

M. DymkovA. Astrovskii
BSEU (Minsk)**V. Goryachkin**

BSU (Minsk)

STABILITY AND STABILIZATION OF LINEAR DISCRETE NONSTATIONARY VOLTERRA EQUATIONS

In this article, a discrete nonstationary linear dynamic systems of Volterra type equations are investigated. An essential feature of such kind systems is that their current states depend on the previous states of this system. Application areas including economic processes are discussed. The solutions of systems of Volterra type equations are represented by Cauchy matrix. The necessary and sufficient conditions of stability, asymptotic stability, exponential stability and stabilization are proved. The given conditions are expressed in terms of Cauchy matrix. Also the problems of stability and stabilization for perturbed system are studied. The estimate of disturbances on matrix norms which guaranteeing the asymptotic stability and stabilization are obtained. The procedure of construction the dynamic regulator for stabilization is proposed.

Keywords: mathematical modelling; discrete nonstationary linear systems of Volterra equations; Cauchy matrix; stability; asymptotic stability; exponential stability; stabilization; robust dynamic regulator; pseudo-inverse matrix.

М. П. Дымков

доктор физико-математических наук, профессор

А. И. Астровскийдоктор физико-математических наук, профессор
БГЭУ(Минск)**В. В. Горячкин**кандидат физико-математических наук, доцент
БГУ (Минск)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ

Исследуются дискретные нестационарные линейные системы уравнений Вольтерры, особенностью которых является зависимость каждого последующего состояния от всей предыстории процесса. Описаны возможности применения таких систем для математического моделирования различных, в том числе и экономических, процессов. Решения систем уравнений Вольтерры представлены через матрицы Коши. Установлены необходимые и достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости, экспоненциальной устойчивости и стабилизируемости. Представленные условия выражены в виде определенных ограничений на нормы матриц Коши. Рассмотрены задачи устойчивости

и стабилизации возмущенной системы и получены оценки на нормы матриц возмущений, при выполнении которых сохраняются асимптотическая устойчивость и возможность стабилизации решений. Предложена процедура построения матриц динамического регулятора для задачи стабилизации.

Ключевые слова: математическое моделирование; дискретные нестационарные линейные системы уравнений Вольтерры; матрицы Коши; устойчивость; стабилизируемость; робастность; динамический регулятор; псевдообратная матрица.

Введение. Системы уравнений с дискретным временем достаточно широко используются при математическом моделировании в различных областях естествознания. Особенно популярны дискретные системы при описании экономических процессов в условиях различных типов конкуренции. Первые математические модели конкуренции, разработанные для биологических популяций, принадлежат, по-видимому, Вольтерре [1]. В системе экономических взаимоотношений, как и в системе взаимоотношений между популяциями в биоценозах, между производителями товаров и услуг существует конкуренция [2–4]. Она носит разнообразный характер, по-разному влияет на эволюцию производств и систему перераспределения ресурсов [5–8]. Производители материальных ценностей ищут различные способы уменьшения внутренних потерь («внутренняя конкуренция») [9–12] и ослабления внешних факторов («межвидовая конкуренция»), мешающих увеличению собственных материальных ценностей. В экономической системе взаимоотношений производители в конечном итоге также ищут свою «экономическую нишу». Аналогичные процессы происходят и на международном рынке товаров и услуг. Здесь происходит самоорганизация производителей внутри страны, приводящая к такому перераспределению реализуемых ресурсов, при котором потребность в них на международном рынке постоянно растет, несмотря на конкуренцию между странами.

Наряду с моделями конкуренции Вольтерры были разработаны и иные математические модели конкуренции в системе экономических взаимоотношений. В литературе известны варианты математических моделей ухода от конкуренции или, другими словами, ухода фирмы в другую экономическую нишу. Математические модели конкуренции в экономике можно разрабатывать и на основе моделей, описывающих системы взаимоотношений биологических популяций (например, хищник–жертва, симбиоз). На конкуренцию в системе экономических взаимоотношений может влиять выбор оптимальной стратегии предприятия, умение принимать решения в условиях неполноты информации, рациональный ответ на внешнее воздействие, переход от конкуренции к партнерству, уменьшение внутренних потерь за счет формирования «грамотного» персонала. Математические модели эволюционных изменений во взаимоотношениях между конкурирующими фирмами могут объяснить возможные механизмы «ухода» от конкуренции либо путем изменения внутренней структуры отдельных фирм, либо постепенным уходом части фирм на новую «территорию». Наряду с этим возможно совместное существование нескольких фирм в условиях «жесткой» конкуренции, если она является «сезонной».

Учет большего числа факторов в математических моделях приведет и к увеличению искомым функций, для нахождения которых необходимы и соответствующие методы решения математических задач. Поэтому математическое

исследование систем дискретных уравнений различного типа весьма актуально для адекватного математического моделирования в экономике. Это, во-первых, связано с повсеместным применением компьютерной техники в управлении различными процессами. Кроме того, дискретные системы являются достаточно удобным инструментом изучения многих процессов и систем на стадии их математического моделирования.

Приведем два экономических примера, математическое моделирование которых приводит к дискретным системам [20].

