

Учреждение образования
«Белорусский государственный экономический университет»

УТВЕРЖДАЮ

Ректор учреждения образования
«Белорусский государственный
экономический университет»


А.В. Егоров
«19» 12 2024.

Регистрационный № УД-6415-24уч.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности
6-05-0533-09 «Прикладная математика»

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта общего высшего образования ОСВО 6-05-0533-09-2023 и учебного плана по специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика» (профилизация «Экономическая кибернетика»)

СОСТАВИТЕЛЬ:

Ю.Л. Ратушева, доцент кафедры математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Е.А. Баркова, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», кандидат физико-математических наук, доцент;

А.В. Конюх, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физикл-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол № 4 от 15.11 2024);

Методической комиссией по специальностям «Экономическая кибернетика (по направлениям)», «Прикладная математика», «Экономика» с профилизацией «Анализ данных в экономике и бизнесе» учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол № 3 от 15.11.2024).

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет» (протокол № 2 от 18 12 2024)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по учебной дисциплине «Линейная алгебра» направлена на изучение таких объектов, как линейные пространства и их разновидности (евклидовы и унитарные пространства), подпространства линейных пространств, линейные операторы, собственные значения и собственные векторы матриц, квадратичные формы и квадрики.

Цель преподавания учебной дисциплины – продолжение изучения алгебраических объектов, их свойств и связей с геометрическими и экономическими задачами.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих **задач**:

- знакомство с линейными пространствами и их подпространствами;
- знакомство с линейными операторами, изучение их основных свойств в евклидовых и унитарных пространствах;
- освоение основных методов нахождения собственных значений и собственных векторов квадратных матриц;
- изучение возможности приведения квадратных матриц к диагональному виду;
- освоение методов построения жордановой нормальной формы для квадратных матриц и матриц линейных операторов;
- изучение методов преобразования квадратичных форм к каноническому и нормальному виду;
- изучение основных свойств квадрик и их связи с линиями и поверхностями второго порядка.

В результате изучения учебной дисциплины «Линейная алгебра» формируются следующие компетенции

базовые профессиональные:

- применять основы дифференциального и интегрального исчисления, методы математического анализа к решению прикладных задач;
- использовать методы аналитической геометрии и линейной алгебры при решении задач в области прикладной математики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен

знать:

- понятия линейного пространства, линейного оператора,
- понятия собственных значений и собственных векторов квадратных матриц;
- методы нахождения решений многомерных систем линейных уравнений и методы представления этих решений в векторной форме;
- понятия евклидова пространства, унитарного пространства, скалярного произведения в этих пространствах;
- квадратичные формы и их основные свойства;
- квадрики и их взаимосвязь с кривыми и поверхностями второго порядка;

уметь:

- решать основные задачи теории линейных, евклидовых и унитарных пространств;
- решать системы линейных алгебраических уравнений;

- находить корни из квадратных вырожденных и невырожденных матриц;
- применять методы линейной алгебры при решении задач специальности;
иметь навыки:
- решения систем линейных уравнений в общем виде;
- вычисления собственных значений и собственных векторов квадратных матриц;
- преобразования квадратичных форм и квадратик к каноническому и нормальному виду;
- использования матричных методов для решения задач линейной алгебры.

В рамках образовательного процесса по данной учебной дисциплине студент должен приобрести не только теоретические и практические знания, умения и навыки по специальности, но и совершенствовать свой ценностно-личностный, духовный потенциал, сформировать качества патриота и гражданина, готового к активному участию в экономической, производственной, социально-культурной и общественной жизни страны.

Учебная дисциплина относится к модулю «Геометрия и алгебра» государственного компонента.

Учебные дисциплины, усвоение которых необходимо для изучения данной учебной дисциплины – «Основы высшей алгебры», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ». Учебные дисциплины, для усвоения которых важна данная дисциплина – «Численные методы», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Эконометрика», «Многомерный статистический анализ».

Форма получения образования – дневная.

