**Лабораторные задания**

**по учебной дисциплине «Цифровая поддержка бизнеса»**

# **Задание 1** (моделирование инвестиционных проектов)

# Фирма рассматривает возможность производства нового вида продукции. Известно, что д.е. (начальные инвестиции), (ожидаемый годовой выпуск продукции), д.е. (ожидаемая цена единицы продукции при текущем уровне цен), д.е. (переменные издержки в расчете на единицу продукции при текущем уровне цен), д.е. (постоянные годовые издержки при текущем уровне цен), лет (срок проекта), (налоговая ставка), (ожидаемый уровень инфляции), (реальная внутренняя доходность альтернативных проектов).

Требуется:

1. Найти свободные денежные потоки инвестиционного проекта,
2. Найти чистую текущую стоимость проекта (), его номинальную () и реальную () внутренние доходности;
3. Найти коэффициенты чувствительности выходных параметров ,  и  по входным параметрам , , , , , , , ,  численно (с точностью до 1%) и с помощью производных;
4. Найти точки безубыточности проекта для указанных в п. 3 входных параметров;
5. Считая, что , где случайные величины  независимы и распределены треугольно с нулевым наиболее вероятным значением, максимальным значением +20% и минимальным значением –20%, требуется с помощью метода Монте-Карло оценить вероятности следующих событий: а); б) ; в) , а также найти выборочные математические ожидания и стандартные отклонения для ,  и . (Использовать 100 прогонов в Excel и 1000 прогонов в Octave.)

Задание выполнить в Excel и в GNU Octave.

**Методические указания**

*Пункты 1 и 2*

Найдем формулы по которым определяются свободные денежные потоки инвестиционного проекта.

Обозначим через  цену единицы продукции в *k*-том году, через  – удельные переменные издержки в *k*-том году. Будем считать, что цена единицы продукции, удельные переменные издержки и годовые постоянные издержки увеличиваются в соответствии с уровнем инфляции. Тогда

, , (1)

Выручка в *k*-том году = , (2)

Переменные издержки в *k*-том году = , (3)

Постоянные издержки в *k*-том году = . (4)

Прибыль до уплаты налога в *k*-том году =

= Выручка в *k*-том году – Переменные издержки в *k*-том году –

– Постоянные издержки в *k*-том году. (5)

Предположим, что амортизация – линейная, причем инфляция не учитывается. Тогда

Амортизация в *k*-том году = . (6)

Налогооблагаемая база в *k*-том году =

= Прибыль до уплаты налога в *k*-том году – Амортизация в *k*-том году. (7)

Предположим, что налог взимается только в том случае, когда налогооблагаемая база положительна. Тогда

. (8)

Прибыль в *k*-том году после уплаты налога =

= Прибыль до уплаты налога в *k*-том году – Налог за *k*-тый год. (9)

Поскольку в условиях данной задачи инвестиции  в *k*-том году равны нулю, свободный денежный поток  за *k*-й год равен прибыли после уплаты налога, т.е. *Ck* = Прибыль в *k*-том году после уплаты налога. Формулы (1)–(9) позволяют однозначно определить свободный денежный поток *k*-том году  с помощью значений входных параметров *, Q, p, v, F, n, t, i*. Следовательно, выходной параметр  можно рассматривать как функцию от перечисленных выше входных параметров, т.е.

. (10)

Для того, чтобы найти чистую текущую стоимость проекта, найдем вначале номинальную внутреннюю доходность альтернативных проектов *r* по формуле:

, (11)

где  – реальная внутренняя доходность альтернативных проектов, а *i* – уровень инфляции.

Теперь можно найти чистую текущую стоимость проекта:

 . (12)

Из (10), (11), (12) следует, что

. (13)

Номинальную внутреннюю доходность данного проекта *IRR* можно найти, решив следующее уравнение:

. (14)

Из (10) и (14) следует, что

. (15)

С помощью номинальной внутренней доходности проекта можно найти его реальную доходность по формуле:

 . (16)

Из (15) и (16) следует, что

. (17)

Bведем в Excel значения входных параметров: , , , , , , , , .

В отдельной ячейке введем формулу (11) (т.е. ) для определения номинальной внутренней доходности альтернативных проектов (которая будет использоваться в качестве ставки дисконтирования свободных денежных потоков проекта).

Построим таблицу для нахождения денежных потоков проекта:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Годы, *k* | | | |
|  | 0 | 1 | ……. | 7 |
| Выпуск, |  |  |  |  |
| Выручка |  |  |  |  |
| Переменные издержки |  |  |  |  |
| Постоянные издержки |  |  |  |  |
| Прибыль до налога |  | =Выручка – Переменные издержки – Постоянные издержки |  |  |
| Амортизация  копировать |  |  |  |  |
| Налогооблагаемая база |  | =Прибыль до налога – Амортизация |  |  |
| Налог |  | = max(Налогообл. база, 0)⋅*t* |  |  |
| Свободный денежный поток, |  | = Прибыль до уплаты налога  – Налог |  |  |
| Дисконтированный денежный поток, |  |  |  |  |

После введения формул в столбец для первого года нужно выделить этот столбец и скопировать его в столбцы для всех оставшихся лет.

Введем в Excel формулы для нахождения:

* чистой текущей стоимости проекта:

, (18)

* номинальной внутренней ставки доходности проекта:

, (19)

* реальной внутренней ставки доходности проекта

. (20)

Для расчета в Octave указанных показателей можно написать функцию funNPV следующего вида:

function [NPV,IRR,IRRreal]=funNPV(input)

I0=input.I0;

Q=input.Q;

. . . . . .

for k=1:n

p=p\*(1+i);

v=v\*(1+i);

. . . .

end

. . . .

end

При этом для нахождения IRR можно использовать функцию fzero.

*Пункт 3*

Анализ чувствительности модели – это анализ того, как изменятся выходные параметры модели при изменении входных параметров.

Анализ чувствительности удобно проводить в Excel, поскольку при вводе новых значений входных параметров выходные параметры автоматически пересчитываются.

В нашей модели входные параметры – это: .

Выходные параметры – это: .

Исследуем, например, как изменяться выходные параметры при увеличении годового выпуска продукции на 5 единиц. Для этого в ячейку, содержащую значение входного параметра *Q* введем новое значение 105.

При этом после нажатия клавиши “Enter” произойдет пересчет значений всех ячеек, содержащих формулы.

Коэффициент чувствительности выходного параметра  по входному параметру  – это производная , где .

.

В случае, если  – срок проекта, то следует положить  (поскольку  – это шаг изменения срока проекта.)

При выполнении задания в Excel можно считать, что .