Одной из актуальных задач является изучение процессов миграции населения в окрестности крупных городов. Такое исследование полезно при планировании на длительное время развития пригородных и других населенных пунктов. Пусть имеется m населенных пунктов $H_1, H_2, \dots, H_m$ и между ними происходит миграция населения следующим образом: для любой пары городов (i, j) ($i \neq j$) в каждый t -й день часть $a_{ij}(t)$ жителей пункта H_j переезжает в пункт H_i , а другая часть $a_{jj}(t)$ остается на месте. Обозначим через $x_i(t)$ население H_i пункта в t -й день. Тогда население пункта H_i на следующий $(t+1)$ день составляет

$$x_i(t+1) = a_{i1}(t)x_1(t) + a_{i2}(t)x_2(t) + \dots + a_{im}(t)x_m(t), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Если ввести обозначения

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in \mathbb{R}^m, \quad A(t) = (a_{ij}(t)), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

то получим линейную нестационарную дискретную систему уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

где n – число дней, в течение которых происходит миграция.

При планировании развития инфраструктуры населенных пунктов (служб сервиса, снабжения, транспортного сообщения и др.) необходимо исследовать поведение $x(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, т. е. устойчивость таких систем, а также провести необходимые мероприятия для стабилизации уровня численности населения рассматриваемых населенных пунктов.

Характерной особенностью дискретных систем уравнений с последействием является зависимость каждого ее состояния от всей (или части) предыстории процесса [14–15]. Среди таких систем уравнений особое место занимают уравнения Вольтерра, у которых состояние в каждый момент времени зависит от всей предыстории процесса. С помощью систем уравнений Вольтерра моделируются различные процессы ценообразования, производственные процессы с учетом запаздывания поставок ресурсов и т. д.

Рассмотрим пример из области производственных (технологических) процессов. Пусть имеется циклический конвейер, по которому осуществляется транспортировка некоторых объектов (сырье, изделия и т. п.). Предположим, что в дискретные моменты времени $j = 0, 1, 2, \dots$ извлекается один объект с вероятностью $p(j)$, $p(j) > 0$, $j \geq 1$, $p(0) = p_0 = 0$. Как только один объект извлечен, то конвейер пополняется новым объектом. Предположим, что первый объект извлекли в момент t_1 , второй объект – в момент $t_1 + t_2$ и т. д., в $(k+1)$ -й момент $t_1 + t_2 + \dots + t_k$ извлекли k -й объект. Обозначим через $x(t+1)$ среднее значение числа извлеченных из конвейера объектов к моменту $t+1$. Если первый раз объект извлекли в момент j ,

то среднее значение количества извлеченных с конвейера объектов в оставшееся время $j+1, j+2, \dots, t+1$ согласно введенным обозначениям составляет $x(t+1-j)$. Тогда для переменной $x(t)$ имеем уравнение:

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^{t+1} (1 + x(t+1-j))p(j) = \sum_{j=0}^t (1 + x(t-j))p(j+1), \quad t > 0,$$

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^t p(j+1)x(t-j) + f(t), \quad f(t) = \sum_{j=0}^t p(j+1).$$

Полученное уравнение является уравнением Вольтерры. Важность рассмотрения систем дискретных уравнений Вольтерры объясняется не только их самостоятельной теоретической и прикладной значимостью, но и возможностями, которые открываются при изучении уравнений Вольтерры с непрерывным временем на основе их аппроксимации дискретными уравнениями с последующим применением предельного перехода при стремлении к нулю шага аппроксимации. Устойчивость дискретных уравнений Вольтерры в рамках второго метода Ляпунова детально исследовалась в работах В. Б. Колмановского и И. В. Гайшуна [16–17]. Однако отсутствие универсальных методов построения функций Ляпунова стимулирует исследования по разработке новых подходов и алгоритмов. В исследованиях И. В. Гайшуна разработан метод изучения устойчивости линейных дискретных уравнений Вольтерры, который основан на специальных уравнениях сравнения [18–20]. Этот метод оказался эффективным и для других классов динамических систем.

В данной работе развивается метод сравнения применительно к исследованию устойчивости, асимптотической устойчивости систем линейных нестационарных дискретных уравнений Вольтерры. Получены критерии устойчивости, асимптотической устойчивости, а также достаточные условия стабилизируемости, которые позволяют определять матричные параметры регуляторов, являющихся операторами Вольтерры в пространстве последовательностей. Обсуждается проблема робастной устойчивости и робастной стабилизируемости. Устойчивость и стабилизируемость понимаются в стандартном смысле: асимптотическая устойчивость как стремление решений задачи Коши к нулю, а стабилизируемость как возможность построения динамического регулятора, выход которого порождает управление, гарантирующее асимптотическую устойчивость решений замкнутой системы.

1. Представление решений. Рассмотрим систему линейных нестационарных дискретных однородных уравнений Вольтерры:

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^t A_j(t)x(t-j), \quad (t=0,1,\dots), \quad (1)$$

в которой $A_j(t)$ – заданные $(n \times n)$ -вещественные матрицы; $x(t)$ – n -вектор-столбец решения в момент времени t . Обозначим через $x(t) = x(t, v)$ решение системы (1) с начальным условием:

$$x(0) = v \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение $(n \times n)$ -матрицы $F_j(t)$ ($t=0,1,\dots; j=0,1,\dots,t$) по

рекуррентным соотношениям:

$$F_j(t) = \sum_{i=0}^{t-1} A_i(t-1)F_j(t-i-1) \quad (t=1,2,\dots; j=0,1,\dots,t),$$

$$F_j(j) = E, \quad F_j(i) = 0 \quad (j > i) \quad (i, j = 0, 1, \dots, t). \quad (3)$$

Здесь E – единичная $(n \times n)$ -матрица. Матрицы $F_j(t)$ будем называть матрицами Коши.