В соответствии с учебным планом университета на изучение учебной дисциплины отводится:

общее количество учебных часов – 240,

для дневной формы обучения:

аудиторных – 136 часов, из них лекции 68 часов, практические занятия – 68 часов.

Распределение аудиторного времени по курсам и семестрам:

2 семестр – лекции 68 часов, практические занятия – 68 часов.

Самостоятельная работа студента – 104 часа.

Трудоемкость – 6 з.ед.

Формы промежуточной аттестации – зачет, экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Линейные пространства и линейные операторы

Тема 1.1. Линейные (векторные) пространства

Определение и примеры линейных пространств. Свойства линейных пространств. Понятие вектора в n -мерном пространстве. Операции с векторами в n -мерном пространстве. Скалярное произведение векторов.

Тема 1.2. Системы векторов в линейных пространствах

Линейная комбинация векторов. Разложение вектора по системе векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Эквивалентные системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. Базис и ранг системы векторов. Ортогональные системы векторов. Ортогонализация Грама-Шмидта системы векторов. Фундаментальная система векторов СЛАУ и ее векторное представление.

Тема 1.3. Линейные операторы

Определение и свойства линейного оператора. Матрица линейного оператора. Вычисление координат образа вектора. Изменение матрицы оператора при изменении базиса. Определитель линейного оператора. Операции над линейными операторами. Невырожденные линейные операторы. Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств. Автоморфизм линейных пространств

Тема 1.4. Подпространства линейного пространства

Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Ядро и образ линейного оператора. Ранг и дефект линейного оператора. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Инвариантные подпространства.

Раздел 2. Собственные значения и собственные векторы

Тема 2.1. Собственные значения и собственные векторы квадратных матриц

Понятия собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы. Свойства собственных значений квадратных матриц. Собственные векторы линейного оператора, собственные значения, характеристическое уравнение. Правила нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений.

Тема 2.2. Некоторые специальные виды матриц

Нильпотентные матрицы. Унимодулярные матрицы. Матрицы перестановок. Инволютивные матрицы. Идемпотентные матрицы. Ортогональные матрицы.

Тема 2.3. Приведение матриц к диагональному виду

Приводимость квадратной матрицы к диагональному виду, матрица перехода. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Собственные значения симметричных матриц. Приведение симметричной матрицы к диагональному виду. Приведение ортогональной матрицы к диагональному виду.

Тема 2.4. Жорданова нормальная форма

Понятие жордановой клетки, жордановой матрицы, жордановой нормальной формы квадратной матрицы. Приведение квадратных матриц к жордановой нормальной форме, матрица перехода. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме, матрица перехода. Присоединенные векторы

Тема 2.5. Собственные значения в экономических задачах

Разложимые матрицы. Собственные значения и собственные векторы неотрицательных матриц. Теорема Фробениуса. Число и вектор Фробениуса. Левый вектор Фробениуса.

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Матрицы прямых и полных затрат, их свойства. Продуктивные модели Леонтьева. Основное уравнение межотраслевого баланса. Матрицы косвенных затрат. Модель равновесных цен. Продуктивность неотрицательных матриц. Связь продуктивности с числом Фробениуса.

Модель международной торговли. Структурные матрицы сроков службы оборудования.

Тема 2.6. Корни из матриц

Понятие корня из матрицы. Квадратные корни из положительно определенных матриц. Квадратный корень из треугольной матрицы. Квадратный корень из жордановой клетки. Корень m -й степени из невырожденной матрицы. Корень m -й степени из вырожденной матрицы.

Раздел 3. Евклидовы и унитарные пространства

Тема 3.1. Понятие скалярного произведения в линейном пространстве

Определение и свойства евклидова пространства. Скалярное произведение. Вещественные и унитарные пространства. Длина вектора, расстояние между векторами. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональные системы векторов в евклидовых и унитарных пространствах. Ортогональное дополнение пространства.

Тема 3.2. Матрица скалярного произведения (матрица Грама)

Понятие матрицы Грама. Свойства матрицы Грама. Определитель Грама. Геометрический смысл определителя Грама.

