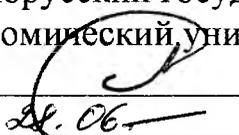


Учреждение образования  
«Белорусский государственный экономический университет»

**УТВЕРЖДАЮ**

Ректор учреждения образования  
«Белорусский государственный  
экономический университет»

  
\_\_\_\_\_ А.В.Егоров

\_\_\_\_\_ 2024 г.

Регистрационный № УД 5945-24уч.

## **ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ**

Учебная программа учреждения образования  
по учебной дисциплине для специальности  
6-05-0533-09 «Прикладная математика»

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта общего высшего образования ОСВО 6-05-0533-09-2023 и учебного плана по специальности 6-05-0533-09 «Прикладная математика».

### **СОСТАВИТЕЛИ:**

А.В. Марков, заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

В.А. Рабцевич, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

Н.Н. Коваленко, профессор кафедры общей математики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Ю.Л. Ратушева, доцент кафедры математических методов в экономике учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет»  
(протокол № 8 от 27.03.2024 )

Методической комиссией по специальностям «Экономическая кибернетика (по направлениям)», «Прикладная математика», «Экономика (профилизация «Анализ данных в экономике и бизнесе») учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет»  
(протокол № 9 от 02.05.2024 );

Научно-методическим советом учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет»  
(протокол № 8 от 27.06.2024 )

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по учебной дисциплине «Числовые и функциональные ряды» направлена на расширение фундаментальной части запаса знаний, необходимых будущим специалистам в процессе учебы и в дальнейшем для успешной работы и знакомит студентов со способами исследования сходимости рядов и свойств функций, задаваемых как суммы функциональных рядов. Владение этими инструментами необходимо специалисту в области прикладной математики при построении и изучении математических моделей реальных процессов. Изучаемые методы базируются на использовании предельного перехода, дифференциального и интегрального исчисления.

**Цели** преподавания учебной дисциплины «Числовые и функциональные ряды»:

- изучение базовых методов исследования сходимости рядов и свойств функций, задаваемых как суммы функциональных рядов.
- формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
- формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
- овладение методами и средствами приобретения новых знаний, используя современные информационные технологии;
- формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений.

Достижение поставленных целей предполагает решение следующих задач при изучении учебной дисциплины:

- дать студентам базу, необходимую для усвоения материала учебных дисциплин учебного плана специальности;
- сформировать составную часть банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

В результате изучения учебной дисциплины «Числовые и функциональные ряды» формируются следующие базовые профессиональные компетенции:

**БПК-1:** Решать математические задачи и строить логические цепочки утверждений.

**БПК-2:** Применять основы дифференциального и интегрального исчисления, методы математического анализа к решению прикладных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен:

**знать:**

- основные методы исследования сходимости числовых рядов;
- методы исследования функций, задаваемых как предел функциональной

последовательности или как сумма функционального ряда;  
 – представление функций в виде сумм степенных рядов.

**уметь:**

- исследовать числовые ряды на сходимость;
- находить множество сходимости функциональных рядов;
- изучать свойства суммы функционального ряда;
- строить разложение функций в степенные ряды на заданном множестве.

**владеть:**

- основным аппаратом математического анализа;
- навыками исследования сходимости рядов;
- навыками исследования функциональных зависимостей методами математического анализа;
- навыками построения математических моделей естественных процессов.

В рамках образовательного процесса по данной учебной дисциплине студент должен приобрести не только теоретические и практические знания, умения и навыки по специальности, но и развивать свой ценностно-личностный, духовный потенциал, сформировать качества патриота и гражданина, готового к активному участию в экономической, производственной, социально-культурной и общественной жизни страны.

Учебная дисциплина «Числовые и функциональные ряды» входит в модуль «Математический анализ» и относится к государственному компоненту учебного плана специальности.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимо усвоение дисциплины «Математический анализ». Учебная дисциплина «Числовые и функциональные ряды» важна при изучении учебных дисциплин «Несобственные интегралы», «Теория функций комплексного переменного», «Уравнения математической физики», «Численные методы», «Численные методы математической физики», «Теория вероятностей и математическая статистика».

Форма получения высшего образования: дневная.

В соответствии с учебным планом университета на изучение учебной дисциплины отводится:

общее количество учебных часов – 216, аудиторных – 72 часа, из них лекции 36 часов, практические занятия – 36 часов.