Из [21] следует, что решение $x(t) = x(t, v)$ ($t \geq 0$) задачи (1), (2) определяется по формуле Коши:

$$x(t, v) = F_0(t)v, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

2. Устойчивость. Следуя [13; 20], приведем определения устойчивости, асимптотической устойчивости и экспоненциальной устойчивости системы (1).

Пусть $|z|$ обозначает евклидову норму вектора z в пространстве $\mathbb{R}^n$, а $\|G\|$ – согласованную с ней норму матрицы G , которая определяется следующим образом: $\|G\| = \max_{|z|=1} |Gz|$.

Определение 1. Говорят, что система (1) *устойчива*, если существует такая постоянная величина $c > 0$, что для любых начальных условий $x(0) = v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $|x(t, v)| \leq c|v|$, ($t \geq 0$).

Если же $x(t, v) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то систему (1) называют *асимптотически устойчивой*.

Определение 2. Систему (1) называют *экспоненциально устойчивой*, если можно указать такие постоянные величины c и q ($c > 0$, $0 < q < 1$), при которых выполняется условие $|x(t, v)| \leq c|v|q^t$ ($t \geq 0$), каким бы ни было решение $x(t, v)$ системы (1).

Ясно, что из экспоненциальной устойчивости следует асимптотическая устойчивость.

Пусть $F_j(t)$ – матрицы, вычисленные по формулам (3). Справедлива

Теорема 1. Система уравнений Вольтерры (1):

1) устойчива тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная c , что $\|F_0(t)\| \leq c$ для любых $t \geq 0$;

2) асимптотически устойчива, если и только если $F_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$;

3) экспоненциально устойчива в том и только том случае, когда найдутся такие постоянные числа c и q ($c > 0$, $0 < q < 1$), что для нормы матрицы Коши верно неравенство $\|F_0(t)\| \leq cq^t$ ($t \geq 0$).

Доказательство. Так как в силу формулы (4) любое решение задачи (1), (2) имеет вид $x(t, v) = F_0(t)v$, то утверждения 1) и 2) теоремы 1 очевидны.

Докажем условие 3). Достаточность следует из представления (4) и из оценки $\|F_0(t)\| \leq cq^t$. Необходимость: пусть система (1) экспоненциально устойчива, т. е. при некоторых $c > 0$ и $0 < q < 1$ выполняются неравенства:

$$|x(t, v)| = |F_0(t)v| \leq c|v|q^t, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Определив матричную норму в момент времени t по правилу $\|F_0(t)\| = \max_{\|v\|=1} |F_0(t)v|$ и взяв максимум с обеих частей неравенства (5), приходим к оценке $\|F_0(t)\| \leq cq^t$, $t \geq 0$. Доказательство завершено.

Проверка приведенных в теореме 1 условий устойчивости для систем Вольтерра (1) на практике часто вызывает определенные трудности. Поэтому, следуя [20], приведем достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости, выраженные через параметры исходной системы (1).

Теорема 2. Пусть при каждом $t = 0, 1, \dots$ нормы $\|A_j(t)\|$, $j = 0, 1, \dots, t$, ограничены некоторыми постоянными L_j , ряд $\sum_{j=0}^{+\infty} L_j$ сходится и его сумма равна L . Если $L \leq 1$, то система (1) устойчива и $|x(t, v)| \leq |v|$ ($t \geq 0$). Если же $L < 1$, то система (1)

асимптотически устойчива.

Приведем ряд обозначений и пояснений, которые будут использованы при реализации метода сравнения для систем уравнений Вольтерра (1).

Пусть $|G|_+$ обозначает матрицу, составленную из абсолютных величин элементов матрицы G . Через $\rho(G)$ обозначим спектральный радиус матрицы G , т. е. число [24]: $\rho(G) = \max(|\lambda| : \lambda \in \text{спектру матрицы } G)$. Здесь $|\lambda|$ — это модуль комплексного числа λ . При условии $\rho(G) < 1$ для любой матричной нормы выполняется [24] неравенство $\rho(G) \leq \|G\|$ и для матрицы $E - G$ существует обратная матрица $(E - G)^{-1}$, а также $G^k \rightarrow O$ при $k \rightarrow \infty$. Здесь O — нулевая матрица.

Теорема 3. Пусть для матриц $A_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots$) существуют такие неотрицательные постоянные матрицы V_j , что в каждый момент времени $t = 0, 1, \dots$ выполняются матричные неравенства $|A_j(t)|_+ \leq V_j$, и матричный ряд $\sum_{j=0}^{+\infty} V_j$ сходится, сумма которого равна матрице V . Тогда система уравнений Вольтерра

(1) устойчива, если для матрицы V ее спектральный радиус $\rho(V) < 1$.