Тема 3.3. Нормированные пространства

Нормы матриц и векторов, их виды, взаимосвязь матричных и векторных норм. Нормированные пространства.

Тема 3.4. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

Ортогональные, унитарные, эрмитовы и симметричные матрицы. Сопряженные линейные операторы и их свойства, примеры сопряженных операторов. Матрица сопряженного оператора. Самосопряженные линейные операторы. Свойства самосопряженных операторов. Геометрический и физический смысл самосопряженных операторов. Нормальные операторы. Изометрические операторы. Теоремы об изометрических операторах. Движения в евклидовой плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве.

Раздел 4. Квадратичные формы и квадрики

Тема 4.1. Билинейные формы

Билинейная форма и ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса. Симметричные билинейные формы

Тема 4.2. Квадратичные формы

Квадратичная форма и ее матрица. Канонический и нормальный виды квадратичных форм. Методы приведения квадратичных форм к каноническому и нормальному видам (выделение полного квадрата, метод Лагранжа, замена переменных, преобразование матрицы квадратичной формы). Знакоопределенные квадратичные формы. Эквивалентные квадратичные формы. Квадратичные формы в евклидовом пространстве.

Тема 4.3. Комплексные квадратичные формы

Квадратичные формы в унитарных пространствах. Эрмитовы квадратичные формы. Приведение эрмитовых квадратичных форм к каноническому виду

Тема 4.4. Квадрики

Понятие квадрики, связь с геометрическими объектами. Приведение уравнений квадрик к каноническому виду.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

Дневная форма получения высшего образования

[illegible]

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов							Литература	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Количество часов управляемой самостоятельной работы				
						лекции	практическ ие занятия	семинарск ие занятия		
	Раздел 2. Собственные значения и собственные векторы									
Тема 2.1	Собственные значения и собственные векторы квадратных матриц	4							[1]-[3]	
	Собственные значения и собственные векторы		6						[1]-[3]	Учебное задание, опрос
Тема 2.2	Некоторые специальные виды матриц	2							[1]-[3]	
	Некоторые специальные виды матриц		2						[1]-[3]	Экспресс-опрос, учебное задание
Тема 2.3	Приведение матриц к диагональному виду	2							[1]-[3]	
	Приведение матриц к диагональному виду		2						[1]-[3]	Опрос, учебное задание
Тема 2.4	Жорданова нормальная форма	2							[1]-[3]	
	Жорданова нормальная форма		4						[1]-[3]	
Тема 2.5	Собственные значения в экономических задачах	4							[1]-[3]	
	Собственные значения в экономических задачах		4						[1]-[3]	Экспресс-опрос, учебное задание
Тема 2.6	Корни из матриц	4							[1]-[3]	Математический диктант
	Корни из матриц		6						[1]-[3]	Опрос, учебное задание Контрольная работа

[illegible]

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов							Литература	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Количество часов управляемой самостоятельной работы				
						лекции	практическ ие занятия	семинарск ие занятия		
	Раздел 4. Квадратичные формы и квадрики									
Тема 4.1	Билинейные формы	2							[1]-[3]	
	Билинейные формы		2						[1]-[3]	Опрос, учебное задание
Тема 4.2	Квадратичные формы	6							[1]-[3]	
	Квадратичные формы		6						[1]-[3]	Экспресс-опрос, учебное задание
Тема 4.3	Комплексные квадратичные формы	4							[1]-[3]	
	Комплексные квадратичные формы		4						[1]-[3]	Экспресс-опрос, учебное задание
Тема 4.4	Квадрики	6							[1]-[3]	Математический диктант
	Квадрики		4						[1]-[3]	Опрос, учебное задание Контрольная работа
	Итого 2 семестр	68	68							Зачет, экзамен
	Всего часов	68	68							

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Литература

Основная:

1. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебник для студентов учреждений высшего образования по физическим и радиофизическим специальностям / Л. Л. Березкина. – Минск : РИВШ, 2022. – 411 с.
2. Математика в примерах и задачах = Mathematics in problems and tasks : учебное пособие для иностранных студентов учреждений высшего образования по техническим и экономическим специальностям / Л.И. Майсеня [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2023. – 557, [1] с.
3. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей : учебно-методическое пособие. В 2 ч. Ч. 1 / [А.В. Конюх и др.] ; М-во образования Респ. Беларусь, Белорус. гос. экон. ун-т. – 2-е изд., перераб. – Минск : БГЭУ, 2021. – 307 с.