При выполнении в Octave следует написать программу в которой начальное значение , а затем  уменьшается в 2 раза до тех пор, пока относительное изменение значения коэффициента чувствительности за одну итерацию не станет меньше либо равно 1%.

Для численного нахождения коэффициентов чувствительности в Octave удобно использовать команду eval в цикле:

function a=funA(input)

[NPV,IRR,IRRreal]=funNPV(input);

. . .

Y={'NPV','IRR','IRRreal'};

X={'I0','Q','p','v','F','t','rReal','i'};

for k=1:length(X)

. . .

eval(['dx=input.',X{k},'/50;']);

while true

input2=input;

eval(['input2.',X{k},'=input.',X{k},'+dx;']);

[NPV2,IRR2,IRRreal2]=funNPV(input2);

. . .

end

for j=1:3

eval(['a.',Y{j},'\_',X{k},'=dy(j);']);

end

end

*Пункт 4*

Точка безубыточности для входного параметра – это такое значение параметра, при котором  , но при дальнейшем изменении которого чистая текущая стоимость проекта становится отрицательной.

Если можно считать, что параметр может меняться непрерывно, то точка безубыточности находится из уравнения: .

Найдем точку безубыточности для годового выпуска *Q*. Для этого воспользуемся модулем «Подбор параметра» подменю «Анализ что–если» меню «Данные».

Установить в ячейке: *NPV*

Значение: 0

Изменяя значение ячейки: *Q*

В Octave для нахождения точки безубыточности следует использовать функцию fzero.

Найдем точку безубыточности для срока проекта, т.е. минимальное количество лет действия проекта, при котором чистая текущая стоимость проекта неотрицательна. Для этого будем уменьшать срок проекта до тех пор, пока *NPV* не станет отрицательной.

Уменьшим значение входного параметра *n* на единицу (с 7 до 6 лет). Также в формуле для расчета *NPV* уменьшим поле аргументов на одну ячейку: .

Если при  чистая текущая стоимость положительна, уменьшим срок проекта еще на один год ( с 6 лет до 5 лет). При этом также в формуле для расчета *NPV* уменьшим поле аргументов на одну ячейку:

.

Для нахождения точек безубыточности в Octave следует использовать функцию fzero. Для того, чтобы найти точки безубыточности по всем входным параметрам (кроме срока окупаемости), следует использовать функцию eval в цикле.

*Пункт 5*

Относительные отклонения  подчиняются треугольному распределению с параметрами ,  и . Введем эти значения в Exel в качестве входных параметров.

В Excel имеется датчик случайных чисел, распределенных равномерно на отрезке : СЛЧИС(). Для того, чтобы с помощью этого датчика получить треугольно распределенные случайные числа нужно использовать функцию треугобр, обратную к функции треугольного распределения (которую мы получили на практическом занятии).

Формула  реализуется в Excel’e следующим образом:

. (21)

Для того, чтобы получить в таблице случайные значения для годовых выпусков, введем в строку «Выпуск» формулы (21).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Годы, *k* | | | | |
| копировать | 0 | 1 | 2 | ……… | 7 |
| Выпуск, |  |  |  |  |  |

Теперь в строке «Выпуск» генерируются случайные числа.

Для того, чтобы можно было найти выборочные характеристики выходных параметров, а также эмпирические вероятности (например, того, что ), построим таблицу значений выходных параметров (*NPV, IRR, IRRreal*). (Таблица будет содержать по 100 значений для каждого параметра.) Затем упорядочим столбцы по возрастанию.

Найдем средние значения и выборочные стандартные отклонения выходных параметров:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *NPV* | IRR | *IRRreal* |
| Среднее значение  копировать | =СРЗНАЧ(*NPV*(1):*NPV*(100)) |  |  |
| Стандартное отклонение | =СТАНДОТКЛОН(*NPV*(1):*NPV*(100)) |  |  |

При выполнении данного пункта в Octave нужно модифицировать функцию funNPV: в структуру входных данных добавить dQ и искать новые значения выпуска с помощью (построенного нами) датчика треугольно распределенных случайных чисел randTr: Q=Q\*(1+randTr(-dQ,dQ,0)).

Также нужно написать программу для прогона модифицированной программы funNPV требуемое количество раз и подсчета количеств благориятных исходов к общему количеству исходов. Разделив количества благоприятных исходов на общее количество исходов, получим искомые эмпирические вероятности.

**Задание 3** (задача оптимального выбора инвестиционных проектов)

Фирме нужно отобрать проекты из шести возможных. Для каждого проекта известна чистая текущая стоимость , требуемые инвестиции  для каждого года в течение пяти лет, а также уровень риска . Для финансирования проектов фирма выделяет суммы  для каждого года в течение пяти лет.

Данные представлены в следующей таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | | |  |
| *k i* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |  |
| 1 | 75 | 90 | 60 | 30 | 100 | 50 | 250 |
| 2 | 25 | 35 | 15 | 20 | 25 | 20 | 75 |
| 3 | 20 | 20 | 15 | 10 | 20 | 10 | 70 |
| 4 | 15 | 10 | 15 | 5 | 20 | 30 | 60 |
| 5 | 10 | 5 | 15 | 5 | 20 | 40 | 45 |
|  | 141 | 187 | 121 | 83 | 265 | 127 |  |
|  | 3 | 5 | 2 | 4 | 2 | 1 |  |

1) Требуется отобрать проекты таким образом, чтобы суммарная чистая текущая стоимость отобранных проектов была максимальна и, при этом, чтобы в каждом году суммарные инвестиции, требуемые для финансирования отобранных проектов, не превышали выделенных сумм .

2) Решить задачу при дополнительном условии состоящем в том, что пятый проект может выполняться только в том случае, если выполняется четвертый проект.

3) Решить задачу (из п. 1) при дополнительном условии состоящем в том, что средневзвешенный уровень риска отобранных проектов не должен превышать максимально допустимого уровня риска .

Задание выполнить в Excel и в AMPL (используя в качестве образцов файлы с примерами решений).

**Методические указания**

*Пункт 1*

Для того, чтобы построить математическую модель этой задачи введем двоичные переменные , . Положим  в случае, если *i*-й проект принимается, и  в случае, если *i*-й проект отвергается. Тогда суммарная текущая стоимость отобранных проектов будет равна , а суммарные инвестиции, требуемые в *k*-том периоде для финансирования отобранных проектов – .

Следовательно, математическая модель задачи имеет вид:

, (1)

, , (2)

, . (3)

*Пункт 2*

В некоторых случаях налагаются дополнительные условия на процесс отбора проектов. Например,

* если хотя бы один из двух проектов (с номерами *i* и *j*) должен быть принят, то к ограничениям задачи (1)-(3) добавляется условие: ;
* если должно быть принято не более одного из двух проектов, то такое условие запишется в виде: ;
* если проект *j* может быть принят только в случае принятия проекта *i*, то , и т.п.

