УДК 66.08/09:518.62:398.0

И.А. Конопелько, канд.техн.наук

ОБЩАЯ ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ФИЗИЧЕСКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ В БЕЗРАЗМЕРНОЙ СИСТЕМЕ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

Изучение физико-химических явлений и их закономерностей связано с количественной характеристикой взаимосвязи между переменными величинами, а следовательно, с их измерением. В результате измерения получают числовые значения, которые представляют собой отвлеченные числа, равные отношению измеряемой величины к единице измерения.

Хорошо известны такие математические соотношения между основными количественными характеристиками свойств физического тела или системы тел, процессов и явлений, которые по Международной системе СИ приняты в качестве производных единиц физических величин. Они установлены на основании законов, определяющих соответствующую связь между физическими величинами. В общем случае физическая величина У может быть выражена через другие величины А, В, С... уравнением вида

$$У = KA^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \ldots , \qquad (1)$$

где К — коэффициент пропорциональности.

Уравнение (1) получило название уравнения связи между физическими величинами [1]. Показатели степени α, β, γ ... могут принимать различные значения, равные как целым, так и дробным числам, а также нулю. В том случае, когда величины А, В, С ... выражены в безразмерных единицах, коэффициент К является универсальной константой, независимой от выбора единиц измерений. Если величины У, А, В, С... разделить на их соответствующие единицы измерения, то получим аналогичное уравнение между числовыми значениями величин, в котором коэффициент пропорциональности К будет зависим от выбора единиц измерения.

В практике научных исследований чаще всего используются две переменные величины, одна из которых предполагается независимой (аргументом), другая — зависимой (функцией). Поэтому для количественного выражения закономерностей физико-химических процессов, явлений и свойств тел широко применяется уравнение степенной функции

$$У = mX^{n} \qquad (2)$$

Уравнение (2) является общим выражением количественной характеристики свойств, процессов и явлений, присущих таким макросистемам, для которых закономерные изменения переменных величин не связаны с энергетическим состоянием большого числа частиц, входящих в систему. Его можно отнести к универсальному типу, если переменные Х и У, и таким образом коэффициент пропорциональности m и показатель степени n независимы от выбора единиц измерений.

Отметим одно существенное свойство данного уравнения. Для него справедливо изменение обеих переменных величин в одинаковом, притом неограниченном интервале, т.е. Х и У могут принимать значения от нуля до бесконечности. Следовательно, можно записать:

$$0 \leq X \leq \infty \quad ; \qquad 0 \leq У \leq \infty \ .$$

Показатель степени n в большинстве случаев принимает значения $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2 и 3. Коэффициент пропорциональности m и показатель степени n относятся к числу таких характеристик, которые описывают количественную и качественную стороны явления. Они сами по себе не всегда являются константами и могут быть выражены через исходные или другие переменные величины.

Рассматривая различные случаи взаимосвязи между переменными величинами, с учетом принятых единиц измерений в зависимости от состояния исследуемых систем легко заметить, что зачастую исходные переменные величины могут различаться между собой по начальным и конечным значениям. Например, для жидкого состояния воды при нормальном давлении в пределах температуры 0 – 100 $^{\circ}$С вязкость изменяется от $182{,}3 \cdot 10^{-6}$ до $28{,}8 \cdot 10^{-6}$ кг·с/м^2. Такая несогласованность переменных величин по граничным значениям обусловливает различный характер их взаимосвязи, что в свою очередь затрудняет математическую интерпретацию закономерностей исследуемых зависимостей.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы всевозможные случаи закономерной взаимосвязи между исходными переменными величинами при различных начальных и конечных их значениях привести к общему виду, соответствующему уравнению (2). Положительное решение этой сложной проблемы стало возможным только при учете следующих теоретических положений:

значение любой физической величины всегда выражается только положительным числом единиц измерений;

каждая переменная величина может принимать любое (неограниченное) значение только в бесконечном интервале;

всякое явление в любом интервале значений двух переменных величин, где сохраняется постоянство их закономерной взаимосвязи, протекает монотонно, т.е. только по возрастающей или убывающей функции;

любая зависимость приобретает универсальный характер в том случае, когда она выражена относительными (приведенными) безразмерными величинами, независимыми от выбора единиц измерений.

Чтобы различные случаи закономерной взаимосвязи между исходными переменными величинами x и y привести к виду, соответствующему уравнению (2), необходимо произвести преобразование величин, при котором соблюдалось бы условие

$$0 \le X \le \infty\ ;\ 0 \le У \le \infty,$$

где $X = f(x)$; $У = f(y)$.