Распределение аудиторного времени по курсам и семестрам:

3 семестр - лекции 36 часов, практические занятия – 36 часов.

Самостоятельная работа студента – 144 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### Раздел 1. Числовые ряды

#### *Тема 1.1. Числовой ряд*

Числовой ряд. Сходимость ряда, сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Геометрический и гармонический ряды. Критерий Коши сходимости числового ряда.

#### *Тема 1.2. Признаки сходимости и расходимости рядов*

Положительные ряды. Критерий сходимости положительного ряда. Признаки сходимости, основанные на сравнении положительных рядов. Признаки сходимости Коши, Даламбера, интегральный, Дюамеля-Раабе, Гаусса и др. Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Абсолютная сходимость.

#### *Тема 1.3. Действия над рядами*

Линейная комбинация рядов. Группировка членов ряда. Перестановка членов ряда. Перемножение рядов. Двойные и повторные ряды. Понятие о других способах суммирования рядов.

### Раздел 2. Функциональные последовательности и ряды

#### *Тема 2.1. Функциональные последовательности*

Сходимость функциональных последовательностей. Предельная функция. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. Супремальный критерий равномерной сходимости.

#### *Тема 2.2. Функциональные ряды*

Множество сходимости функционального ряда. Функция, определяемая как сумма ряда. Равномерная сходимость функционального ряда. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

#### *Тема 2.3. Свойства суммы функционального ряда и предельной функции последовательности*

Предельный переход в рядах. Непрерывность суммы ряда и предельной функции последовательности. Теорема Дини. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов и последовательностей.

#### *Тема 2.4. Степенные ряды*

Степенной ряд. Теорема Абеля. Множество сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Свойства суммы степенного ряда. Представление функций степенными рядами. Ряд Тейлора.

Основные степенные разложения и их приложения.

### Раздел 3. Ряды Фурье

#### *Тема 3.1. Ортогональные системы функций*

Скалярное произведение функций. Норма функции. Ортогональные системы функций. Тригонометрическая система. Свойства функций

тригонометрической системы. Тригонометрический многочлен. Приближение функций тригонометрическими многочленами. Многочлен Фурье для заданной функции. Ряд Фурье.

### ***Тема 3.2. Сходимость ряда Фурье***

Принцип локализации. Теорема Римана-Лебега. Сходимость ряда Фурье в точке. Равномерная сходимость ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье в среднем. Равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость тригонометрической системы.

### ***Тема 3.3. Свойства суммы ряда Фурье***

Обобщенное равенство Парсеваля. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье. Ряд Фурье четной (нечетной) функции. Разложение функций в ряды Фурье. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции многочленами.

# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ»

Дневная форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов							Литература	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Количество часов управляемой самостоятельной работы				
						лекции	практические занятия	семинарские занятия		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
<b>3 семестр</b>										
<b>1</b>	<b>Раздел 1. Числовые ряды</b>									
Тема 1.1	Числовой ряд	2							ЭК, [1, 4, 5]	Экспресс-опрос
	Числовой ряд		2						[1-3, 6]	Выборочный опрос. Решение задач.
Тема 1.2	Признаки сходимости и расходимости рядов	4							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос.
	Признаки сходимости и расходимости рядов		4						[1-3, 6]	Выборочный опрос. Решение задач.
Тема 1.3	Действия над рядами	2							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос.
			4						[1-3, 6]	Решение задач. Проверка конспекта. Контрольная работа.
<b>2</b>	<b>Раздел 2. Функциональные последовательности и ряды</b>									
Тема 2.1	Функциональные последовательности	4							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос
	Функциональные последовательности		4						[1, 2, 6]	Выборочный опрос.