*Пункт 3*

Ограничения по риску имеют вид:

, , (4)

где  – средневзвешенный уровень риска  для *k*-го года.

Средневзвешенный уровень риска  для *k*-го года будем находить по формуле:

, . (5)

где весовые коэффициенты  рассчитываются следующим образом:

, , . (6)

С учетом соотношений (5) и (6) ограничения (4) примут вид:

, , (7)

Приведем ограничения (7) к линейному виду. Умножив (7) на , получим:

, , (7)

Переобозначив индекс суммирования в правой части неравенств (8) с *j* на *i* и перенеся правую часть неравенства (7) в левую часть, получим:

, , (8)

Итак, к ограничениям задачи (1)–(3) следует добавить ограничения (8).

**Задание 3** (задача оптимального финансирования инвестиционного проекта)

Предположим, что проект требует инвестиций , , в конце *n* периодов времени.

Инвестиции   ………  

Время 0 1 2 .……... *n*-1 *n*

Для финансирования проекта фирма в начальный момент времени создает инвестиционный фонд, размером  денежных единиц. Инвестиционный фонд должен обеспечить выплату требуемых денежных сумм , , в моменты времени 1, 2, …, *n*. (Причем деньги вкладываются в инвестиционный фонд только в начальный момент времени.) При этом фирма имеет возможность вкладывать деньги из инвестиционного фонда в *m* видов финансовых инструментов (облигации, банковские депозиты, ссуды и др.). Момент времени, когда деньги вкладываются в финансовые инструменты вида *i*, обозначим через , а момент времени, когда финансовые инструменты вида *i* обеспечивают доход, – через . (Причем будем считать, что .) Эффективную доходность финансовых инструментов вида *i* обозначим через . Уровень финансового риска, связанного с вложением денег в инструменты вида *i*, обозначим через . (Уровни риска , , получены с помощью экспертных оценок.)

Требуется

1. Минимизировать начальные вложения  в инвестиционный фонд. При этом в течение каждого периода времени средневзвешенный уровень риска, связанный с вложением денег из инвестиционного фонда в финансовые инструменты, не должен превышать заданной величины ;
2. Решить задачу при дополнительном условии, состоящем в том, что доля денежных средств, вложенных в каждый в отдельности финансовый инструмент в течение каждого в отдельности периода, не должна превышать .

Данные приведены ниже:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| *Ck* | 0 | 250 | 0 | 250 | 0 | 300 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 1 | 1,20% | 1 |
| 2 | 0 | 2 | 3,50% | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 5,80% | 8 |
| 4 | 0 | 6 | 11,00% | 6 |
| 5 | 1 | 2 | 1,20% | 1 |
| 6 | 2 | 3 | 1,20% | 1 |
| 7 | 2 | 4 | 3,50% | 3 |
| 8 | 3 | 4 | 1,20% | 1 |
| 9 | 3 | 6 | 5,80% | 8 |
| 10 | 4 | 5 | 1,20% | 1 |
| 11 | 4 | 6 | 3,50% | 3 |
| 12 | 5 | 6 | 1,20% | 1 |

Задание выполнить в Excel и в AMPL (используя в качестве образцов файлы с примерами решений).

**Методические указания**

*Пункт 1*

Построим математическую модель этой задачи. Количество денег, вкладываемых фирмой в финансовые инструменты вида *i*, обозначим через . Очевидно, что в начальный момент времени вложения  в инвестиционный фонд вкладываются в финансовые инструменты, для которых . Следовательно,

. (1)

В этой сумме ограничение  под знаком суммирования означает, что суммирование производится только по тем номерам индекса *i*, для которых . Для каждого момента времени  доход, выплачиваемый финансовыми инструментами с , должен обеспечить во-первых выплату требуемой суммы , и во-вторых, вложения в финансовые инструменты с . (Напомним, что по предположению после создания инвестиционного фонда фирма не вкладывает в него дополнительные средства.) Следовательно, должны выполняться следующие равенства: , . Перенеся суммы  из правых частей этих равенств в левые, получим:

, . (2)

Кроме того, поскольку в течение каждого периода времени средневзвешенный уровень риска, связанный с вложением денег из инвестиционного фонда в финансовые инструменты, не должен превышать заданной величины , должны иметь место следующие ограничения:

, . (3)

Здесь через  обозначен вес вложений в финансовые инструменты вида *i*  в *k*-м периоде. Причем будем считать, что  определяется следующим образом:

. (4)

Приведем ограничение (3) к линейному виду. Подставив (4) в (3) после несложных алгебраических преобразований, получим:

, . (5)

Итак, математическая постановка задачи оптимального финансирования проекта – следующая: минимизировать целевую функцию (1) при ограничениях (2), (5) и условии неотрицательности переменных , , т.е.

, (6)

, , (7)

, , (8)

, . (9)

Для того, чтобы было удобнее вводить в ПЭВМ целевую функцию (6) и условия (7), (8), определим следующим образом коэффициенты  и :

 для , , (10)

 для , . (11)

С использованием коэффициентов  и  задача (6)-(9) перепишется следующим образом:

, (12)

, , (13)

, , (14)

, . (15)

*Пункт 2*

Дополнительные ограничения (по диверсификации инвестиций в финансовые инструменты) имеют вид:

, , (16)

где  – (относительная) доля вложений в финансовый инструмент вида *i*  в *k*-м периоде, рассчитываемая по формуле (4).

Приведем ограничения (16) к линейному виду. Подставив (4) в (16) после несложных алгебраических преобразований, получим:

,  (17)

Для того, чтобы было удобнее вводить в ПЭВМ условия (17), определим следующим образом коэффициенты :

 , . (18)

С использованием коэффициентов  условия (18) запишутся следующим образом

, , . (19)

Итак, к ограничениям задачи (12)–(15) следует добавить ограничения (19).

**Задание 4** (эконометрика)

Строительная фирма изучает спрос на квартиры в большом городе. В нижеследующих таблицах представлены данные по ценам для 30 квартир и по следующим факторам (влияющим на цены):

1. общая площадь;
2. жилая площадь;
3. число комнат в квартире;
4. площадь кухни;
5. наличие балкона (1 – есть, 0 – нет).