Дополнительная:

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1980.
2. Белько, И. В. Высшая математика для экономистов. 1 семестр : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление, функции многих переменных] : экспресс-курс / И. В. Белько, К. К. Кузьмич. - 3-е изд., стер. - Москва : Новое знание, 2007. - 139 с. - (Экспресс-курс).
3. Белявский, С.С. Высшая математика: решение задач / С.С. Белявский, Н.А. Широкова – Минск: Вышэйшая школа, 2004.
4. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям / Л. Л. Березкина. - 2-е изд. - Минск : РИВШ, 2015. - 354 с. : ил.
5. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям / Л. Л. Березкина. - Минск : РИВШ, 2012. - 354 с.
6. Высшая математика для экономистов : Учебник для вузов по экон. спец. / Н. Ш. Кремер [и др.] ; Под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перерб. и доп. - Москва : ЮНИТИ : Банки и биржи, 1998. - 471 с.
7. Закон Республики Беларусь «Об информации, информатизации и защите информации» от 10.11.2008 №455-3
8. Кастрица, О. А. Высшая математика для экономистов : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по экономическим специальностям / О. А. Кастрица. - 4-е изд., стер. - Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2015. - 491 с. : ил. - (Высшее образование. Бакалавриат).

9. Конюх, А.В. Сборник задачи упражнений по высшей математике для экономических специальностей. Часть I / А.В. Конюх, Косьянчук В.В., Майоровская СВ. – Минск: БГЭУ, 2008.

10. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата : учебник для студентов, обучающихся по специальности 061800 "Математические методы в экономике" и другим экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман ; под ред. Н. Ш. Кремера ; Финансовый ун-т при Правительстве Рос. Федерации. - 2-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 306, [15] с. : ил. - (Бакалавр. Академический курс) (Учебник. Практикум).

11. Крылов, В. Е. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / В. Е. Крылов. – М. : КноРус, 2024. – 203 с. – ISBN 978-5-406-12232-7. – URL: <https://book.ru/book/951711> (дата обращения: 02.12.2024). – Текст : электронный.

12. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, 2012.

13. Литаврин, А. В. Линейная алгебра : учебное пособие / А. В. Литаврин, Т. В. Моисеенкова ; Сибирский федеральный университет. – Красноярск : Сибирский федеральный университет (СФУ), 2022. – 244 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=705607> (дата обращения: 02.12.2024). – Библиогр.: с. 238. – ISBN 978-5-7638-4604-1. – Текст : электронный.

14. Макаров, С. И. Высшая математика: математический анализ и линейная алгебра : учебное пособие / С. И. Макаров. – М. : КноРус, 2024. – 320 с. – ISBN 978-5-406-13446-7. – URL: <https://book.ru/book/954837> (дата обращения: 02.12.2024). – Текст : электронный.

15. Математика для экономистов (математический анализ и линейная алгебра). Задачник. : учебно-практическое пособие / С. И. Макаров, М. В. Мищенко, Л. И. Уфимцева [и др.] ; под ред. С. И. Макарова, М. В. Мищенко. – М. : КноРус, 2025. – 263 с. – ISBN 978-5-406-11455-1. – URL: <https://book.ru/book/955351> (дата обращения: 02.12.2024). – Текст : электронный.

16. Общий курс высшей математики для экономистов / Ю.Н. Ермакова [и др.]; под ред. Ю.Н. Ермакова. – М.: ИНФРА, 2001.

17. Орлова, И.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия для экономистов / И.В. Орлова, В.В. Угрозов, Е.С. Филонова. – М.: Из-во Юрлайт, 2015.

