

лами от 2 до 10. Необходимо решить задачу коммивояжера — найти оптимальный маршрут поставки продукции в каждый пункт, который бы минимизировал суммарное расстояние.

На основании данных сайта «Яндекс.Карты» (Минск) была составлена матрица расстояний d_{ij} (в км) между пунктами 1–10. Так как количество пунктов доставки не слишком велико, для решения задачи можно воспользоваться возможностями надстройки «Поиск решения» программы Microsoft Excel, который после задания ему условий задачи коммивояжера (1)–(4) осуществит полный перебор всех возможных вариантов решения с целью планирования наилучшего маршрута.

Исходный маршрут: п. № 1 → п. № 2 → п. № 3 → п. № 4 → п. № 5 → п. № 6 → п. № 7 → п. № 8 → п. № 9 → п. № 10 → п. № 1. Протяженность: 58,94 км.

Оптимизированный маршрут: п. № 1 → п. № 6 → п. № 4 → п. № 8 → п. № 7 → п. № 10 → п. № 3 → п. № 2 → п. № 9 → п. № 5 → п. № 1. Протяженность: 32,65 км.

Согласно полученному с помощью программы решению протяженность оптимального, т.е. наиболее короткого, маршрута составит всего 32,65 км. Для сравнения: в случае поставки продукции в исходном порядке протяженность маршрута составила бы 58,94 км, что почти в два раза длиннее протяженности найденного маршрута. Таким образом, мы видим, что оптимальное решение задачи коммивояжера может значительно сэкономить ресурсы и улучшить экономические показатели предприятия.

И с т о ч н и к

1. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Г. О. Читая [и др.] ; под ред. Г. О. Читая, С. Ф. Миксюк. — Минск : БГЭУ, 2018. — 511 с.

А. С. Латышев

*Научный руководитель — И. В. Денисейко
БГЭУ (Минск)*

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ЗАДАНЫМИ КРИВЫМИ НА ПЛОСКОСТИ

В современном мире существует насущная проблема нахождения плана наиболее дешевого соединения некоторых объектов, в особенности при построении автомобильных дорог и железнодорожных путей.

Предлагаемая математическая оптимизационная модель позволяет однозначно решить данную задачу для случая, где необходимо прямое соединение.

Модель имеет следующий вид.

$$f = \alpha S + \int_0^S Z \left(x, \frac{x}{x_2 - x_1} + \frac{y}{y_2 - y_1} - \frac{x_1}{x_2 - x_1} \right) dx \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$\begin{cases} \omega_1(x_1, y_1) = 0, \\ \omega_2(x_2, y_2) = 0, \\ x_j \in R, y_j \in R \quad (j = \overline{1, 2}); \end{cases} \quad (2)$$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (3)$$

где $(x_1; y_1)$ — координаты начала соединения; $(x_2; y_2)$ — координаты конца; α — чистая цена создания единицы длины соединения; S — расстояние между первой и второй точками соединения; $Z(x, y)$ — некоторая функция, описывающая неоднородность пространства; $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ — соответственно первый и второй объекты, между которыми строится соединение, описанные функционально.

Выражение (1) является целевой функцией и включает в себя две компоненты: цену построения соединения без учета влияния неоднородности пространства и интеграл, описывающий влияние неоднородности пространства.

Система ограничений (2) задает необходимость принадлежности точек начала и конца соединения к первому и второму соединяемым объектам соответственно. Важно понимать, что система ограничений может быть модифицирована иными дополнительными ограничениями, вытекающими из постановок конкретных задач. Конкретный алгоритм решения продемонстрируем на примере.

Существуют две дороги, расположенные в болотистой местности. Для оптимизации транспортной системы необходимо построить соединение между этими дорогами.

Положим на карту координатную сетку таким образом, чтобы район предполагаемого наибольшего сближения находился в первой координатной четверти. Интерполируем дороги квадратичной и кубической интерполяцией. Также для района наибольшего сближения интерполируем функцию неоднородности тригонометрическими методами интерполяции. Величина Z из соотношения (1) будет означать цену преодоления неоднородности, в нашем случае это будет цена в миллионах белорусских рублей преобразования болот в почву, пригодную для строительства дорог, α примем равным 1 млн бел. руб. Подставим все данные в (1) и (2), получим:

$$\begin{aligned} f = \alpha S + \int_0^S & \left(- \left(0,5x + 6 \sin(x) + 4 \sin \left(2 \frac{x}{x_2 - x_1} + \frac{y}{y_2 - y_1} - \frac{x_1}{x_2 - x_1} - 5 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 0,01 \left(\frac{x}{x_2 - x_1} + \frac{y}{y_2 - y_1} - \frac{x_1}{x_2 - x_1} - 30 \right)^2 \right) + 110 \right) dx \rightarrow \min; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{cases} y_1 - 0,1x_1^3 - x_1^2 + 3x_1 + 2 = 0, \\ y_2 - 0,5x_2^2 + 1,5x_2 + 10 = 0, \\ x_j \in R, \quad y_j \in R \quad (j = \overline{1,2}). \end{cases} \quad (5)$$

Решение задачи (4)–(5) предлагается получить методом множителей Лагранжа, а для решения возникающей в методе Лагранжа системы нелинейных уравнений использовать метод Ньютона. Результаты решения представленной задачи получены в среде MATLAB. Затраты на самое дешевое соединение составят 578,34 млн бел. руб. Соединение следует начать в точке (2; 5) и закончить в точке (1,5; 11).

А. А. Любаев

*Научный руководитель — А. С. Лемешевский
БГЭУ (Минск)*

МОДЕЛЬ ШАРПА. ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

Моделирование портфелей ценных бумаг является специфической задачей составления такого сочетания ценных бумаг, которое бы удовлетворяло выбранной инвестиционной стратегии. Анализ потенциальных портфелей ценных бумаг для инвестирования является комплексной задачей, основу которой составляют методы математической оптимизации, метрики оценки ценных бумаг, заданные ограничения и предпочтения инвестора [3].

Модель Шарпа основана на портфельной теории Марковица, направленной на оптимальный выбор активов, исходя из требуемого соотношения доходность / риск [2]. Критерием оптимального портфеля в модели является максимальный коэффициент Шарпа, определяемый по формуле [5]:

$$Sharpe = \frac{r - r_f}{\sigma_p}, \quad (1)$$

где r — средняя доходность портфеля; r_f — безрисковая ставка; σ_p — стандартное отклонение доходности портфеля.

Формирование оптимального портфеля проводилось на исторических данных за 5 лет о ценах закрытия акций четырех компаний: Apple, AMD, Microsoft и Tesla [1]. Результатом вычислений является портфель с максимальным значением коэффициента Шарпа (см. таблицу).