Сначала были систематизированы все разновидности монотонной зависимости между переменными x и y, которые изображены на рис. 1 в виде 32-х графиков. Как видно из рис. 1, в зависимости от начальных и конечных значений переменных максимально возможно только восемь различных случаев монотонного изменения одной из величин. Например, для переменной y область ее изменения может быть ограничена одним из начальных (0; $y_н$; ∞) и конечных (0; $y_к$; ∞) ее значений.

Произведем преобразование исходной переменной y таким образом, чтобы область изменения преобразованной величины $У = f(y)$ для всех случаев была одинакова и соответствовала условию $0 \le У \le \infty$. Другими словами, примем такую систему единиц измерений, при которой конкретному начальному $y_н$ и конечному $y_к$ значениям величины в исходной системе единиц измерения y будут соответствовать начальное $У_н = 0$ и конечное $У_к = \infty$ значения этой же величины в новой безразмерной системе У. Для этого рассмотрим случай, когда область изменения исходной переменной величины отвечает условию $y_н \le y \le y_к$. Для данного примера преобразованная величина У будет выражена отношением отрезков, на которые разделяется весь интервал точкой заданного положения исходной переменной y, т.е.

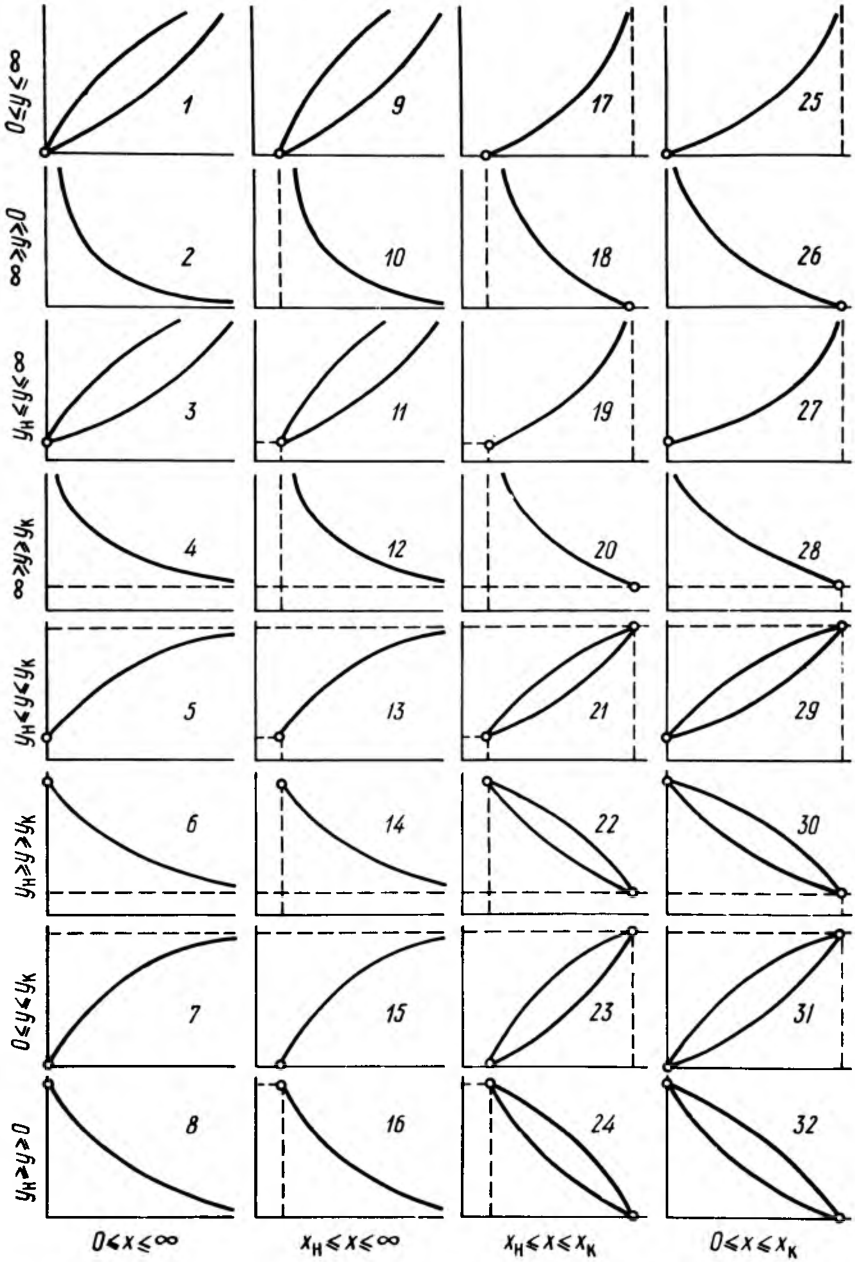

Рис. 1. Систематика монотонных зависимостей между переменными x и y.