Требуется:

1. построить линейную регрессионную модель для оценки зависимости рыночной стоимости квартир от всех пяти объясняющих факторов и найти выборочные коэффициенты регрессии методом наименьших квадратов;
2. с помощью статистики Фишера проверить гипотезу о незначимости всех объясняющих факторов одновременно при уровне значимости ;
3. с помощью алгоритма пошаговой регрессии, основанном на использовании статистик Стьюдента при уровне значимости , построить оптимальный набор объясняющих факторов;
4. построить линейную регрессионную модель для оценки зависимости рыночной стоимости квартир от наиболее значимых факторов, найти выборочные коэффициенты регрессии для такой модели и оценить рыночную стоимость квартиры со следующими характеристиками:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Общая площадь (кв.м.) | Жилая площадь (кв.м.) | Число комнат | Площадь  кухни (кв.м.) | Наличие балкона  (1 – да, 0 – нет) |
| 53 | 48 | 3 | 7 | 1 |

Данные для 30 квартир:

Цена квартиры (ден. ед.)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  квартиры | Номер варианта | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 78 | 83 | 89 | 94 | 100 | 105 | 111 | 117 | 122 | 128 |
| 2 | 50 | 53 | 57 | 60 | 64 | 67 | 71 | 75 | 78 | 82 |
| 3 | 108 | 116 | 123 | 131 | 139 | 146 | 154 | 162 | 169 | 177 |
| 4 | 53 | 57 | 61 | 65 | 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 87 |
| 5 | 76 | 82 | 87 | 93 | 98 | 104 | 109 | 114 | 120 | 125 |
| 6 | 85 | 92 | 98 | 104 | 110 | 116 | 122 | 128 | 134 | 140 |
| 7 | 48 | 51 | 54 | 58 | 61 | 65 | 68 | 71 | 75 | 78 |
| 8 | 56 | 60 | 64 | 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 88 | 92 |
| 9 | 84 | 90 | 96 | 102 | 108 | 114 | 120 | 126 | 132 | 138 |
| 10 | 90 | 96 | 102 | 109 | 115 | 122 | 128 | 134 | 141 | 147 |
| 11 | 46 | 49 | 52 | 55 | 59 | 62 | 65 | 68 | 72 | 75 |
| 12 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 | 81 | 85 | 89 | 94 | 98 |
| 13 | 95 | 101 | 108 | 115 | 122 | 128 | 135 | 142 | 149 | 155 |
| 14 | 77 | 83 | 88 | 94 | 99 | 105 | 110 | 116 | 121 | 127 |
| 15 | 57 | 62 | 66 | 70 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 | 94 |
| 16 | 75 | 80 | 86 | 91 | 96 | 102 | 107 | 112 | 118 | 123 |
| 17 | 101 | 108 | 115 | 122 | 130 | 137 | 144 | 151 | 158 | 166 |
| 18 | 78 | 84 | 90 | 95 | 101 | 106 | 112 | 118 | 123 | 129 |
| 19 | 113 | 122 | 130 | 138 | 146 | 154 | 162 | 170 | 178 | 186 |
| 20 | 51 | 55 | 58 | 62 | 66 | 69 | 73 | 77 | 80 | 84 |
| 21 | 60 | 65 | 69 | 73 | 77 | 82 | 86 | 90 | 95 | 99 |
| 22 | 69 | 74 | 78 | 83 | 88 | 93 | 98 | 103 | 108 | 113 |
| 23 | 104 | 111 | 118 | 126 | 133 | 141 | 148 | 155 | 163 | 170 |
| 24 | 107 | 115 | 122 | 130 | 138 | 145 | 153 | 161 | 168 | 176 |
| 24 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 |
| 26 | 85 | 91 | 97 | 103 | 109 | 115 | 121 | 127 | 133 | 139 |
| 27 | 81 | 87 | 93 | 99 | 104 | 110 | 116 | 122 | 128 | 133 |
| 28 | 52 | 56 | 59 | 63 | 67 | 70 | 74 | 78 | 81 | 85 |
| 29 | 56 | 60 | 64 | 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 88 | 92 |
| 30 | 84 | 90 | 96 | 102 | 108 | 114 | 120 | 126 | 132 | 138 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  квартиры | Общая площадь (кв.м.) | Жилая площадь (кв.м.) | Число комнат | Площадь  кухни (кв.м.) | Наличие балкона  (1 – да, 0 – нет) |
| 1 | 55 | 38 | 3 | 12 | 1 |
| 2 | 30 | 17 | 1 | 8 | 1 |
| 3 | 78 | 59 | 4 | 11 | 1 |
| 4 | 37 | 18 | 1 | 10 | 1 |
| 5 | 50 | 39 | 3 | 7 | 1 |
| 6 | 62 | 49 | 3 | 8 | 1 |
| 7 | 35 | 21 | 1 | 10 | 0 |
| 8 | 44 | 28 | 2 | 11 | 0 |
| 9 | 67 | 50 | 3 | 8 | 0 |
| 10 | 60 | 42 | 3 | 11 | 1 |
| 11 | 33 | 17 | 1 | 8 | 1 |
| 12 | 42 | 21 | 1 | 11 | 0 |
| 13 | 65 | 52 | 3 | 8 | 1 |
| 14 | 54 | 38 | 3 | 10 | 1 |
| 15 | 42 | 22 | 1 | 11 | 0 |
| 16 | 55 | 39 | 3 | 8 | 1 |
| 17 | 70 | 54 | 4 | 10 | 1 |
| 18 | 60 | 43 | 3 | 7 | 1 |
| 19 | 78 | 60 | 4 | 11 | 1 |
| 20 | 33 | 19 | 1 | 10 | 1 |
| 21 | 36 | 16 | 1 | 12 | 1 |
| 22 | 52 | 34 | 2 | 8 | 1 |
| 23 | 73 | 55 | 4 | 9 | 1 |
| 24 | 72 | 56 | 4 | 8 | 1 |
| 24 | 53 | 40 | 3 | 7 | 0 |
| 26 | 66 | 49 | 3 | 9 | 0 |
| 27 | 63 | 42 | 3 | 11 | 0 |
| 28 | 39 | 18 | 1 | 12 | 0 |
| 29 | 47 | 29 | 2 | 10 | 0 |
| 30 | 63 | 41 | 3 | 12 | 1 |

Задание выполнить средствами MS Excel, GNU Octave и R.

**Методические указания**

*Пункт 1*

Множественная линейная регрессионная модель имеет вид:

,  (1)

где  – значение *j*-го объясняющего фактора *i*-го наблюдения,

 – значение объясняемого фактора для *i*-го наблюдения,

α и β*j* – теоретические коэффициенты регрессии, 

 – случайное отклонение для *i*-го наблюдения,

*m* – количество объясняющих факторов,

*n* – количество наблюдений в выборке.

(В нашем случае , .)

Найдем выборочные коэффициенты регрессии *a* и ,, (оценки теоретических коэффициентов α и β*j*) с помощью модуля «Анализ данных» меню «Данные» (как и для задачи 1).

