



СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ

М. П. ДЫМКОВ, С. П. МАКАРЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ ЖИВОТНОВОДЧЕСКИМ КОМПЛЕКСОМ

В статье представлена одна из возможных математических моделей управления сельскохозяйственным комплексом. Задача управления заключается в своевременной поставке качественной продукции, постоянном обновлении и выращивании до нужных кондиций поголовья животноводческого комплекса с целью получения максимальной прибыли. Предлагаемая модель разработана на основе теории оптимального управления для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными. В работе на основе принципа максимума Понтрягина получено оптимальное решение в явном виде. Такое представление оптимального решения предоставляет возможность осуществить его компьютерную реализацию и визуализацию на базе современных IT-технологий.

Ключевые слова: математическое моделирование; животноводческий сельскохозяйственный комплекс; дифференциальные уравнения в частных производных; оптимальное управление; принцип максимума Понтрягина.

УДК 517.9

Введение. В настоящее время существенно возрос интерес к вопросам использования цифровых технологий в управлении производственными и организационными процессами. Сельское хозяйство является одним из тех секторов экономики, где применение цифровых и IT-технологий находятся на низком уровне [1; 2]. Цифровая и информационно-коммуникационная

Михаил Пахомович ДЫМКОВ (dymkov_m@bseu.by), профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).

Светлана Петровна МАКАРЕВИЧ (svetamak0607@gmail.com), старший преподаватель кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).

трансформация предполагает и разработку математических моделей, а на их основе соответствующих алгоритмов и программного обеспечения.

Целью данной работы является построение математической модели оптимального управления сельскохозяйственным животноводческим комплексом, специализирующемся на выращивании и поставке своей продукции на мясоперерабатывающие предприятия и в другие организации. Задача управления заключается в своевременной поставке качественной продукции, рациональном обновлении и выращивании до нужных кондиций поголовья животноводческого комплекса. Предлагаемая модель разработана на основе теории оптимального управления для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными [3]. В работе на основе принципа максимума Понтрягина найдено оптимальное решение в явном виде, что позволяет осуществить его компьютерную реализацию.

Постановка задачи. Рассмотрим сельскохозяйственное предприятие, важной частью которого является животноводческий комплекс. Задача управления комплексом состоит в определении такой стратегии покупки некоторого количества молодняка, выращивания до нужных кондиций и его реализации так, чтобы максимизировать суммарную прибыль [4]. Следует иметь в виду, что эффективный рост животных предполагает, что в каждый момент времени в стаде должны быть особи различного возраста. В связи с этим разрабатываемая стратегия управления комплексом включает в себя процесс постоянного обновления стада и его своевременной выбраковки (продажи, изготовления продуктов питания и др.).

Пусть τ обозначает возраст животного, а $x(t, \tau)$ — количество животных в момент времени t и имеющих возраст, равный τ . В дальнейшем, чтобы избежать при использовании методов дифференциального исчисления целочисленных переменных, под количеством животных будем понимать долю этих животных относительно некоторой величины (например, доля животных в общем капитале сельскохозяйственного предприятия или доля относительно нормативного количества для других успешных предприятий и т. д.). Пусть h обозначает тот предельный возраст зрелости животного, в котором оно обязательно подлежит выбраковке (например, для качественного изготовления продуктов питания). Таким образом, отрезок $[0, h]$ есть жизненный цикл животных, т. е. тот промежуток времени, в течение которого осуществляется процесс регулирования количеством и качеством животных комплекса. При этом в каждый момент времени $t \in [0, T]$, где T — горизонт планирования, на животноводческом комплексе могут быть животные всех возможных возрастов от 0 до h . Пусть $u(t, \tau)$ обозначает интенсивность (скорость) купли-продажи животных возраста τ в момент времени t . Другими словами, $u(t, \tau)$ представляет собой величину относительной скорости изменения поголовья животных возраста τ в момент времени t . Функция $u(t, \tau)$ является функцией управления, подлежащая определению. При этом условимся, что если $u < 0$, то животное продается; если $u > 0$, то животное покупается. Тогда динамику изменения поголовья животных комплекса на промежутке $[t, t + \Delta]$, где Δ — некоторое малое действительное число, можно описать следующим образом:

$$x(t + \Delta, \tau) = x(t, \tau - \Delta) + u(t, \tau) \Delta.$$

Другими словами, это равенство означает, что в момент $(t + \Delta)$ количество животных $x(t + \Delta, \tau)$, имеющих возраст τ , состоит, во-первых, из животных $x(t, \tau - \Delta)$, имеющих в момент времени t возраст $(\tau - \Delta)$, и которое в течение промежутка времени $[t, t + \Delta]$ подросло до возраста τ и, во-вторых, за это время Δ их количество изменилось (продали или приобрели) на величину $u(t, \tau) \Delta$.