Доказательство. Пусть справедливо неравенство $\rho(V) < 1$. Исходя из системы (1) получим следующие соотношения:

$$|x(1, v)|_+ = |A_0(0)v|_+ \leq V_0|v|_+ \leq V|v|_+ \leq V(E + V + V^2 + V^3 + \dots)|v|_+ = V(E - V)^{-1}|v|_+,$$

$$|x(2, v)|_+ = |A_0(1)x(1, v) + A_1(1)v|_+ \leq (V^2 + V)|v|_+ = V(E + V)|v|_+ \leq V(E - V)^{-1}|v|_+,$$

$$|x(3, v)|_+ = |A_0(2)x(2, v) + A_1(2)x(1, v) + A_2(2)v|_+ \leq (V_0(V_0V + V_1) + V_1V_0 + V_2)|v|_+ \leq$$

$$\leq V(V_0V + V_1 + V_0 + E)|v|_+ \leq V(E + V + V^2)|v|_+ \leq V(E - V)^{-1}|v|_+, \dots$$

Применяя метод математической индукции, получим:

$$|x(t, v)|_+ = |A_0(t-1)x(t-1, v) + A_1(t-1)x(t-2, v) + \dots + A_{t-1}(t-1)v|_+ \leq$$

$$\leq (V^t + V^{t-1} + \dots + V^2 + V)|v|_+ \leq V(E - V)^{-1}|v|_+.$$

Поэтому для всех $t > 0$ $|x(t, v)|_+ \leq V(E - V)^{-1}|v|_+$. Обозначим норму матрицы $V(E - V)^{-1}$ через C . Из вышеизложенного следует неравенство $|x(t, v)| \leq C|v|$ ($t > 0$), которое и доказывает теорему.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 3 система (1) будет асимптотически устойчива. Действительно, пусть $\rho(V) < 1$. Определим действительные постоянные неотрицательные матрицы по правилу:

$$M_0 = V_0, \quad M_{t+1} = \sum_{i=0}^t V_i M_{t-i} + V_{t+1}, \quad (t = 0, 1, \dots).$$

Исходя из системы (1) и формулы (4), последовательно выпишем оценки:

$$\begin{aligned} |x(1, v)|_+ &= |F_0(1)v|_+ = |A_0(0)v|_+ \leq M_0|v|, \\ |x(2, v)|_+ &= |F_0(2)v|_+ = |A_0(1)x(1, v) + A_1(1)v|_+ \leq V_0 M_0|v| + V_1|v| = M_1|v|, \\ |x(3, v)|_+ &= |F_0(3)v|_+ = |A_0(2)x(2, v) + A_1(2)x(1, v) + A_2(2)v|_+ \leq M_2|v|. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя метод математической индукции, получим:

$$|x(t+1, v)|_+ = |F_0(t+1)v|_+ = |A_0(t)x(t, v) + A_1(t)x(t-1, v) + \dots + A_t(t)v|_+ = M_t|v|,$$

т. е. при любом $v \in \mathbb{R}^n$ для $t = 0, 1, \dots$ справедлива оценка решения:

$$|x(t+1, v)|_+ \leq M_t|v|. \quad (7)$$

Покажем, что матричная последовательность $M_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для этого будем суммировать правые части выражений (6) и группировать матрицы при M_j . В результате получим:

$$\begin{aligned} M_0 + M_1 + \dots + M_t &= (V_0 + V_1 + \dots + V_t) + (V_0 + V_1 + \dots + V_{t-1})M_0 + \dots + V_0 M_{t-1} \leq \\ &\leq V(E + M_0 + M_1 + \dots + M_{t-1}). \end{aligned}$$

Полагая $Y_k = M_0 + M_1 + \dots + M_k$, приходим к рекуррентному неравенству:

$$Y_{k+1} \leq VY_k + V, \quad Y_0 = L \quad (k = 0, 1, \dots),$$

решение которого удовлетворяет неравенству:

$$M_0 + M_1 + \dots + M_t = Y_t \leq V + V^2 + \dots + V^t + V^{t+1} \leq V(E - V)^{-1} \quad (t = 0, 1, \dots).$$

Следовательно, матричный ряд $\sum_{t=0}^{\infty} M_t$ сходится, а значит, общий член ряда $M_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому в силу неравенств (7) система (1) асимптотически устойчива. Теорема доказана.

3. Об оценке запаса устойчивости при аддитивных возмущениях. Пусть матрицы системы (1) подвергаются аддитивным матричным возмущениям $\Delta_j(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, для которых в каждый момент времени $t = 0, 1, \dots$ выполняются

неравенства $\|A_j(t)\|_+ \leq V_j$ ($j = 0, 1, \dots, t$). Здесь V_j – неотрицательные постоянные матрицы, и матричный ряд $\sum_{j=0}^{+\infty} V_j$ сходится. В этом случае возмущенная система имеет вид:

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^t (A_j(t) + \Delta_j(t))x(t-j) \quad (t = 0, 1, \dots). \quad (8)$$

Предположим, что для исходной системы (1) выполняются условия теоремы 3. Требуется найти положительное число δ , обладающее свойством: для матрицы

$\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$, абсолютная норма $\|\Omega\|_0 = \left(\sum_{i,j=1}^n \Omega_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ которой меньше δ , матрица $V + \Omega$

сохраняет свойство устойчивости. Здесь число δ играет роль запаса устойчивости матрицы V . Точная верхняя грань δ_0 таких чисел δ будем называть запасом устойчивости матрицы V . Другими словами, необходимо количественно оценить робастность (или грубость системы), т. е. найти оценку величины норм возмущений системы, не нарушающих ее устойчивость [22; 23]. Далее оценим норму возмущений матриц устойчивой дискретной системы Вольтерра, не выводящих эту систему из класса устойчивых.

