulting optimal trajectories. Finally, some generalisations of the proposed models and their solutions under various constraints on a firm's financial activities are also examined.

KEYWORDS: financial assets, optimal control, Pontryagin's maximum principle, conjugate variables and their economic interpretation.

JEL-code: G17.

DOI: 10.46782/1818-4510-2026-1-21-39

Received 26.11.2025

In citation: Dymkov M., Dymkou S., Bratkovskiy Ye., Makarevich S. 2026. Mathematical Models for Managing Financial Assets. *Belorusskiy ekonomicheskiy zhurnal.* No 1. PP. 21–39. DOI: 10.46782/1818-4510-2026-1-21-39 (In Russ.)

■ ■ ■