Теперь вычтем из обеих частей полученного равенства величину $x(t, \tau)$, разделим на Δ и перейдем к пределу при $\Delta \rightarrow 0$. Тогда имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta, \tau) - x(t, \tau)}{\Delta} = -\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x(t, \tau) - x(t, \tau - \Delta)}{\Delta} + u(t, \tau)$$

или

$$\frac{\partial x(t, \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial x(t, \tau)}{\partial \tau} + u(t, \tau). \quad (1)$$

Начальные условия для полученного уравнения в частных производных зададим в виде:

$$x(0, \tau) = x_0(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq h; \quad (2)$$

$$x(t, 0) = v(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Здесь $x_0(\tau)$ означает количество животных в начальный момент $t = 0$ с заданным возрастным составом, $v(t)$ означает количество родившегося молодняка возраста $\tau = 0$ в момент t . В целях согласования этих условий предполагаем, что $x(0, 0) = x_0(0) = v(0)$.

Для задания целевой функции будем считать, что задан горизонт планирования T , т.е. процесс планирования производства рассматривается на промежутке $t \in [0, T]$. Далее пусть $P(t, \tau)$ есть цена покупки или продажи животного возраста τ в момент t . Кроме того, пусть $P(t, h) = Q(t)$ есть цена животного зрелого возраста h в момент t , а $P(t, \tau) = S(\tau)$ — остаточная (ликвидационная) стоимость животного возраста τ в момент T (ликвидация фирмы).

С помощью задания функций $Q(t)$, $0 \leq t \leq T$ и $S(\tau)$, $0 \leq \tau \leq h$ можно сформировать выручку животноводческого бизнеса. Для того чтобы получить функцию прибыли, мы должны из доходов от продажи вычесть расходы на содержание животных. Пусть $C(\tau)$ есть стоимость кормления и содержания животных возраста τ за единицу времени. Будем считать известной функцию $u^*(t, \tau)$, которая обозначает рекомендуемый или нормативный уровень покупки-сбыта животных возраста τ в момент t , который сложился в данном регионе в условиях стабильной работы всей цепочки «животноводческий комплекс — кормовая база — потребности населения — мясоперерабатывающие предприятия». Такая функция может быть определена, например, из статистических или прогнозных данных. Любое отклонение от этого уровня является нежелательным (затратным) и стоимость штрафа за отклонение от нормы задается функцией $q[u(t, \tau) - u^*(t, \tau)]^2$, где q — заданная константа.

Следовательно, задача максимизации прибыли заключается в нахождении такой функции управления $u^0(t, \tau)$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq h$, которая на решениях $x^0(t, \tau)$ уравнения (1) с начальными данными (2)–(3) и управлением $u^0(t, \tau)$, доставляет максимум функционалу

$$J(u) = \int_0^T [-C(\tau) \cdot x(t, \tau) + P(t, \tau) \cdot u(t, \tau) + q(u(t, \tau) - u^*(t, \tau))^2] d\tau dt + \int_0^T Q(t) x(t, h) dt + \int_0^h S(\tau) x(T, \tau) d\tau \rightarrow \max_{u(t, \tau) \in R}. \quad (4)$$

Условия оптимальности управления. Для решения этой задачи используем принцип максимума Понтрягина [3; 4]. Для формулировки условий оптимальности определим Гамильтониан в виде

$$H(t, \tau, x, u, \Psi) = -[C(\tau)x + P(t, \tau)u + q(u(t, \tau) - u^*(t, \tau))^2] - \Psi \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} - u \right). \quad (5)$$

Здесь сопряженная переменная $\psi(t, \tau)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial \tau} + C(\tau), \quad (6)$$

а также краевым условиям вида

$$\Psi(t, h) = Q(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Psi(T, \tau) = S(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq h \quad (7)$$

и условиями согласования

$$\Psi(T, h) = P(T) = S(h), \quad (8)$$

которые имеют тот смысл, что цена и средняя стоимость единицы $x(t, \tau)$ должны совпадать.