Оценим спектральный радиус матрицы $V + \Omega$ возмущенной системы: $\rho(V) \leq \rho(V + \Omega) \leq \|V + \Omega\| \leq \|V\| + \|\Omega\| \leq \|V\| + \|\Omega\|_0 = 1$.

Отсюда имеем $\|\Omega\|_0 = 1 - \|V\| \leq 1 - \rho(V) = \delta_0$ и приходим к утверждению

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3, если $\|\Omega\|_0 < \delta_0$, где $\delta_0 = 1 - \rho(V)$, то возмущенная система (8) устойчива.

Число δ_0 играет роль запаса устойчивости дискретной системы (1).

Рассмотрим случай матрицы V с различными характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1 \pm i\eta_1, \mu_2 \pm i\eta_2, \dots, \mu_q \pm i\eta_q, i^2 = -1, p + 2q = n$, а соответствующие им собственные векторы (в комплексном пространстве) через

$$x_1, x_2, \dots, x_p, y_1 \pm iz_1, y_2 \pm iz_2, \dots, y_q \pm iz_q.$$

Положим $e_k = x_k$ ($1 \leq k \leq p$), $e_{p+2k-1} = y_k$ ($1 \leq k \leq q$), $e_{p+2k} = z_k$ ($1 \leq k \leq q$). Эти векторы являются векторами из $\mathbb{R}^n$. Пусть $G(e_1, \dots, e_n)$ – матрица Грама векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, а χ – мера обусловленности этой матрицы, т. е. отношение модулей наибольшего и наименьшего собственных значений матрицы G .

Применяя результаты из [22; 23], приходим к утверждению

Теорема 5. При выполнении условий теоремы 3, если $\|\Omega\|_0 < \delta_0$, где $\delta_0 = (1 - \rho(V))/\sqrt{\chi}$, а χ – мера обусловленности матрицы Грама G , то для матрицы $V + \Omega$ ее спектральный радиус меньше единицы.

Замечание 2. Для оценки спектрального радиуса матрицы V можем также воспользоваться результатом из работы [22]. Если Y множество всех обратимых $(n \times n)$ -матриц, то имеет место равенство $\rho(V) = \min_{T \in Y} \max_{\|x\|=1} |T^{-1}VTx|$, причем минимум по T достигается при $T = T_0$, где T_0 – матрица, столбцами которой являются векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$.

4. Стабилизация. Рассмотрим систему линейных нестационарных дискретных неоднородных уравнений Вольтерры с управлением:

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^t A_j(t)x(t-j) + B(t)u(t) \quad (t=0,1,\dots), \quad x(0)=v, \quad (9)$$

где $A_j(t)$ и $B(t)$ заданные $(n \times n)$ и $(n \times m)$ – вещественные матрицы соответственно; $\{x(t), t \geq 0\}$ – неизвестная последовательность со значениями в $\mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие в момент времени t . В качестве допустимых управлений будем выбирать функции, построенные по принципу обратной связи:

$$u(t) = \sum_{j=0}^t C_j(t)x(t-j) \quad (t=0,1,\dots), \quad (10)$$

где матричные функции $C_j(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Задача о стабилизации заключается в нахождении таких матриц $C_j(t)$, что нулевое решение $x(t) \equiv 0$ системы

$$x(t+1) = \sum_{j=0}^t (A_j(t) + B(t)C_j(t))x(t-j) \quad (t=0,1,\dots) \quad (11)$$

асимптотически устойчиво. Воспользуемся предыдущей схемой исследования асимптотической устойчивости системы (1). Введем в рассмотрение $(n \times n)$ -матрицы $P_j(t)$ ($t=0,1,\dots; j=0,1,\dots,t$) по рекуррентным соотношениям:

$$P_j(t) = \sum_{i=0}^{t-1} (A_i(t-1) + B(t-1)C_i(t-1))P_j(t-i-1) \quad (t=1,2,\dots; j=0,1,\dots,t),$$

$$P_j(j) = E, P_j(i) = 0 \quad (j > i).$$

Теорема 6. Система (9) стабилизируема регулятором (10) тогда и только тогда, когда $P_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство следует из теоремы 1.

Теорема 6 имеет в основном теоретическое значение, так как нахождение искомых матриц $C_j(t)$ исходя из критерия стабилизируемости, весьма проблематично. Поэтому сначала установим приемлемые для инженерной практики достаточные условия стабилизируемости и предложим численную процедуру построения искомых матриц $C_j(t)$.

Теорема 7. Система (9) стабилизируема регулятором (10), если для некоторых неотрицательных чисел l_j , удовлетворяющим условиям $l = \sum_{j=0}^{+\infty} l_j < 1$, существуют такие матрицы $C_j(t)$, подчиняющиеся неравенствам:

$$\|A_j(t) + B(t)C_j(t)\| \leq l_j \quad (j=0,1,\dots,t). \quad (12)$$

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства из [20]. Так как всякое решение $x(t,v)$ замкнутой системы подчиняется тождеству (11), то

$$\|x(t+1,v)\| \leq \sum_{j=0}^t \|(A_j(t) + B(t)C_j(t))x(t-j,v)\| \leq \sum_{j=0}^t l_j \|x(t-j,v)\|. \quad (13)$$

Поэтому при условии выполнении неравенств (12), (13) последовательно, начиная с $t=0,1,\dots$, можно показать, что любое решение замкнутой системы (11) удовлетворяет оценке $\|x(t+1,v)\| \leq \gamma_t \|v\|$, где $\gamma_0 = l_0$ и $\gamma_t = \gamma_{t-1}l_0 + \gamma_{t-2}l_1 + \dots + \gamma_0l_{t-1} + l_t$

($t=0,1,\dots$). Причем в случае выполнения $l = \sum_{j=0}^{+\infty} l_j < 1$ числовой неотрицательный ряд $\sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j$ сходится (его сумма равна $l(1-l)^{-1}$), а это значит, что последовательность

$\gamma_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ [20]. Отсюда нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво. Таким образом, система (9) стабилизируемо регулятором (10). Теорема доказана.

