

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК АППАРАТ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основополагающей моделью в экономике является модель межотраслевого баланса (МОБ), разработанная В. В. Леонтьевым. В работе рассмотрена модификация данной модели, а именно динамическая МОБ замкнутой системы, т.е. все ресурсы системы направлены на расширение производства, а потребление равно нулю. Математическая запись модели выглядит следующим образом:

$$X(t) = AX(t) + B \cdot \frac{dX(t)}{dt}, \quad (1)$$

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY(t)}{dt}. \quad (2)$$

Общее решение системы (2) может быть представлено в следующем виде:

$$Y_1(t) = \sum_{i=1}^n d_i K_i e^{\lambda_i t}. \quad (3)$$

Рассмотрим два случая со следующими условиями:

Случай № 1:  $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}; Y(0) = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \end{bmatrix}.$

Аналитическое решение имеет вид ( $\hat{\lambda} = 0,2347$  — технологический темп прироста соответствует корню Фробениуса — Перрона):

$$\begin{cases} Y_1(t) = 372.1642e^{0.2347t} + 27.8558e^{-46.191t}; \\ Y_2(t) = 618.4246e^{0.2347t} - 18.45e^{-46.191t}. \end{cases} \quad (4)$$

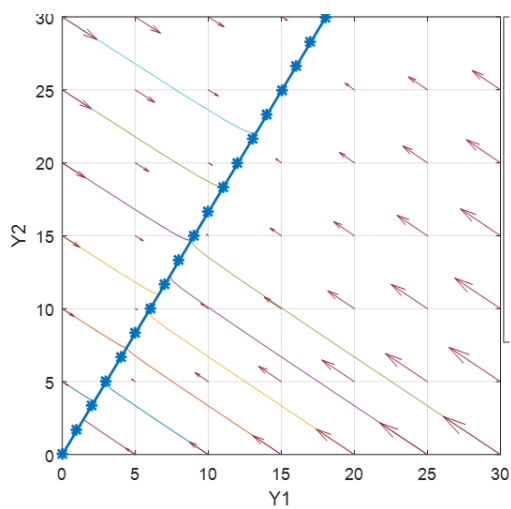
Случай № 2:  $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}; Y(0) = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \end{bmatrix}.$

Аналитическое решение имеет вид ( $\hat{\lambda} = 0,234$  — технологический темп прироста соответствует корню Фробениуса — Перрона):

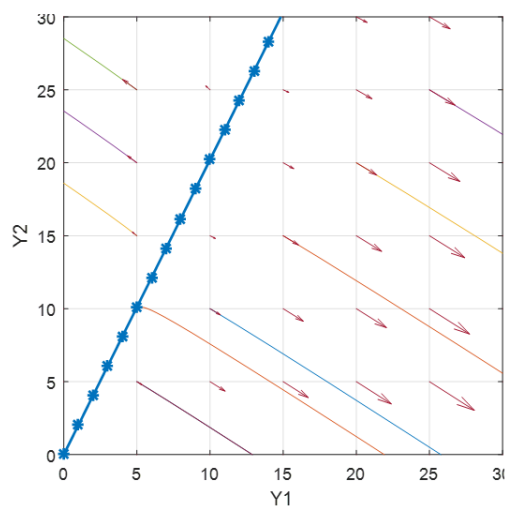
$$\begin{cases} Y_1(t) = 322.06e^{0.234t} + 77.93e^{17.65t}; \\ Y_2(t) = 651.1e^{0.234t} - 51.14e^{17.65t}. \end{cases} \quad (5)$$

Спрогнозировав вектор  $Y$  на некоторый интервал времени, получаем, что в случае № 1 будут получены положительные значения, имеющие экономиче-

ский смысл, в то время как в случае № 2 уже при  $t = 2$  получаются отрицательные значения и отсутствие экономического смысла решения. Изображаем решения систем на плоскости (см. рисунок).



а)



б)

Графическая интерпретация решения динамической МОБ для случая № 1 (а) и для случая № 2 (б) в MatLab

Источник: собственная разработка.

Полученные траектории — сумма экспонент. При  $t \rightarrow \infty$  преобладает экспонента с  $\hat{\lambda}$  (технологический темп прироста). Первый случай — доминирующая экспонента  $e^{\hat{\lambda}t}$ . Темпы роста продукции каждой отрасли стремятся к  $\hat{\lambda}$ , а отраслевая структура  $\hat{K}$  — к пропорциям собственного вектора. Во втором случае динамику определяет собственный вектор, соответствующий числу, отличному от корня Фробениуса — Перрона [1]. При достаточно большом  $t$  появляются отрицательные значения, что лишает решение экономического смысла. Решение, в котором доминирует другой темп, неприемлемо.

#### Источник

1. Гранберг, А. Г. Динамические модели народного хозяйства : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Экон. кибернетика» / А. Г. Гранберг. — М. : Экономика, 1985. — 240 с.