Далее согласно принципу максимума Понтрягина оптимальное управление $u^0(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$$H(t, \tau, x^0, x_\tau^0, u^0, \Psi) = \max_{u \in R} H(t, \tau, x^0, x_\tau^0, u, \Psi) \quad (9)$$

для всех (t, τ) , $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq h$, где $x^0 = x^0(t, \tau)$ означает решение уравнения (1) с условиями (2)–(3) и управлением $u(t, \tau) = u^0(t, \tau)$. Для нахождения максимума в (9) вычислим производную функции $H(t, \tau, x^0, x_\tau^0, u, \Psi)$ по переменной u и приравняем ее к нулю. Тогда имеем

$$u^0(t, \tau) = u^*(t, \tau) + \frac{1}{2q} [\Psi(t, \tau) - P(t, \tau)]. \quad (10)$$

Здесь $\psi(t, \tau)$ есть решение уравнения (6) с условиями (7). Можно показать [5] непосредственной проверкой, что решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$\Psi(t, \tau) = -\int_{\tau}^{\mu} C(s) ds + g(t - \tau), \quad (11)$$

где $g(\omega)$ — произвольная функция одной действительной переменной $\omega \in R$; μ — некоторая константа. Для определения неизвестных $g(\omega)$ и μ воспользуемся граничными условиями (7)–(8). Для этого осуществим разбиение области $D \triangleq [0, h] \times [0, T]$ на три части: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, где $D_1 \triangleq \{(t, \tau) | 0 \leq t \leq h, t \leq \tau \leq h\}$, $D_2 \triangleq \{(t, \tau) | 0 \leq \tau \leq h, \tau \leq t \leq T - h + \tau\}$, $D_3 \triangleq \{(t, \tau) | T - h \leq t \leq T, t \leq \tau \leq h\}$,

Разбиение области D линиями $t - \tau = \text{const}$ на три части $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ диктуется формой аргумента искомой функции $g(\omega) = g(t - \tau)$ и областями определения функций, входящих в краевые условия (7)–(8).

Из условия $\Psi(t, h) = Q(t)$, $0 \leq t \leq T$ найдем функцию $\psi(t, \tau)$ в области $(t, \tau) \in D_1 \cup D_2$. Во-первых, из (11) следует

$$\Psi(t, h) = -\int_h^{\mu} C(s) ds + g(t - h) = Q(t) \quad \text{или} \quad g(t - h) = Q(t) + \int_h^{\mu} C(s) ds.$$

Для $\omega = t - h$, $\omega \in R$ имеем $g(\omega) = Q(\omega + h) + \int_h^{\mu} C(s) ds$. Для любых $(t, \tau) \in D_1 \cup D_2$ положив $\omega = t - \tau$, $\omega \in R$, тогда имеем

$$g(t - \tau) = Q(t - \tau + h) + \int_h^{\mu} C(s) ds. \quad (12)$$

Подставив (12) в (11) и используя свойство аддитивности определенного интеграла, получим искомую функцию $\psi(t, \tau)$ в области $(t, \tau) \in D_1 \cup D_2$

$$\Psi(t, \tau) = Q(t - \tau + h) - \int_{\tau}^h C(s) ds + \int_h^{\mu} C(s) ds = Q(t - \tau + h) - \int_{\tau}^h C(s) ds. \quad (13)$$

Далее из краевого условия $\Psi(T, \tau) = S(\tau)$, $0 \leq \tau \leq h$ найдем функцию $\psi(t, \tau)$ в области $(t, \tau) \in D_3$. По аналогии с предыдущим можно получить следующие соотношения:

$$\Psi(T, \tau) = - \int_{\tau}^{\mu} C(s) ds + g(T - \tau) = S(\tau) \quad \text{или} \quad g(T - \tau) = S(\tau) + \int_{\tau}^{\mu} C(s) ds.$$