$$У = \frac{у - у_н}{у_к - у}. \qquad (3)$$

Действительно, если $у = у_н$, то $У = 0$; когда $у = у_к$, то $У = \infty$. Если принять интервал $у_к - у_н$ за единицу, а отрезки $у - у_н$ и $у_к - у$ выразить через долевые части единицы, соответственно через α и $1 - \alpha$, тогда получим

$$У = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{у - у_н}{у_к - у_н}; \quad 1 - \alpha = \frac{у_к - у}{у_к - у_н}. \qquad (4)$$

Из выражения (4) находим, что любая точка с координатой $У$, взятая в бесконечном интервале $0 \leq У \leq \infty$, делит этот интервал на две долевые части, которые относительно единицы равны

$$\alpha = \frac{У}{1 + У}; \quad 1 - \alpha = \frac{1}{1 + У}. \qquad (5)$$

Полученные выражения (5) указывают на возможность деления бесконечного интервала в данном отношении, так как при любых значениях переменной $У$ сумма долевых частей равна единице. Интересно отметить, что середина бесконечного интервала соответствует значению $У = 1$. Отсюда вытекает весьма существенный вывод, что нуль так же бесконечно удален от единицы, как и сама бесконечность. На числовой оси правее единицы будем иметь бесконечный ряд чисел, бо́льших единицы, левее единицы — бесконечный ряд чисел, меньших 1.

Соотношения долевых частей единицы для всех восьми случаев изменения исходной переменной величины у приведены в табл. 1.

Таблица 1

Область изменения у	Y	α	1–α	№ соотношений
$0 \leqslant у \leqslant \infty$	$у$	$\frac{у}{1+у}$	$\frac{1}{1+у}$	(6)
$\infty \geqslant у \geqslant 0$	$\frac{1}{у}$	$\frac{1}{1+у}$	$\frac{у}{1+у}$	(7)
$у_н \leqslant у \leqslant \infty$	$у - у_н$	$\frac{у - у_н}{1 + у - у_н}$	$\frac{1}{1 + у - у_н}$	(8)
$\infty \geqslant у \geqslant у_к$	$\frac{1}{1 - у_к}$	$\frac{1}{1 + у - у_к}$	$\frac{у - у_к}{1 + у - у_к}$	(9)
$у_н \leqslant у \leqslant у_к$	$\frac{у - у_н}{у_к - у}$	$\frac{у - у_н}{у_к - у_н}$	$\frac{у_к - у}{у_к - у_н}$	(10)

Продолжение табл. 1

Область изменения y	Y	α	$1-\alpha$	№ соотношений
$y_н \geq y \geq y_к$	$\frac{y_н - y}{y - y_к}$	$\frac{y_н - y}{y_н - y_к}$	$\frac{y - y_к}{y_н - y_к}$	(11)
$0 \leq y \leq y_к$	$\frac{y}{y_к - y}$	$\frac{y}{y_к}$	$\frac{y_к - y}{y_к}$	(12)
$y_н \geq y \geq 0$	$\frac{y_н - y}{y}$	$\frac{y_н - y}{y_н}$	$\frac{y}{y_н}$	(13)

Подобным рассуждением можно произвести преобразование исходной переменной x. Обозначив долевую часть через β, будем иметь

$$X = \frac{\beta}{1-\beta} . \tag{14}$$

Подставляя выражения У и Х в уравнение (2), получим общее уравнение взаимосвязи между физическими величинами, выраженными в безразмерной системе единиц измерения

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = m\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^n . \tag{15}$$

Следует подчеркнуть, что уравнение (15) является абсолютным выражением взаимосвязи между переменными величинами Оно независимо от начальных и конечных значений исходных переменных величин, выраженных в той или иной системе единиц измерения, поэтому имеет универсальный характер.

Частные проявления этого уравнения для всех 32-х соотношений, соответствующих изображенным на рис.1 графикам, указаны в табл. 2.

Часто, рассматривая какое-либо явление, нельзя непосредственно установить характер зависимости между x и y, но можно выразить ее в виде дифференциального уравнения, связывающего независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. В современной научной литературе большое место занимают дифференциальные уравнения первого порядка общего вида $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, в особенности такие из них, которые можно разрешить относительно производной.