Ясно, что матрицы $C_j(t)$ необходимо выбирать так, чтобы сумма ряда $l = \sum_{j=0}^{+\infty} l_j < 1$ была минимальна, для чисел l_j должны выполняться неравенства (11) и они должны быть минимальны. Простейший способ численного решения заключается в минимизации функций $\Phi_j(C_j(t)) = \|A_j(t) + B(t)C_j(t)\|$. Так как требование (12) в теореме 7 не накладывает ограничения на норму в $\mathbb{R}^{n \times n}$, то для нахождения матриц $C_j(t)$ перейдем к минимизации функции $\Phi_j(C_j(t)) = \|A_j(t) + B(t)C_j(t)\|_E$, где $\|\cdot\|_E$ евклидова норма в $\mathbb{R}^{n \times n}$. В этом случае можем воспользоваться экстремальным свойством псевдообратной матрицы [22], а именно рассмотрим матричное уравнение $A + BX = 0$ (размеры матриц согласованы) относительно неизвестной матрицы X . Из [23] следует, что одно и только одно наилучшее приближенное решение этого уравнения удовлетворяет равенству (невязке по методу наименьших квадратов):

$$\min_X \|A + BX\|_E = \|A - BB^+A\|_E = \|(E - BB^+)A\|_E,$$

где B^+ – псевдообратная матрицы B . Для вычисления псевдообратной матрицы можем воспользоваться формулой $B^+ = D^+Q^+ = D^+(D^+)^{-1}(Q^+Q)^{-1}Q$, где D и Q – компоненты скелетного разложения матрицы B [25].

Учитывая все вышесказанное, приходим к выражению:

$$\min_{C_j(t)} \Phi_j(C_j(t)) = \min_{C_j(t)} \|A_j(t) + B(t)C_j(t)\|_E = \|A_j(t) - B(t)B_j^+(t)A_j(t)\|_E.$$

Отсюда получаем явное приближенное представление искомых матриц:

$$C_j(t) = -B^+(t)A_j(t), \quad (14)$$

и, используя (14), неравенства (12) переходят в равенства:

$$\|A_j(t) + B(t)C_j(t)\|_E = \max_{t \geq 0} \|A_j(t) - B(t)B^+(t)A_j(t)\|_E = l_j \quad (t = 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots, t).$$

Если требование $l = \sum_{j=0}^{+\infty} l_j < 1$ выполняется, то система (9) регулятором (10)

с искомыми матрицами (14) стабилизируема.

В частном случае, когда матрица $B(t)$ полного строчного ранга, то матрица $(E - B(t)B^+(t)) \equiv 0$ и требования теоремы 7 выполнены, а значит, система (9) замкнутая регулятором (10) с матрицами $C_j(t) = -B^+(t)A_j(t)$ стабилизируема, каковы бы ни были заданы матрицы $A_j(t)$.

Имеет место следующая формулировка аналога теоремы 7.

Теорема 8. Система (9) стабилизируема регулятором (10), если для некоторых неотрицательных матриц V_j удовлетворяющим условиям $V = \sum_{j=0}^{\infty} V_j$ и $\rho(V) < 1$ существуют такие матрицы $C_j(t)$, в каждый момент $t = 0, 1, \dots$ подчиняющиеся неравенствам $\|A_j(t) + B(t)C_j(t)\|_* \leq V_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, t$).

Учитывая вышеизложенные результаты, матрицы $C_j(t)$ необходимо выбирать так, чтобы норма $\|V_j\|$ была минимальна для каждого $j = 0, 1, \dots$ и требование $\sum_{j=0}^{+\infty} \|V_j\| < 1$ выполнялось, что в силу неравенств $\rho(V) \leq \|V\|_E \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|V_j\|$ приводит к $\rho(V) < 1$.

Пример 1. Рассмотрим иллюстрацию процедуры стабилизации неустойчивой системы уравнений Вольтерры. Пусть $n = 2$, $m = 1$ и заданы следующие матрицы системы (7)

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad A_j(t) = \begin{pmatrix} 1/10^{j+1} & 0 \\ \exp(t+j) & (t+j)^2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Легко проверить, что однородная часть ($u(t) \equiv 0$) системы (9) асимптотически неустойчива. Псевдообратная матрицы $B(t)$ (в данном примере – это вектор-строка) имеет представление $B^+(t) = (0, 1/(t+1))$. Рассмотрим управление, которое задается правилом (10) с матрицами (в нашем примере вектор-строками):

$$C_j(t) = -B^+(t)A_j(t) = -(\exp(t+j)/(t+1) \quad (t+j)^2/(t+1)). \quad (16)$$

Отсюда $(A_j(t) + B(t)C_j(t)) = \begin{pmatrix} 1/10^{j+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрицы системы (9), замкнутой регулятором (10) с матрицами (15). Поскольку $l = \sum_{i=0}^{+\infty} l_j = \sum_{i=0}^{+\infty} (0.1)^{j+1} = 1/9 < 1$, то, в силу достаточных условий теоремы 2, управление (10) с матрицами (16) стабилизирует систему (9).