										Решение задач.
Тема 2.2	Функциональные ряды	4							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос.
	Функциональные ряды		4						[1, 2, 6]	Выборочный опрос. Решение задач.
Тема 2.3	Свойства суммы функционального ряда и предельной функции последовательности	6							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос.
	Свойства суммы функционального ряда и предельной функции последовательности		6						[1, 2, 6]	Выборочный опрос. Решение задач.
Тема 2.4	Степенные ряды	4							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос.
	Степенные ряды		4						[1-3, 6]	Решение задач. РГР.
3	<b>Раздел 3. Ряды Фурье</b>									
Тема 3.1	Ортогональные системы функций	2							ЭК, [1, 4, 5]	
	Ортогональные системы функций		2						[1, 2, 6]	Выборочный опрос. Решение задач.
Тема 3.2	Сходимость ряда Фурье	4							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос.
	Сходимость ряда Фурье		4						[1, 2, 6]	Решение задач. Контрольная работа.
Тема 3.3	Свойства суммы ряда Фурье	4							ЭК, [1, 4, 5]	Выборочный опрос.
	Свойства суммы ряда Фурье		2						[1, 2, 6]	Выборочный опрос. Решение задач. Проверка конспекта.
	<b>Итого 3 семестр</b>	<b>36</b>	<b>36</b>							<b>Экзамен</b>
	<b>Всего часов</b>	<b>36</b>	<b>36</b>							

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### ЛИТЕРАТУРА

#### Основная:

1. Кастрица, О.А. Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы: учебное пособие / О. А. Кастрица, С. А. Мазаник, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. — Минск : Вышэйшая школа, 2015. — 389 с. — ISBN 978-985-06-2636-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/75146> (дата обращения: 30.03.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Рябушко, А. П. Высшая математика: теория и задачи : учебное пособие в 5 частях / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. — Минск : Вышэйшая школа, [б. г.]. — Часть 3: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы — 2017. — 319 с. — ISBN 978-985-06-2798-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/97305> (дата обращения: 30.03.2024). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Сборник задач и упражнений по высшей математике для студентов экономических специальностей: В 2 ч. Ч. 2 / [Л.Н. Гайшун и др.]. - Минск : БГЭУ, 2014. - 270 с. - Библиогр.: с. 269-270. - ISBN 978-985-484-613-2

#### Дополнительная:

4. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов. В 2 т. Т. 2. - 6-е изд. - Минск : ТетраСистемс, 2007. - 445 с. : ил. - Библиогр.: с. 433. - ISBN 978-985-470-581-1
5. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник / Кудрявцев Л.Д., - 4-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 444 с.: ISBN 978-5-9221-1585-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/854332> (дата обращения: 30.03.2024). — Режим доступа: по подписке.
6. Сборник задач по математическому анализу : учебное пособие : в 3 т. Том 2. Интегралы. Ряды / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин ; под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 504 с. - ISBN 978-5-9221-0307-07. - Текст: электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1223517> (дата обращения: 30.03.2024). — Режим доступа: по подписке.
7. Жукова, Г. С. Математический анализ. Том 2 : учебник / Г. С. Жукова, М. Ф. Рушайло; под ред. Г. С. Жуковой. — М.: ИНФРА-М, 2020. — 518 с. — ISBN 978-5-16-015968-3. — Текст: электронный. — URL: <https://znanium.com/catalog/product/1072172> (дата обращения: 30.03.2024). — Режим доступа: по подписке.

### Перечень вопросов для проведения экзамена

1. Числовой ряд. Сходимость, сумма. Необходимое условие сходимости. Критерий Коши.
2. Положительные ряды. Критерий сходимости. Геометрический и гармонический ряд.
3. Признаки сравнения для рядов.
4. Признаки сходимости Даламбера и Коши.
5. Интегральный признак сходимости рядов. Степенной признак.
6. Признаки Дюамеля-Раабе и Гаусса.
7. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная сходимость.
8. Преобразование Абеля. Признак Дирихле для Рядов.
9. Лемма Абеля. Признак Абеля сходимости числового ряда.
10. Критерий абсолютной сходимости. Условия условной сходимости.
11. Группировка и перестановка членов ряда.
12. Функциональные последовательности и ряды. Принцип переноса результатов.
13. Равномерная сходимость. Критерий Коши.
14. Признак Вейерштрасса для рядов.
15. Супремальный критерий.
16. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов.
17. Почленный предельный переход в рядах и последовательностях. Теорема Стокса-Зейделя.
18. Теорема Дини. Почленное интегрирование рядов и последовательностей.
19. Почленное дифференцирование рядов и последовательностей. Использование локальной равномерной сходимости.
20. Степенной ряд. Теорема Абеля.
21. Радиус и промежуток сходимости степенного ряда.
22. Свойства суммы степенного ряда.
23. Разложение функции в степенной ряд. Условия и критерий разложимости.
24. Основные разложения в степенной ряд.
25. Формула Стирлинга.
26. Суммирование рядов по методу Чезаро. Линейность и регулярность метода Чезаро.
27. Суммирование рядов по методу Абеля-Пуассона. Линейность и регулярность метода Абеля - Пуассона.
28. Ортогональные функции. Ортогональность тригонометрической системы.
29. Норма функции.
30. Тригонометрический многочлен наименьшего отклонения.
31. Ряд Фурье. Ряд Фурье для периодической функции. Ряд Фурье для четной (нечетной) функции.
32. Ядро Дирихле.
33. Теорема Римана-Лебега.
34. Принцип локализации. Сходимость ряда Фурье в точке.
35. Ряд Фурье  $2l$ -периодической функции. Разложение функций в ряд по синусам, по косинусам.