Для этого в меню «Анализа данных» выберем модуль «Регрессия». В появившейся таблице введем адреса соответствующих диапазонов ячеек для входных данных. Отметим, что диапазон X – это в данном случае таблица, состоящая из пяти столбцов. Отметим также, что удобно использовать названия переменных. Для этого нужно поставить птичку возле «Меток» (в этом случае диапазоны ячеек для входных данных должны содержать также адреса ячеек с названиями столбцов). Следует также указать «Параметры вывода» и нажать кнопку «OK», после чего на листе Excel появится информация «Вывод итогов» с результатами прогона регрессии.

Значения выборочных коэффициентов регрессии *a* и , , расположены в первом столбце третьей таблицы «Вывода итогов».

*Пункт 2*

Гипотеза о незначимости всех объясняющих факторов одновременно – это гипотеза о равенстве нулю всех теоретических коэффициентов регрессии , , одновременно, т.е.

 (2)

Гипотеза (2) принимается, если Р-значение для статистики Фишера больше уровня значимости γ. В противном случае, гипотеза отвергается.

Р-значение для статистики Фишера фигурирует во второй таблице «Вывода итогов» как «Значимость F».

В случае, если гипотеза (2) принимается, объясняющие факторы не влияют на объясняемый фактор, и, следовательно, линейную модель (1) нельзя использовать для прогноза.

*Пункт 3*

Алгоритм пошаговой регрессии основан на использовании Р-значений для коэффициентов регрессии ,  . Указанные Р-значения находятся в третьей таблице «Вывода итогов».

Среди Р-значений для коэффициентов , , следует найти наибольшее. (При этом Р-значение для константы *a* (т.е. для Y-пересечения в таблице Excel) не используется.).

Если найденное наибольшее Р-значение не превосходит уровня значимости γ, то оптимальный набор объясняющих факторов совпадает с исходным набором, и на этом алгоритм пошаговой регрессии заканчивается. В противном случае из модели исключается (только один) объясняющий фактор, соответствующий наибольшему Р-значению.

Для нового (уменьшенного на один фактор) набора объясняющих факторов опять нужно использовать модуль «Регрессия» в Excel и найти новые P-значения. (При этом в таблице модуля «Регрессия» нужно указать новый диапазон X. В случае, когда столбец данных для исключенного фактора находится между двумя другими столбцами с данными для объясняющих факторов, следует построить в Excel новую уменьшенную таблицу, в которой фигурируют только оставшиеся столбцы. Эту уменьшенную таблицу и нужно использовать в модуле «Регрессия» в качестве диапазона X.)

Среди новых P-значений опять следует найти наибольшее.

Если найденное наибольшее Р-значение не превосходит уровня значимости γ, то оптимальный набор объясняющих факторов совпадает с последним используемым набором факторов, и на этом алгоритм пошаговой регрессии заканчивается. В противном случае из модели исключается (только один) объясняющий фактор, соответствующий наибольшему Р-значению и т.д.

Таким образом, алгоритм пошаговой регрессии заключается в последовательном выполнении указанных действий то тех пор, пока Р-значения всех коэффициентов регрессии не станут меньше либо равными уровня значимости γ (либо пока в модели не останется ни одного объясняющего фактора).

*Пункт 4*

Обозначим через  оптимальный набор номеров объясняющих факторов, отобранных в результате выполнения предыдущего пункта задачи. (Например, если , то в этом случае оптимальный набор факторов состоит из второго, четвертого и пятого объясняющих факторов.)

Множественная линейная регрессионная модель с  объясняющими факторами имеет вид:

,  (3)

Обозначение  означает, что суммирование происходит только по значениям индекса *j* из множества . (Например, если , то в этом случае .)

В Excel значения выборочных коэффициентов регрессии , , фигурируют в «Выводе итогов» для рассматриваемой в этом пункте модели.

Оценка рыночной стоимости квартиры строится в соответствии с формулой (3), т.е.

. (4)

В случае, когда , формула (4) примет вид:

.

**Задание 5** (эконометрика)

Предприятие изучает зависимость прибыли от основных фондов и расходов на рекламу своей продукции, используя данные для 20 кварталов в нижеследующих таблицах. При этом прибыль в текущем квартале зависит не только от рекламы в текущем периоде, но и от рекламы в предыдущие периоды. Требуется

1. построить линейную регрессионную модель с распределенными лагами, описывающую зависимость прибыли от основных фондов (только в текущем периоде) и от рекламы в текущем и предыдущих периодах, используя скорректированный коэффициент детерминации для выбора количества лагов (и найти выборочные коэффициенты регрессии и остатки регрессии).
2. проверить гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков регрессии с помощью статистики Дарбина-Уотсона при уровне значимости ;
3. построить прогноз прибыли предприятия (с помощью построенной модели) для двадцать первого квартала для случая, когда размер основных фондов и расходы на рекламу в двадцать первом квартале равны соответственно 625 ден. ед. и 7 ден. ед..

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер квартала | Прибыль предприятия (ден. ед.) | | | | | | | | | |
| Номер варианта | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 50 | 53 | 58 | 61 | 47 | 64 | 66 | 69 | 72 | 75 |
| 2 | 37 | 40 | 44 | 46 | 35 | 48 | 50 | 52 | 54 | 56 |
| 3 | 43 | 46 | 51 | 53 | 41 | 55 | 58 | 60 | 63 | 65 |
| 4 | 40 | 43 | 47 | 49 | 38 | 52 | 54 | 56 | 58 | 61 |
| 5 | 57 | 60 | 66 | 69 | 53 | 72 | 75 | 79 | 82 | 85 |
| 6 | 61 | 64 | 71 | 74 | 57 | 78 | 81 | 85 | 88 | 91 |
| 7 | 55 | 58 | 64 | 67 | 52 | 70 | 73 | 76 | 79 | 82 |
| 8 | 57 | 60 | 67 | 70 | 54 | 73 | 76 | 79 | 82 | 86 |
| 9 | 69 | 73 | 81 | 84 | 65 | 88 | 92 | 96 | 100 | 104 |
| 10 | 78 | 82 | 91 | 95 | 73 | 99 | 104 | 108 | 112 | 117 |
| 11 | 61 | 64 | 71 | 74 | 57 | 77 | 81 | 84 | 88 | 91 |
| 12 | 59 | 62 | 69 | 72 | 55 | 75 | 78 | 82 | 85 | 88 |
| 13 | 80 | 85 | 94 | 98 | 76 | 103 | 107 | 112 | 116 | 121 |
| 14 | 71 | 74 | 82 | 86 | 67 | 90 | 94 | 98 | 102 | 106 |
| 15 | 79 | 83 | 92 | 96 | 74 | 101 | 105 | 109 | 114 | 118 |
| 16 | 70 | 74 | 82 | 86 | 67 | 90 | 94 | 98 | 102 | 106 |
| 17 | 51 | 54 | 60 | 63 | 48 | 65 | 68 | 71 | 74 | 77 |
| 18 | 70 | 74 | 82 | 86 | 66 | 89 | 93 | 97 | 101 | 105 |
| 19 | 62 | 65 | 72 | 76 | 59 | 79 | 83 | 86 | 90 | 93 |
| 20 | 58 | 62 | 68 | 71 | 55 | 75 | 78 | 81 | 84 | 88 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер квартала | Основные фонды  (ден. ед) | Расходы на рекламу  (ден. ед) |
| 1 | 400 | 2 |
| 2 | 420 | 3 |
| 3 | 449 | 2 |
| 4 | 450 | 3 |
| 5 | 455 | 3 |
| 6 | 465 | 2 |
| 7 | 570 | 5 |
| 8 | 580 | 6 |
| 9 | 590 | 5 |
| 10 | 589 | 5 |
| 11 | 585 | 6 |
| 12 | 590 | 4 |
| 13 | 586 | 7 |
| 14 | 590 | 6 |
| 15 | 598 | 2 |
| 16 | 695 | 3 |
| 17 | 605 | 3 |
| 18 | 610 | 2 |
| 19 | 620 | 3 |
| 20 | 615 | 6 |