Так, например, дифференцированием (2) и (15) получим

$$\frac{dY}{dX} = n\frac{Y}{X} \; ; . \tag{16}$$

Т а б л и ц а 2

№ графика	Область изменения переменных	$\frac{\alpha}{1-\alpha}=m(\frac{\beta}{1-\beta})^n$	№ графика	Область изменения переменных	$\frac{\alpha}{1-\alpha}=m(\frac{\beta}{1-\beta})^n$
1	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $0 \leqslant y \leqslant \infty$	$y = mx^n$	9	$x_н \leqslant x \leqslant \infty$ $0 \leqslant y \leqslant \infty$	$y = m(x - x_н)^n$
2	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $\infty \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{1}{y} = mx^n$	10	$x_н \leqslant x \leqslant \infty$ $\infty \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{1}{y} = m(x - x_н)^n$
3	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $y_н \leqslant y \leqslant \infty$	$y - y_н = mx^n$	11	$x_н \leqslant x \leqslant \infty$ $y_н \leqslant y \leqslant \infty$	$y - y_н = m(x - x_н)^n$
4	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $\infty \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{1}{y - y_к} = mx^n$	12	$x_н \leqslant x \leqslant \infty$ $\infty \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{1}{y - y_к} = m(x - x_н)^n$
5	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $y_н \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y - y_н}{y_к - y} = mx^n$	13	$x_н \leqslant y \leqslant \infty$ $y_н \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y - y_н}{y_к - y} = m(x - x_н)^n$
6	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $y_н \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{y_н - y}{y - y_к} = mx^n$	14	$x_н \leqslant x \leqslant \infty$ $y_н \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{y_н - y}{y - y_к} = m(x - x_н)^n$
7	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $0 \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y}{y_к - y} = mx^n$	15	$x_н \leqslant x \leqslant \infty$ $0 \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y}{y_к - y} = m(x - x_н)^n$
8	$0 \leqslant x \leqslant \infty$ $y_н \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{y_н - y}{y} = mx^n$	16	$x_н \leqslant x \leqslant \infty$ $y_н \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{y_н - y}{y} = m(x - x_н)^n$

Окончание

№ графика	Область изменения переменных	$\frac{\alpha}{1-\alpha}=m\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^n$	№ графика	Область изменения переменных	$\frac{\alpha}{1-\alpha}=m\left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^n$
17	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $0 \leqslant y \leqslant \infty$	$y=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	25	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $0 \leqslant y \leqslant \infty$	$y=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$
18	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $\infty \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{1}{y}=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	26	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $\infty \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{1}{y}=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$
19	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \leqslant y \leqslant \infty$	$y-y_н=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	27	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \leqslant y \leqslant \infty$	$y-y_н=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$
20	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $\infty \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{1}{y-y_к}=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	28	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $\infty \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{1}{y-y_к}=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$
21	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y-y_н}{y_к-y}=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	29	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y-y_н}{y_к-y}=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$
22	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{y_н-y}{y-y_к}=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	30	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \geqslant y \geqslant y_к$	$\frac{y_н-y}{y-y_к}=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$
23	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $0 \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y}{y_к-y}=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	31	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $0 \leqslant y \leqslant y_к$	$\frac{y}{y_к-y}=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$
24	$x_н \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{y_н-y}{y}=m\left(\frac{x-x_н}{x_к-x}\right)^n$	32	$0 \leqslant x \leqslant x_к$ $y_н \geqslant y \geqslant 0$	$\frac{y_н-y}{y}=m\left(\frac{x}{x_к-x}\right)^n$

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = n\frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta(1-\beta)} . \qquad (17)$$

Для конкретных явлений постоянная n представляет собой важную физическую характеристику. Она определяется непосредственно из уравнений (16) и (17), а также может быть получена из графика функции $\lg Y = \lg m + n \lg X$. Таким образом, отношение $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ указывает на возможность перехода изучаемого явления из конечного состояния, выраженного через величины в исходной системе единиц измерений, в бесконечное состояние, выраженное величинами в безразмерной системе единиц.

Отношение $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ не зависит от системы единиц измерения, поэтому выступает как абсолютное соотношение относительных величин. Оно абсолютно по содержанию, относительно по форме. Достоверность выведенного общего уравнения (15) подтверждается известным законом соответственных состояний, согласно которому частные зависимости для отдельных веществ сводятся к одной общей закономерности для всех веществ, выраженной через приведенные безразмерные величины [2,3]. Результаты математического анализа взаимосвязи между напряжением и деформацией пористых резин [4], а также температурной зависимости деформации керамических материалов [5] указывают на высокую точность и хорошую согласованность уравнения с экспериментальными данными.

Можно ожидать, что уравнение (15) найдет широкое применение в научно-исследовательской практике для математической обработки экспериментальных данных.

Литература

1. Чертов А.Г. Международная система единиц измерений. М., 1967. 2. Киреев В.А. Курс физической химии. М., 1955. 3. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М., 1969. 4. Конопелько И.А., Несмелов Н.М. Математический анализ взаимосвязи между напряжением и деформацией пористых резин. -- В сб.: Товароведение и легкая промышленность, вып. 1, Минск, 1974. 5. Конопелько И.А. Математический анализ температурной зависимости деформации керамических изделий. -- В сб.: Стекло, ситаллы и силикатные материалы, вып. 4, Минск, 1975.