36. Свойства коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
37. Сходимость в среднем ряда Фурье. Равенство Парсеваля.
38. Равномерная сходимость ряда Фурье.
39. Свойства суммы ряда Фурье.  
Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье.

## **Организация самостоятельной работы студентов**

В овладении знаниями учебной дисциплины важным этапом является самостоятельная работа студентов. На самостоятельную работу обучающегося дневной формы получения образования отводится 144 часа.

Содержание самостоятельной работы обучающихся включает все темы учебной дисциплины из раздела «Содержание учебного материала».

При изучении учебной дисциплины используются следующие формы самостоятельной работы:

- самостоятельная работа в виде решения индивидуальных задач в аудитории во время проведения практических занятий под контролем преподавателя в соответствии с расписанием учебных занятий;
- углубленное изучение разделов, тем, отдельных вопросов, понятий;
- выполнение расчетно-графических работ;
- подготовка к выполнению контрольных работ;
- подготовка к практическим занятиям;
- работа с учебной, справочной, аналитической и другой литературой и материалами;
- составление обзора научной литературы по заданной теме;
- подготовка к сдаче промежуточной аттестации.

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Числовые и функциональные ряды» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале и в электронной библиотеке комплекс учебных, учебно-методических материалов и средств самодиагностики.

### **Контроль качества усвоения знаний**

Диагностика качества усвоения знаний проводится в рамках текущего контроля и промежуточной аттестации.

Мероприятия *текущего* контроля проводятся в течение семестра и включают в себя следующие формы контроля:

- контрольная работа;
- расчетно-графическая работа;
- экспресс-опрос на аудиторных занятиях;
- выборочный опрос;
- учебное задание;
- иные формы.

Результат текущего контроля за семестр оценивается отметкой в баллах по десятибалльной шкале и выводится исходя из отметок, выставленных в ходе проведения мероприятий текущего контроля в течение семестра.

Требования к обучающемуся при прохождении промежуточной аттестации.

Обучающиеся допускаются к промежуточной аттестации по учебной дисциплине при условии успешного прохождения текущей аттестации (выполнения всех контрольных работ со средней оценкой не ниже 4 баллов) по учебной дисциплине, предусмотренной в текущем семестре данной учебной программой.

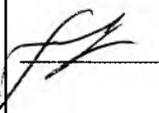
Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена.

#### **Методика формирования отметки по учебной дисциплине**

В соответствии с Положением о рейтинговой системе оценки знаний, умений и навыков студентов БГЭУ (приказ ректора от 20.12.2014 2014 № 1136-А), отметка по учебной дисциплине формируется с учетом сводного рейтинга Гсв и оценки письменно-устного ответа на экзамене как их взвешенная сумма с коэффициентами 0,4 и 0,6 с последующим округлением до целого. При получении оценки 4 и выше экзамен считается сданным успешно.

Рейтинг Гсв формируется суммированием средней оценки по контрольным работам (рейтинг Госн) и активности на аудиторных занятиях (рейтинг Гауд) с коэффициентами 0,7 и 0,3.

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ  
С ДРУГИМИ УЧЕБНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

Название учебной дисциплины, которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Уравнения математической физики	Кафедра высшей математики	Замечаний и предложений нет  Заведующий кафедрой высшей математики, канд. физ.-мат. наук, доцент   А.В. Марков	Учебную программу по учебной дисциплине «Числовые и функциональные ряды» рекомендовать к утверждению (протокол № 8 от 27 марта 2024).