Задание выполнить средствами MS Excel, GNU Octave и R.

**Методические указания**

*Пункт 1*

Обозначим:

 – значение объясняемого фактора (т.е. прибыли) для *t*-го периода,

 – значение первого объясняющего фактора (т.е. основных фондов) для *t*-го периода,

 – значение второго объясняющего фактора (т.е. расходов на рекламу) для *t*-го периода,

*n* – количество периодов,

*q* – количество лагов в модели.

Модель с распределенными лагами в данном имеет вид:

, , (1)

где α, β и , , – теоретические коэффициенты регрессии,

 – случайное отклонение для *t*-го периода.

Выборочные коэффициенты регрессии *a*, *b*, , , и остатки регрессии , , можно искать помощью модуля «Данные –Анализ данных – Регрессия» меню «Данные». При этом столбцы для лагированных переменных  строятся в Excel с помощью смещения вниз соответствующего исходного столбца (для переменной) на *k* ячеек.

Важно отметить, что при использовании модуля «Регрессия» для модели (1) с *q* лагами входной массив Х будет состоять из  строк (начиная с (*q*+1)-й строки и заканчивая *n*-й строкой) и *q*+2 столбцов (при этом первый столбец – для переменной  , второй – для переменной , третий – для  и т.д., (*q*+2)-й столбец – для переменной ).

Для каждого случая следует найти значение скорректированного коэффициента детерминации  . Для этого можно использовать «Вывод итогов» модуля «Регрессия» программы Excel, где указанный показатель фигурирует под названием «нормированный R-квадрат».

Считается, что при увеличении значения  качество модели повышается.

Прогонять модели следует со случая, когда  (т.е. без лагов). Затем рассматривается разновидность модель при , затем при  и т.д. (увеличивая каждый раз количество лагов *q* на единицу).

Данную процедуру следует прекратить, когда текущее значение  станет меньше либо равным предыдущему значению, т.е. когда

. (2)

Оптимальное количество лагов  считается равным количеству лагов для предпоследнего случая, т.е.

. (3)

*Пункт 2*

Статистика Дарбина-Уотсона рассчитывается с помощью остатков регрессии , , по формуле:

 . (4)

Близость значения *DW* к нулю означает положительную корреляцию остатков, близость *DW* к 2 – отсутствие автокорреляции, близость *DW* к 4 – отрицательную автокорреляцию.

Для более точного определения, какое значение статистики свидетельствует об отсутствии автокорреляции, а какое – об ее наличии (и ее виде), используются критические точки распределения Дарбина-Уотсона:  (нижняя граница) и  (верхняя граница), зависящие от числа наблюдений , количества объясняющих переменных  и от уровня значимости .

В частности, при ,  и :

,  (5)

Выводы о наличии и характере автокорреляции делаются по следующему правилу:

1)  – существует положительная автокорреляция

2)  – неопределенность (нельзя сделать вывод о наличии либо отсутствии автокорреляции)

3)  – автокорреляция отсутствует

4)  – неопределенность (нельзя сделать вывод о наличии либо отсутствии автокорреляции)

5)  – существует отрицательная автокорреляция

*Пункт 3*

Прогноз прибыли предприятия на *l* периодов вперед (т.е. для периода  ) при заданных значениях  и , , строится в соответствии с формулой (1), т.е.

, (6)

где *a*, *b*, ,  – выборочные коэффициенты регрессии.

В частности, при  и  формула (6) имеет вид:

.

**Задание 6** (Статические модели)

Функция полезности (однородных) конечных потребителей задана формулой:

, (1)

где ,  и  – неизвестные параметры.

Для двадцати случаев (наблюдений) известны цены на блага (трех видов), доходы конечных потребителей и соответствующие значения спроса. Требуется найти значения параметров ,  и  функции полезности (1)

Задачу нужно решить в Excel (с использованием VBA) и в MatLab.

Исходные данные:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер наблюдения | Цены трех благ | | | Доход  m | Значения спроса | | |
| p1 | p2 | p3 | x1 | x2 | x3 |
| 1 | 5,39 | 16,79 | 10,19 | 366,91 | 3 | 13 | 13 |
| 2 | 6,51 | 16,17 | 10,65 | 496,17 | 2 | 20 | 15 |
| 3 | 5,69 | 16,17 | 11,54 | 423,53 | 3 | 18 | 10 |
| 4 | 5,84 | 16,71 | 10,47 | 502,53 | 3 | 19 | 16 |
| 5 | 5,31 | 15,07 | 11,48 | 275,41 | 2 | 13 | 6 |
| 6 | 6,64 | 16,77 | 11,39 | 355,32 | 1 | 14 | 10 |
| 7 | 6,25 | 15,82 | 11,65 | 222,7 | 1 | 10 | 5 |
| 8 | 6,48 | 15,07 | 11,66 | 434,37 | 2 | 21 | 9 |
| 9 | 6,61 | 16,49 | 10,59 | 381,04 | 1 | 15 | 12 |
| 10 | 5,13 | 15,31 | 10,62 | 454,16 | 4 | 20 | 12 |
| 11 | 6,90 | 15,29 | 11,05 | 498,07 | 2 | 23 | 12 |
| 12 | 6,00 | 16,21 | 10,65 | 469,09 | 2 | 19 | 14 |
| 13 | 6,51 | 15,51 | 11,66 | 320,78 | 1 | 15 | 7 |
| 14 | 6,48 | 15,65 | 11,62 | 193,81 | 1 | 9 | 4 |
| 15 | 6,66 | 15,8 | 11,11 | 359,45 | 1 | 16 | 9 |
| 16 | 5,31 | 15,81 | 10,53 | 268,77 | 2 | 11 | 8 |
| 17 | 5,91 | 15,77 | 11,36 | 263,31 | 1 | 12 | 6 |
| 18 | 6,24 | 16,22 | 10,47 | 295,11 | 1 | 12 | 9 |
| 19 | 6,86 | 15,33 | 10,91 | 225,62 | 1 | 10 | 6 |
| 20 | 6,67 | 15,38 | 10,77 | 417,36 | 1 | 19 | 11 |