Отсюда для любых $(t, \tau) \in D_3$ имеем

$$g(t - \tau) = S(T - t + \tau) + \int_{T-t+\tau}^{\mu} C(s) ds.$$

Подставив последнее равенство в (11), получим искомую функцию в области $(t, \tau) \in D_3$

$$\Psi(t, \tau) = S(T - t + \tau) - \int_{\tau}^{T-t+\tau} C(s) ds. \quad (14)$$

Решение сопряженного уравнения (6), удовлетворяющего краевым условиям (7), задается формулой

$$\Psi(t, \tau) = \begin{cases} Q(t - \tau + h) - \int_{\tau}^h C(s) ds, & \text{если } (t, \tau) \in D_1 \cup D_2, \\ S(T - t + \tau) - \int_{\tau}^{T-t+\tau} C(s) ds, & \text{если } (t, \tau) \in D_3 \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что для сопряженной переменной выполняются следующие условия согласования:

$$\Psi(T, h) = P(T, h) = Q(T) = S(h).$$

С учетом найденных сопряженных переменных и формулы (10) получаем, что оптимальное управление имеет следующий вид:

$$u^0(t, \tau) = \begin{cases} u^*(t, \tau) + \frac{1}{2q} [Q(t - \tau + h) - \int_{\tau}^h C(s) ds - P(t, \tau)], & (t, \tau) \in D_1 \cup D_2, \\ u^*(t, \tau) + \frac{1}{2q} [S(T - t + \tau) - \int_{\tau}^{T-t+\tau} C(s) ds - P(t, \tau)], & (t, \tau) \in D_3. \end{cases} \quad (16)$$

Теперь с учетом найденного оптимального управления $u^0(t, \tau)$ соответствующую траекторию $x^0(t, \tau)$ оптимального количества животных в каждый момент времени t и должного возраста τ можно найти как решение уравнения (1) с заданным управлением $u^0(t, \tau)$ и условиями (2)–(3).

Легко проверить непосредственной подстановкой, что функция вида

$$x^0(t, \tau) = \begin{cases} x_0(\tau - t) + \int_0^t u^0(s, \tau - t + s) ds, & \text{если } (t, \tau) \in D_1, \\ v(t - \tau) + \int_0^{\tau} u^0(t - \tau + s, s) ds, & \text{если } (t, \tau) \in D_2 \cup D_3 \end{cases} \quad (17)$$

является решением уравнения (1), удовлетворяет начальным данным (2)–(3).

Таким образом, искомое оптимальное количество животных $x^0(t, \tau)$ в каждый момент времени t и должного возраста τ задается формулой (17), а оптимальное управление $u^0(t, \tau)$, на котором реализуются это решение определяется формулой (16).

Заключение. В работе осуществлено математическое моделирование процесса управления животноводческим комплексом. Задача выбора оптимальной стратегии покупки, сроков выращивания до нужных кондиций и своевременной реализации поголовья комплекса свелась к задаче оптимизации интегрального показателя качества (6) на решения уравнения в частных производных (1) с начальными данными (2)–(3). Следует заметить, что, вообще говоря, методы управления системами с распределенными параметрами, когда поведение исследуемого объекта описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, существенно труднее [4; 5], чем те, которые используются в задачах оптимизации обыкновенных систем управления [6]. Следует признать, что методы вариационного исчисления и оптимального управления требуют соответствующей математической квалификации, что затрудняет их широкое использование в экономических исследованиях. Принцип максимума Понтрягина является одним из ключевых условий оптимальности, на основе которого в ряде случаев удается вычислить оптимальное решение. Например, этот принцип был использован в задаче оптимизации баланса финансовых средств фирмы [7]. Некоторые обобщения этого принципа на специальные классы многопараметрических $m-d$ систем можно найти в [8; 9].