Заключение. В данной работе для линейных дискретных нестационарных уравнений Вольтерры получены критерии устойчивости, асимптотической устойчивости, а также достаточные условия стабилизируемости, которые позволяют определять матричные параметры регуляторов. Обсуждается проблема робастной устойчивости и робастной стабилизируемости. Устойчивость и стабилизируемость понимаются в стандартном смысле: асимптотическая устойчивость как стремление решений задачи Коши к нулю, а стабилизируемость как возможность построения динамического регулятора, выход которого порождает управление, гарантирующее асимптотическую устойчивость решений.

Так как регулятор, осуществляющий стабилизацию уравнений Вольтерры, не единственен, то это обстоятельство можно использовать для оптимизации некоторого функционала, заданного на решениях уравнений Вольтерры. Таким образом, возникает задача оптимальной стабилизации, заключающаяся в стабилизации рассматриваемого уравнения и оптимизации выбранного функционала. Для решения такой задачи в стационарном случае можно воспользоваться методом функционалов Ляпунова, модифицированного по схеме, предложенной Н. Н. Красовским для оптимальной стабилизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Источники

1. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М. – Изжевск : Ин-т компьютер. технологий, 2004. – 288 с.
Volterra, V. Mathematical theory of the struggle for existence / V. Volterra. – Moscow – Izhevsk : Institute of Computer Technologies, 2004. – 288 p.
2. Математическая модель «ресурс-потребитель» / Н. А. Гасратова [и др.] // Молодой ученый. – 2014. – № 10 (69). – С. 5–14.

Mathematical model "resource-consumer" / N. A. Gasratova [et al.] // *Young scientist*. – 2014. – 10 (69). – P. 5–14.

3. Кондратов, М. В. Формирование и развитие теории конкуренции / М. В. Кондратов // *Молодой ученый*. – 2010. – № 6. – С. 146–149.

Kondratov, M. V. Formation and development of the theory of competition / M. V. Kondratov // *Young scientist*. – 2010. – № 6. – P. 146–149.

4. Орлова, Е. В. Методы ценообразования и их использование на высоко конкурентном рынке / Е. В. Орлова, И. С. Ульмасова // *Молодой ученый*. – 2014. – № 3 (62). – С. 495–497.

Orlova, E. V. Pricing methods and their use in a highly competitive market / E. V. Orlova, I. S. Ulmasova // *Young scientist*. – 2014. – N 3 (62). – P. 495–497.

5. Поспелов, И. Г. Динамика количества фирм в рамках концепции экономики разнообразия / И. Г. Поспелов, С. А. Радионов // *Математ. моделирование*. – 2014. – Т. 26, № 2. – С. 65–80.

Pospelov, I. G. Dynamics of the number of firms within the framework of the concept of the economy of diversity / I. G. Pospelov, S. A. Radionov // *Mathematical modeling*. – 2014. – Vol. 26, № 2. – P. 65–80.

6. Колокольцов, В. Н. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение / В. Н. Колокольцов, О. А. Малафеев // *Вестн. гражд. инженеров*. – 2010. – № 4, ч. I. – С. 144–153.

Kolokoltsov, V. N. Dynamic competitive systems of multi-agent interaction and their asymptotic behavior / V. N. Kolokoltsov, O. A. Malafeev // *Bulletin of Civil Engineers*. – 2010. – № 4, part I. – P. 144–153.

7. Капранова, Н. Н. Современное предприятие в конкурентной среде / Н. Н. Капранова // *Молодой ученый*. – 2014. – № 21 (80). – С. 328–332.

Kapranova, N. N. Modern enterprise in a competitive environment / N. N. Kapranova // *Young scientist*. – 2014. – № 21 (80). – P. 328–332.

8. Шоев, А. Х. Некоторые аспекты конкурентной борьбы за ресурсы в мировой экономике / А. Х. Шоев // *Молодой ученый*. – 2014. – № 6 (65). – С. 532–534.

Shoev, A. Kh. Some aspects of competition for resources in the global economy / A. Kh. Shoev // *Young scientist*. – 2014. – № 6 (65). – P. 532–534.

9. Балакирева, А. Е. Интеграция классических и современных методик разработки конкурентной стратегии организации с целью повышения конкурентоспособности предприятия / А. Е. Балакирева, В. В. Костина, Н. И. Меркушова // *Молодой ученый*. – 2014. – № 2 (61). – С. 405–412.

Balakireva, A. E. Integration of classical and modern methods for developing an organization's competitive strategy in order to increase the competitiveness of an enterprise / A. E. Balakireva, V. V. Kostina, N. I. Merkusheva // *Young scientist*. – 2014. – № 2 (61). – P. 405–412.

10. Орлова, Е. В. Методы ценообразования и их использование на высоко конкурентном рынке / Е. В. Орлова, И. С. Ульмасова // *Молодой ученый*. – 2014. – № 3 (62). – С. 495–497.

Orlova, E. V. Pricing methods and their use in a highly competitive market / E. V. Orlova, I. S. Ulmasova // *Young scientist*. – 2014. – № 3 (62). – P. 495–497.