**Методические указания**

Функция спроса в случае функции полезности (1) задана формулой (22) файла «Максимизация полезности»:

, . (2)

Обозначим через  прогнозное (расчетное) значение спроса на благо вида *i* для *k*-го случая при соответствующих значениях параметров  и :

, ,  (3)

где  – (известная) цена *i*-го блага в *k*-м случае, ,  – (известный) доход (богатство) конечного потребителя в *k*-м случае. (В нашем случае , .)

Значения параметров  и  находятся в результате минимизации суммы квадратов отклонений расчетных значений  от реальных (табличных) значений . При этом значение параметра  следует положить равным единице (либо любому другому положительному числу). Таким образом решается следующая задача:

, (4)

,  (5)

 (6)

 (7)

В Excel для нахождения значений  нужно создать функцию на языке программирования VBA и использовать ее для создания соответствующих столбцов на листе с исходными данными. Для решения задачи (4)–(7) в Excel следует использовать «Поиск решения».

В MatLab следует создать функцию (например, с именем funDev) для нахождения отклонений  расчетных значений  от реальных (табличных) значений . Затем эту функцию следует использовать для решения задачи (4)–(7) с помощью (матлабовской) функции lsqnonlin (например) следующим образом: lsqnonlin(@(par)funDev(par,P,M,X),par0,lb,ub).

Создаваемая функция funDev в качестве входных данных использует вектор , матрицу цен , вектор доходов  и матрицу  (заданных) значений спроса, а в качестве выходных данных – матрицу отклонений  расчетных значений  от реальных (табличных) значений . Матлабовская функция lsqnonlin в качестве входных аргументов использует анонимную функцию @(par)funDev(par,P,M,X) (зависящую от вектора параметров ), вектор  начальных значений параметров (например, , , ), а также векторы lb и ub нижних и верхних границ значений параметров, соответствующих ограничениям (5), (7). (В случае отсутствия верхней границы следует использовать значение inf (бесконечность).) Выходные аргументов функция lsqnonlin – вектор значений параметров  и сумма квадратов отклонений  соответствующих расчетных значений от реальных данных.

**Задание 7** (Статические модели)

 одинаковых домашних хозяйств с доходом  потребляют *n* видов благ. При этом функция полезности (одного) домашнего хозяйства имеет вид:

 (1)

 одинаковых фирм производят блага *n* видов, используя ресурс только одного вида. При этом трансформационная функция (одной) фирмы имеет вид:

, (2)

Требуется:

1. Найти равновесные цены и равновесные (совокупное) количества *n* благ на рынке методом последовательных приближений (с помощью итерационной последовательности). При этом в качестве максимальной допустимой относительной погрешности  использовать значение  для каждого значения  , , т.е. должны выполняться неравенства:

, . (2’)

1. Найти производные от равновесной цены и равновесного количества первого блага по (экзогенной) цене ресурса фирм
2. Найти производные от эквивалентной вариации одного домашнего хозяйства и от совокупной эквивалентной вариации (всех домашних хозяйств) по (экзогенной) цене ресурса
3. Найти прибыль одной фирмы и совокупную прибыль фирм и производные от прибыли одной фирмы и от совокупной прибыли фирм по (экзогенной) цене ресурса.

Значения параметров (экзогенных переменных) следующие:

, , , , 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 9 |
| 3 | 8 | 7 |

Задание выполнить в MatLab (написать программу-скрипт)

**Методические указания**

*Пункт 1*

Методом множителей Лагранжа можно показать, что решение задачи максимизации полезности (одного домашнего хозяйства):

 (3)

 (4)

,  (5)

имеет вид:

,  (6)

Умножив (6) на число домашних хозяйств, получим функции совокупного спроса на блага:

,  (7)

С помощью условий первого порядка можно показать, что решение задачи максимизации прибыли (одной фирмы):

 (8)

 (9)

,  (10)

имеет вид:

, (11)

,  (12)

Функции (11) и (12) – функции (соответственно) индивидуального спроса фирмы на ресурс и предложения продукции.

Умножив (12) на число фирм, получим функции совокупного предложения продукции:

,  (13)

Запишем условие (совершенного) равновесия на *n* благ:

,  (14)

Подставим формулы (7) и (13) в (14)

,  (15)

В уравнении (15) только n эндогенных переменных – , .

Обозначим:

 (16)

С помощью этой новой переменной уравнения (16) запишутся короче:

,  (17)

Выразим  из (17):

,  (18)

На основе выражения (18) построим следующую (векторную) функцию:

,  (19)

На основе выражения (16) построим следующую функцию:

 (20)

Построим новую функцию  по формуле:

,  (21)

Не сложно показать, что, если вектор  является решением системы уравнений (15), то (скалярное) значение  является решением уравнения:

 (22)

и, наоборот, если значение  является решением уравнения (22), то значение  является решением системы уравнений (15).

Можно показать, что функция  является сжимающим отображением в метрическом пространстве . Следовательно, в силу теоремы о неподвижной точке существует единственное решение  уравнения (22) и при этом  итерационная последовательность , построенная по рекуррентной формуле:

  (23)

сходится к  в метрическом пространстве  (по логарифмической метрике ), а следовательно указанная сходимость имеет место и по евклидовой метрике .

Положим  и построим итерационную последовательность по рекуррентной формуле (23) (с использованием формул ( (19) –(21)). В результате получим (приблизительное) решение  уравнения (22), а также вектор равновесных цен . При этом

 (24)

Вектор  равновесных совокупных количеств продукции находится из равенства:

 (25)

(с использованием формул (7), (13)).

*Пункт 2*

Вектор  частных производных от равновесных цен благ по цене ресурса находится в соответствии с формулой (106) файла «Совершенная конкуренция», т.е. по формуле:

 (26)

где  и  – это квадратные матрицы Якоби, сформированные из соответствующих частных производных (,). При этом индекс *k* соответствует строкам, а индекс *l* – столбцам этих матриц.  – это вектор-столбец, сформированный из соответствующих частных производных ().