Литература

1. Юхнюк, П. П. Тенденции изучения современных информационно-коммуникационных технологий сельского хозяйства в странах постсоветского пространства: библиометрический анализ / П. П. Юхнюк // АПК. Экономика, управление. — 2023. — № 5. — С. 114–126.
Yukhnyuk, P. P. Tendentsii izucheniya sovremennykh informatsionno-kommunikatsionnykh tekhnologiy sel'skogo khozyaystva v stranakh postsovetского prostranstva: bibliometricheskiy analiz [Trends in the study of modern information and communication technologies of agriculture in the post-soviet countries: bibliometric analysis] / P. P. Yukhnyuk // APK. Ekonomika, upravlenie. — 2023. — № 5. — P. 114–126.
2. Пантелеева, Т. А. Проблемы развития цифровых бизнес-моделей предприятий АПК: зарубежный и отечественный опыт / Т. А. Пантелеева // Продовольственная политика и безопасность. — 2024. — № 1. — С. 63–84.
Panteleeva, T. A. Problemy razvitiya tsifrovyykh biznes-modeley predpriyatiy APK: zarubezhnyy i otechestvennyy opyt [Problems of development of digital business models of agricultural enterprises: foreign and domestic experience] / T. A. Panteleeva // Prodovol'stvennaya politika i bezopasnost'. — 2024. — № 1. — P. 63–84.
3. Lions, J. L. Optimal control js systems governed by partial differential equations / J. L. Lions. — Beijing, 1994.
4. Feichtinger, G. Optimal control theory and economic analysis / G. Feichtinger. — North-Holland, Amsterdam, 1988.
5. Porter, D. Integral equations: a practical treatment, from spectral theory to applications / D. Porter, S. T. Stirling. — Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
6. Галеев, Э. М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи / Э. М. Галеев // Эдиториал УРСС. — М., 2002.
Galeev, E. M. Optimizatsiya. Teoriya. Primery. Zadachi [Optimization. Theory. Examples. Tasks] / E. M. Galeev // Editorial URSS. — M., 2002.
7. Макаревич, С. П. К задаче оптимизации баланса финансов фирмы / С. П. Макаревич, М. П. Дымков // Экономический рост Республики Беларусь: глобализация, инновационность, устойчивость : материалы XVII Междунар. науч.-практ. конф. — Минск : Колорград, 2024. — С. 314–315.
Makarevich, S. P. K zadache optimizatsii balansa finansov firmy [To the task of optimizing the balance of the company's finances] / S. P. Makarevich, M. P. Dymkov // Ekonomicheskii rost Respubliki Belarus': globalizatsiya, innovatsionnost', ustoychivost' : materialy XVII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. — Minsk : Kolorgrad, 2024. — P. 314–315.

8. Дымков, М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. — Минск : БГЭУ, 2006.

Dymkov, M. P. Ekstremal'nye zadachi v mnogoparametricheskikh sistemakh upravleniya [Extreme tasks in multiparameter control systems] / M. P. Dymkov. — Minsk : BGEU, 2006.

**MICHAEL DYMKOV,
SVETLANA MAKAREVICH**

MATHEMATICAL MODEL LIVESTOCK COMPLEX MANAGEMENT STRATEGIES

Authors affiliation. *Michael DYMKOV (dymkov_m@bseu.by), Belarus State Economic University (Minsk, Belarus); Svetlana MAKAREVICH (svetamak0607@gmail.com), Belarus State Economic University (Minsk, Belarus).*

Abstract. The article presents one of the possible mathematical models of management of agricultural complex. The control problem is to supply quality products in a timely manner, to constantly renew and grow the livestock of the complex to the required conditions in order to maximize profits. The proposed model is developed on the base of the theory of optimal control for systems described by partial differential equations. Using Pontryagin maximum principle makes possible to obtain the optimal solution in explicit form. Such representation of the optimal solution provides an opportunity to carry out its computer implementation and visualization on the basis of modern IT-technologies.

Keywords: mathematical modeling; agricultural complex; partial differential equations; optimal control; Pontryagin maximum principle.

UDC 517.9

*Статья поступила
в редакцию 14. 04. 2025 г.*

А. М. КОТОВ

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТРЕЙД-МАРКЕТИНГА НА ПРЕДПРИЯТИЯХ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В статье рассматривается авторская разработка методики оценки эффективности трейд-маркетинга на предприятиях пищевой промышленности. Автором представлены

Александр Михайлович КОТОВ (xbgcs@mail.ru), аспирант кафедры маркетинга Белорусского государственного экономического университета (г. Минск, Беларусь).