18. Постановление Совета безопасности Республики Беларусь «О концепции информационной безопасности Республики Беларусь» от 18.03.2019 №1.

19. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : практикум : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по специальностям "Прикладная математика", "Информатика", "Актuarная математика" и направлениям специальностей "Экономическая кибернетика", "Компьютерная безопасность", "Прикладная информатика" / Г. П. Размыслович, А. В. Филиппов, В. М. Ширяев. - Минск : Вышэйшая школа, 2018. - 380, [2] с. : ил.

20. Ринчино, А. Л. Линейная алгебра : учебное пособие / А. Л. Ринчино. – М. : КноРус, 2024. – 367 с. – ISBN 978-5-406-11922-8. – URL: <https://book.ru/book/951074> (дата обращения: 02.12.2024). – Текст : электронный.

21. Рябушко, А. П. Высшая математика : теория и задачи : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям : в 5 ч. / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — 2-е изд. — Минск : Вышэйшая школа, 2017—. — Ч. 1: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. — 2017. — 302, [1] с. : ил., табл.

22. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.С. Феденко [и др.]; под ред. А.С. Феденко. — Минск: Універсітэцкае, 1997.

23. Солодовников, А.С. Математика в экономике: В 2 ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов. — М.: Финансы и статистика, 1998-1999.

24. Татарников, О. В. Линейная алгебра и линейное программирование для экономистов. : учебник / О. В. Татарников, В. Г. Шершнев, Е. В. Швед. — М. : КноРус, 2020. — 258 с. — (Бакалавриат). — ISBN 978-5-406-07502-9. — URL: <https://book.ru/book/932561> (дата обращения: 02.12.2024). 2 Текст : электронный.

25. Туганбаев, А. А. Линейная алгебра : учебное пособие / А. А. Туганбаев. — 3-е изд., стер. — М. : ФЛИНТА, 2024. — 75 с. — Режим доступа: по подписке. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115141> (дата обращения: 02.12.2024). — ISBN 978-5-9765-1407-2. — Текст : электронный.

26. Тышкевич, Р.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. — Минск.: Вышэйшая школа, 1997.

27. Яблонский, А. И. Высшая математика : общий курс : учебник для студентов экономических специальностей вузов / под общ. ред. Самаля С. А. — 2-е изд., перераб. — Минск : Выш.шк., 2000. — 351 с. : ил., табл.

Контроль качества усвоения знаний

Диагностика качества усвоения знаний проводится в рамках текущей и промежуточной аттестаций.

Мероприятия *текущей аттестации* проводятся в течение семестра и включают в себя следующие формы контроля:

- контрольная работа;
- экспресс-опрос на аудиторных занятиях;
- опрос;
- учебное задание;
- математический диктант.

Текущая аттестация по учебной дисциплине проводится три раза в семестр.

Результаты текущей аттестации за семестр, полученные в ходе проведения мероприятий текущей аттестации, оцениваются отметкой в баллах по десятибалльной шкале и отражаются в ведомости текущей аттестации по учебной дисциплине.

Требования к обучающемуся при прохождении промежуточной аттестации.

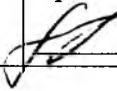
Обучающиеся допускаются к промежуточной аттестации по учебной дисциплине при условии успешного прохождения текущей аттестации (выполнения мероприятий текущего контроля) по учебной дисциплине, предусмотренной в текущем семестре данной учебной программой.

Промежуточная аттестация проводится в форме зачета, экзамена.

Методика формирования отметки по учебной дисциплине

В соответствии с Положением о рейтинговой системе оценки знаний, умений и навыков студентов БГЭУ.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ С ДРУГИМИ УЧЕБНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название учебной дисциплины, изучение с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1	2	3	4
1. Математический анализ	Кафедра высшей математики	Замечаний и предложений нет  А.В. Марков	<i>Протокол №4 от 15.11.24г.</i>

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

(Регистрационный № _____ от _____)
на ____/____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
математических методов в экономике
(протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой,

УТВЕРЖДАЮ