Запишем формулу (7) с использованием функции (20):

 (27)

Продифференцировав (27) по  при  и при  в точке , получим соответственно:

,  (28)

 (29)

Запишем (28), (29) в матричном виде:

 (30)

где  – вектор-столбец ,  – вектор-столбец ,  – операция поэлементного деления векторов (деления Адамара), – оператор построения диагональной матрицы с помощью вектора элементов главной диагонали. (Отметим, что все эти операции имеются в MatLab.)

Продифференцировав (20) по , получим (при ):

,  (31)

Запишем (31) векторном виде:

, (32)

Для численного нахождения матрицы  нужно вначале найти вектор-столбец  по формуле (32), а затем подставить этот вектор в формулу (30).

Продифференцировав (13) по  при  и при , получим соответственно:

,  (33)

 (34)

Запишем (33), (34) в матричном виде:

 (35)

Продифференцировав (13) по  в точке , получим:

,  (36)

Запишем (36) в векторном виде:

 (37)

После численного нахождения матриц ,  и вектора  нужно найти вектор  по формуле (26). При этом в MatLab следует использовать операцию обратного деления « \ » (без нахождения обратной матрицы).

Запишем равенство (25) с учетом зависимости предложения от :

, (38)

Продифференцируем равенство (38) по :

 (39)

Заметим, что

 (40)

 (41)

Из (39)–(41) следует, что вектор  можно найти по формулам:

 (42)

 (43)

*Пункт 3*

В силу формул (146), (149), (163) файла «Совершенная конкуренция» для производных  и соответственно от эквивалентной вариации для одного домашнего хозяйства и от совокупной эквивалентной вариации по экзогенной цене ресурса фирм имеют место равенства:

 (44)

 (45)

*Пункт 4*

Прибыль  одной фирмы равна разности между выручкой и издержками :

 (46)

В свою очередь

 (47)

 (48)

где  – вектор-столбец продукции фирмы, а  – количество использованного ресурса.

Вектор и скаляр  определяются в соответствии с формулами (11) и (12), т.е.

, (49)

,  (50)

Запишем формулы (50) в векторном виде:

, (51)

Для численного нахождения прибыли  одной фирмы вначале нужно найти вектор и скаляр  по формулам (51) и (49), затем найти выручку *R* и издержки *C* по формулам (47), (48), и наконец подставить найденные значения *R* и *C* в формулу (46).

Суммарная прибыль фирм определяется по формуле:

 (52)

Продифференцировав равенство (46) по *w*, получим:

 (53)

Продифференцировав (47) по *w*, будем иметь:

 (54)

Заметим, что

 (55)

Для нахождения значения производной  нужно вначале найти  по формуле (55), а затем подставить найденный вектор формулу (54).

Продифференцировав (48) по *w*, будем иметь:

 (56)

Заметим, что

 (57)

где  вектор-столбец .

Из (49) получим:

,  (58)

 (59)

Запишем формулы (58) в векторном виде:

 (60)

Для нахождения значения производной  нужно вначале найти  и  по формулам (59), (60), затем подставить найденные значения в формулу (57) для нахождения значения производной , и наконец подставить найденное значение  в формулу (56).

Для нахождения значения  следует подставить уже известные значения  и  в формулу (53).

Из равенства (52) следует, что

 (61)

Следовательно, подставив значение  в формулу (61) получим значение .

**Задание 8** (Динамические модели)

Функции спроса и предложения заданы формулами:

 ,  , (1)

 ,  , (2)

где *m* – число видов продукции,  – вектор цен на продукцию *m* видов, , , , , ,  – заданные параметры.

Вектор выпусков продукции в *k*-м периоде равен:

, (3)

где  – ожидаемый вектор цен в *k*-м периоде.

Реальный вектор цен  в *k*-м периоде равен:

. (4)

Ожидаемый вектор цен  в (*k*+1)-м определяется по формуле:

, . (5)

Требуется написать программы в GNU Octave и Python, предназначенные для расчета векторов , ,  для  периодов (т.е. для ) при заданном начальном ожидаемом векторе цен, и с помощью этих программ и модели найти указанные векторы при следующих значениях параметров:

, , ,

,   ,

, 

.

**Методические указания**

Обратная векторная функция спроса находится следующим образом.

Из (1):

, . (6)

Прологарифмируем (6):

, . (7)

Отсюда:

. (8)

Запишем (8) в матричном виде:

 (9)

Отсюда:

. (10)

Пропотенцируем (10):

 (11)

Следовательно,

 (12)

**Задание 9** (Динамические модели)

Функции спроса и предложения заданы формулами:

 ,  , (1)

 ,  , (2)

где *m* – число видов продукции,  – вектор цен на продукцию *m* видов, , , , , ,  – заданные параметры.

Вектор интенсивностей выпусков продукции в момент времени *t* равен:

, (3)

где  – ожидаемый вектор цен в момент времени *t*.

Реальный вектор цен  в момент времени *t* равен:

. (4)

Динамика ожидаемого вектора цен  определяется равенством:

, . (5)

Требуется:

1. написать программы в GNU Octave и Python, предназначенные для расчета векторов , ,  при заданном начальном ожидаемом векторе цен  для периода времени  в точках  с шагом  , равным , где  – заданное количество подынтервалов для периода времени, равного единице измерения времени.
2. написать программы в GNU Octave и Python, предназначенные для расчета выпусков и средних цен  и  для периодов времени , , …, 
3. с помощью этих программ и модели найти указанные векторы при следующих значениях параметров:

,  , , ,

,  ( – матрица коэффициентов ),

,  ( матрица коэффициентов ).

.

**Методические указания**

Траектория вектора определяется как решение задачи Коши (3)–(5) относительно  при заданном начальном векторе . (Напомним, что задача Коши представляет собой систему дифференциальных уравнений вместе с начальным условием.)

Для решения задачи Коши в GNU Octave следует использовать функция ode45, в Python – solve\_ivp модуля scipy.integrate.

Для того, чтобы получить значения искомой функции в заданных точках , в следует использовать:

- функцию deval в MatLab;

- агрумент t\_eval функции solve\_ivp в Python;

Выпуск  за промежуток времени  можно найти с помощью интенсивности выпуска  по формуле:

. (6)

При этом, если известны значения  в моменты времени , где  и , то в соответствии с методом трапеций (для приближенного вычисления интеграла):

. (7)

Формула (7) реализована в MatLab и Python в функциях trapz (причем в Python функция trapz находится в модуле numpy).

Средняя цена в течение промежутка времени  находится по формуле:

 (8)

При этом, если известны значения  в моменты времени , где  и , то в соответствии с методом трапеций:

. (9)

Следовательно, для приближенного вычисления цены в течение промежутка времени  в MatLab и Python следует также использовать функции trapz.