11. Решетько, Н. И. Конкуренция в сетевой фирме / Н. И. Решетько, М. Б. Поныгина, К. В. Абрамова // *Молодой ученый*. – 2014. – № 6-2 (65). – С. 49–52.

Reshetko, N. I. Competition in a network company / N. I. Reshetko, M. B. Ponyavina, K. V. Abramova // *Young scientist*. – 2014. – № 6-2 (65). – P. 49–52.

12. Цю, Ш. Разработка системы управления конкурентной стратегией / Ш. Цю // Молодой ученый. – 2014. – № 21 (80). – С. 456–458.

Qiu, Sh. Development of a competitive strategy management system / Sh. Qiu // Young scientist. – 2014. – № 21 (80). – P. 456–458.

13. Гайшун, И. В. Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений / И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1607–1614.

Gaishun, I. V. Discrete equations with variable structure and stability their solutions / I. V. Gaishun // Differential equations. – 1997. – Vol. 33, № 12. – P. 1607–1614.

14. Колмановский, В. Б. Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра / В. Б. Колмановский, А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 3–13.

Kolmanovskii, V. B. On stability of some discrete Volterra processes / V. B. Kolmanovskii, A. M. Rodionov // Automation and Remote Control. – 1995. – № 2. – P. 3–13.

15. Колмановский, В. Б. О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 11. – С. 50–64.

Kolmanovskii, V. B. About application of the second Lyapunov method to difference Volterra equations / V. B. Kolmanovskii // Automation and Remote Control. – 1995. – № 11. – P. 50–64.

16. Колмановский, В. Б. Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра / В. Б. Колмановский // Докл. РАН. – 1996. – Т. 349, № 5. – С. 610–614.

Kolmanovskii, V. B. Stability of discrete Volterra equations / V. B. Kolmanovskii // Reports of the Russian Academy of Sciences. – 1996 – Vol. 349, № 5. – P. 610–614.

17. Гайшун, И. В. Устойчивость дискретных уравнений Вольтера / И. В. Гайшун // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 2. – С. 5–8.

Gaishun, I. V. On stability of discrete Volterra equations / I. V. Gaishun // Reports of the Academy of Sciences of Belarus. – 1996. – Vol. 40, № 2. – P. 5–8.

18. Гайшун, И. В. Устойчивость дискретных процессов Вольтерра с убывающим последствием / И. В. Гайшун // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 6. – С. 118–124.

Gaishun, I. V. Stability of discrete Volterra processes with decreasing aftereffect / I. V. Gaishun // Automation and Remote Control. – 1997 – №. 6. – P. 118–124.

19. Гайшун, И. В. Стабилизируемость дискретных уравнений Вольтера / И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 2. – С. 272–278.

Gaishun, I. V. Stabilization of discrete Volterra equations / I. V. Gaishun // Differential equations. – 1998. – Vol. 34, № 2. – P. 272–278.

20. Гайшун, И. В. Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун. – Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2001. – 400 с.

Gaishun, I. V. Systems with Discrete Time / I. V. Gaishun. – Minsk : Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001. – 400 p.

21. Астровский, А. И. Об управляемости и наблюдаемости дискретных нестационарных линейных систем Вольтерра / А. И. Астровский, В. В. Горячкин, М. П. Дымков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 213–223.

Astrovskii, A. I. On the controllability, observability and optimization of discrete nonstationary linear Volterra systems / A. I. Astrovskii, V. V. Goryachkin,

M. P. Dymkov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2023. – Vol. 59, № 3. – P. 213–223.

22. Бобылев, Н. А. Оценки возмущений устойчивых матриц / Н. А. Бобылев, С. В. Емельянов, С. К. Коровин // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 4. – С. 15–24.

Bobylev, N. A. Estimates of disturbances for stability matrix / N. A. Bobylev, C. V. Emeljanov, C. K. Korovin // Automation and Remote Control. – 1998. – № 4. – P. 15–24.

23. Бобылев, Н. А. О робастной устойчивости линейных дискретных систем / Н. А. Бобылев, С. В. Емельянов, С. К. Коровин // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 8. – С. 138–145.

Bobylev, N. A. About robust stability of linear discrete systems / N. A. Bobylev, C. V. Emeljanov, C. K. Korovin. // Automation and Remote Control. 1998. № 8. – P. 138–145.

24. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон – М. : Мир, 1989. – 655 с.
Horn, R. A. Topics in Matrix Analysis / R. A. Horn, C. R. Jonhson. – Moscow : World, 1989. – 655 p.

25. Зубов, И. Е. О вычислении псевдообратной матрицы. Общий случай / И. Е. Зубов, В. Н. Рябченко // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 16–25.

Zubov, N. E. On calculating a pseudoinverse matrix / N. E. Zubov, V. N. Ryabchenko // Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci. – 2018. – № 1. – P. 16–25.

Статья поступила в редакцию 1.12.2023.

УДК 338.48 : 330.16

A. Yezhel
BSEU (Minsk)

CONCEPT OF SUSTAINABLE TOURISM DEVELOPMENT: A NEW APPROACH

The article discusses various approaches to sustainable tourism development. The author's definition of sustainable development is proposed, based on two theories: spiral dynamics and synergetics (self-organization). In the author's concept of sustainable development, a psychological factor is added to the three existing factors and the direction of sustainable development is determined.

Keywords: sustainability; sustainable development; tourism; tourism industry; psychological factor; spiral dynamics; synergetic.